

SIMULACION NUMERICA DE LA CONVECCION MIXTA DE GASES EN TUBOS VERTICALES INCLUYENDO INVERSIONES DEL FLUJO

JUAN C. MORALES*

y

ANTONIO CAMPO**

**Dpto. de Mecánica,
Universidad Simón Bolívar,
Caracas 1080-A, Venezuela.*

***Dept. of Mechanical Engineering,
Purdue University, West Lafayette,
Indiana 47907, USA.*

RESUMEN

Este estudio paramétrico trata la influencia de la convección mixta en el desarrollo simultáneo de la velocidad y la temperatura de un gas con propiedades constantes, desplazándose por una tubería circular en posición vertical. Entretanto, la velocidad y la temperatura se consideran uniformes a la entrada de la región de intercambio térmico permaneciendo la pared del tubo isotérmica. La hipótesis más relevante utilizada en este análisis es la aproximación de Boussinesq para la densidad en el término de flotación, en tanto que el resto de las propiedades termofísicas permanecen invariantes con la temperatura. El sistema de ecuaciones en derivadas parciales altamente acoplado que gobierna el citado problema (conservación de masa, cantidad de movimiento y energía) se resuelve numéricamente mediante el método de los volúmenes de control. Un grupo selecto de gráficos ilustra la influencia de la convección natural sobre la convección forzada: ascendente con enfriamiento y ascendente con calentamiento. Además, se presentan curvas ilustrativas que ponen de manifiesto las inversiones del flujo en ambos casos. Este aspecto constituye un aporte innovador del presente trabajo.

SUMMARY

A parametric study addresses the influence of mixed convection on the simultaneous development of velocity and temperature of a constant-property gas through a vertical circular tube. Both velocity and temperature are considered uniform at the entrance of the heat exchange region, whereas the tube wall is isothermal. The salient hypothesis of the analysis is the Boussinesq approximation for the gas density in the buoyancy term, while the remaining properties are assumed constant. The system of highly coupled partial differential equations (conservation of mass, momentum and energy) is solved numerically by the control volume approach. Based on the numerical results, a selected group of figures illustrates the influence of natural convection on the forced convection processes: upward with cooling and upward with heating. Moreover, representative curves showing a whole spectrum of flow inversions are also presented. This feature constitutes an innovative contribution of the present work.

Recibido: Septiembre 1989

INTRODUCCION

Es un hecho sabido que la convección natural puede ejercer una acción estimulante o inhibidora sobre la transmisión de calor por convección forzada en flujos internos o externos¹. Este fenómeno peculiar suele ocurrir a velocidades pequeñas, diferencias altas de temperatura o longitudes características grandes. Ejemplos palpables de este proceso combinado, conocido como convección mixta en la literatura especializada, se encuentran en chimeneas, equipos electrónicos, reactores nucleares, etc.

En particular, el análisis térmico de los fluidos en régimen laminar propulsados conjuntamente por fuerzas viscosas y gravitacionales en ductos verticales requiere la solución de un sistema de tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales y fuertemente acopladas, o sea las ecuaciones de conservación¹. Esta dificultad inherente ocasiona que, con la excepción de casos simplistas, las técnicas de solución para este tipo de problema sean forzosamente numéricas. De aquí que, en situaciones de convección mixta interna puedan emplearse una gran variedad de métodos numéricos con el fin de predecir los datos experimentales existentes para los campos de velocidad y de temperatura.

Dentro del panorama de la convección natural, se sabe que la variación de la densidad de un fluido con la temperatura ocasiona cambios considerables en la fuerza de la gravedad en el seno de éste. Esto a su vez modifica notablemente el campo de velocidad y por ende, el campo de temperatura de los fluidos en movimiento ascendente o descendente que pasan por una zona de intercambio térmico en una tubería vertical. Bajo estas condiciones inusuales, el comportamiento termohidráulico del fluido se desvía marcadamente de las soluciones clásicas ya conocidas para convección forzada en conductos, las cuales aparecen recopiladas en la referencia [2].

El sistema físico que se pretende examinar en este trabajo consiste en un tubo vertical en donde tanto la velocidad como la temperatura de un gas entran con valores conocidos. Además, la zona de intercambio térmico está dictada por una condición isotérmica superficial. Por lo tanto, la formulación matemática del citado problema involucra las ecuaciones de conservación, o sea conservación de masa, cantidad de movimiento y energía. De éstas, la segunda ecuación incorpora el término dominante de flotación, que corresponde a la esencia de este trabajo y está caracterizada por la aproximación clásica de Boussinesq¹. Una vez formulado el problema en estudio por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, la tarea consiste en recurrir a una técnica numérica eficiente para su solución.

Revisión bibliográfica

El problema de la convección mixta ha recibido gran ímpetu desde el primer trabajo sobre este tema realizado por Martinelli y Boelter³ en 1942. En este trabajo, los autores propusieron una ecuación empírica para el cálculo del número de Nusselt promedio, que correlaciona cinco grupos de datos experimentales. La correlación resultante se validó para agua y aceite abarcando flujos ascendentes y descendentes por igual. Posteriormente, Pigford⁴ abordó el problema de forma aproximada por vía de una simplificación de la ecuación de la cantidad de movimiento con miras a acoplarla con la

ecuación de la energía. Los resultados presentados, tanto en la referencia [3] como en la [4], son aplicables aproximadamente para fluidos con altos números de Prandtl. Jackson et al.⁵ examinaron posteriormente el efecto de la convección mixta en el caso de flujos ascendentes con calentamiento. La correlación obtenida por estos investigadores ajustó una gama de datos experimentales de aire solamente. En cambio, Rosen y Hanratty⁶ utilizando las mismas suposiciones de la teoría integral de la capa límite empleadas en la referencia [4], lograron resolver aproximadamente la ecuación de la energía simultáneamente. Su solución predice satisfactoriamente los puntos experimentales de inversión del flujo, pero no así los coeficientes de transmisión del calor en la región de entrada.

Entretanto, Zeldin y Schmidt⁷ recurrieron al cálculo numérico y estudiaron el efecto de la convección mixta en la región de entrada para aire con flujo ascendente y calentamiento mediante una formulación de naturaleza elíptica. Por otro lado, Marner y McMillan⁸ examinaron la influencia de la convección mixta para flujos desarrollados y ascendentes con calentamiento ($Gr/Re = 60$) ayudados de un esquema parabólico. Collins⁹ resolvió el sistema de ecuaciones elípticas por un procedimiento de tipo semi-implícito para un solo valor de Gr/Re . Recientemente, Shadday¹⁰ obtuvo algunos resultados parciales por la vía de diferencias finitas para $Re = 100$ solamente.

Los resultados emanados de las referencias [7]-[10] son muy limitados en alcance en el sentido de que no cubren el espectro completo (positivo y negativo) del parámetro de convección mixta Gr/Re . Adicionalmente, todas las referencias, sin excepción de ninguna, descansan sobre técnicas numéricas tradicionales, o sea usan las discretizaciones basadas en la serie de Taylor truncada. Sin embargo, una ruta de solución numérica, radicalmente diferente a las citadas ya, fue concebida por Campo y Pérez¹¹ recientemente. Este procedimiento híbrido inspirado en el método de las líneas (MOL) requiere una discretización tradicional de las derivadas radiales, en tanto que las derivadas axiales permanecen continuas. Además, un aspecto novedoso de este procedimiento es que permite un acoplamiento especial entre la velocidad axial y la caída de presión. Esta transformación matemática da origen a una reformulación del problema que la convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Dado el carácter no lineal del sistema, éste se resolvió con un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden con paso variable.

En virtud de lo anterior, el objetivo fundamental de este trabajo consiste en estudiar exhaustivamente el comportamiento de la convección mixta de gases en tubos colocados en posición vertical. Las dos posibilidades físicas son: a) la convección natural ayuda a la convección forzada y b) la convección natural se opone a la convección forzada. Para realizar el análisis paramétrico se adoptará la metodología que discretiza las derivadas parciales mediante los volúmenes de control inventada por Patankar y Spalding¹². Este procedimiento goza de grandes atributos como lo demuestra su alta popularidad en la literatura de dinámica de fluidos computacional. Los resultados obtenidos (locales y globales) para los campos de velocidad y temperatura se presentarán en forma gráfica y tabulada en función del parámetro de convección mixta Gr/Re . De manera similar, se reportarán las condiciones que provocan inversiones del flujo.

MODELO MATEMATICO

El tema del presente trabajo corresponde a la situación física esquematizada en la Figura 1, en la cual un gas fluye dentro de una tubería de sección circular dispuesta en posición vertical. El gas entra a una zona de intercambio térmico caracterizada por la imposición de una temperatura constante en la pared del tubo T_w , cantidad que es diferente a la temperatura de entrada del gas T_o . La velocidad del gas a la entrada de la tubería se supone uniforme. La marcada desuniformidad de los perfiles de velocidad dentro de la zona de intercambio térmico permite que la convección natural interactúe con la convección forzada en forma simultánea.

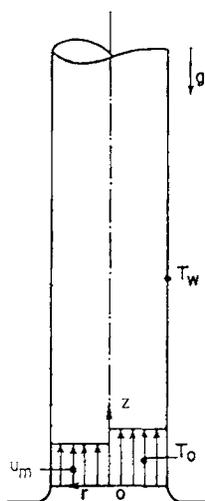


Figura 1. Sistema físico.

Amparados en la suposición del flujo axisimétrico se escoge el sistema de coordenadas cilíndricas (ver Figura 1) en donde z representa la coordenada axial medida desde la entrada de la zona de intercambio y r la posición radial medida desde el eje del tubo, respectivamente. El modelo matemático para estudiar la convección mixta descansa sobre las ecuaciones fundamentales de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía¹. Este conjunto de ecuaciones se simplifica en virtud de las siguientes suposiciones:

- el flujo es laminar
- el fluido es Newtoniano
- la teoría de la capa límite prevalece
- la conducción axial y la disipación viscosa son despreciables
- no existen reacciones químicas
- las propiedades son constantes, excepto en el término de flotación
- el gas no es un medio participante

Invocando este grupo de suposiciones y utilizando el sistema de coordenadas seleccionado previamente, las ecuaciones adimensionales que describen el fenómeno

de convección combinada quedan de la siguiente forma:

Masa

$$\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial RV}{\partial R} = 0 \quad (1)$$

Cantidad de movimiento axial

$$\frac{\partial UU}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial RVU}{\partial R} = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) \pm \frac{4Gr\theta}{Re} \quad (2)$$

Cantidad de movimiento radial

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial R} \quad (3)$$

Masa (formulación integral)

$$\int_0^1 U R dR = 1/2 \quad (4)$$

Energía

$$\frac{\partial U\theta}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial RV\theta}{\partial R} = \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{R}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \quad (5)$$

El signo positivo o negativo en el término de flotación $4Gr\theta/Re$ de la ecuación (2) corresponde a los casos de enfriamiento con flujo ascendente o descendente, respectivamente.

Entretanto, se puede observar en la ecuación (3) que la presión adimensional P es función de la coordenada axial Z solamente; y por lo tanto se hace imprescindible una ecuación que permita calcular el gradiente de presión a lo largo del tubo. En este sentido, la ecuación adicional necesaria se obtiene a la luz de que el flujo se encuentra confinado dentro del ducto, y por consiguiente, esto equivale a escribir:

$$\int_A \rho u dA = \text{constante} = \dot{m} \quad (6)$$

en donde A designa la sección transversal del tubo.

Finalmente, con el objeto de completar la formulación, las condiciones de borde que conforman el modelo matemático para el problema en estudio se pueden separar en dos partes de la siguiente forma:

Condiciones para el campo hidrodinámico

$$U = 1, \quad Z = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial R} = 0, \quad R = 0 \quad (8)$$

$$U = 0, R = 1 \quad (9)$$

$$V = 0, Z = 0 \quad (10)$$

$$V = 0, R = 0 \quad (11)$$

$$V = 0, R = 1 \quad (12)$$

$$P = 0, Z = 0 \quad (13)$$

Condiciones para el campo térmico

$$\theta = 1, Z = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = 0, R = 0 \quad (15)$$

$$\theta = 0, R = 1 \quad (16)$$

El modelo matemático propuesto en esta sección corresponde a las siguientes cantidades adimensionales:

$$\begin{aligned} Z &= z/r_0 Re & R &= r/r_0 & U &= u/u_m \\ V &= vRe/u_m & P &= 2(p_d - p_0)/\rho u_m^2 & \theta &= (T - T_w)/(T_0 - T_w) \\ Re &= 2\rho u_m r_0/\mu & Gr &= \rho^2 g \beta (T_0 - T_w) r_0^3/\mu^2 & Pr &= \mu c_p/k \end{aligned} \quad (17)$$

METODO DE SOLUCION NUMERICA

En esta sección se esbozan los detalles más relevantes del algoritmo de solución (de carácter parabólico) que se emplean en este trabajo.

Una revisión de la literatura especializada refleja que el método de los volúmenes de control propuesto por Patankar y Spalding¹¹ ha sido empleado con gran éxito en los últimos años para resolver problemas de dinámica de fluidos con transmisión de calor. Por consiguiente, ésta es una razón de peso suficiente para escoger este algoritmo de solución en este trabajo. El proceso consiste en subdividir el dominio de integración en regiones finitas, sobre las cuales se integran las ecuaciones diferenciales, para así obtener expresiones discretizadas más simples. Estas regiones son denominadas volúmenes de control y se escoge su centro geométrico como el punto representativo de cada región.

El sistema de ecuaciones de conservación puede ser escrito en forma general para una variable escalar ϕ mediante la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \rho U \phi}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial R J \phi}{\partial R} = S \phi \quad (18)$$

en donde $J \phi$ representa el flujo total de la variable ϕ

$$J \phi = \rho V \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \quad (19)$$

y S^ϕ designa el término de fuente formado por aquellos términos que no pueden ser abarcados por J^ϕ . La Tabla I presenta los valores característicos de ϕ , Γ y S^ϕ para las diversas variables involucradas en este problema. Cabe señalar que el procedimiento de discretización a utilizar en este trabajo es idéntico al expuesto por Patankar¹⁴.

ϕ	ρ	Γ	S^ϕ
1	1	0	0
u	1	2	$-\frac{1}{2} \frac{dP}{dZ} \pm \frac{4Gr\theta}{Re}$
θ	1	$\frac{2}{Pr}$	

Tabla I. Valores de ϕ , ρ , Γ y S^ϕ para las ecuaciones de conservación.

Cálculo del gradiente de presión

La principal dificultad que se suele presentar en los problemas de flujo interno en los cuales se desea determinar el campo de velocidad es que el gradiente de presión que aparece en la ecuación de cantidad de movimiento axial como término de fuente se desconoce. Además, tampoco se dispone de una ecuación independiente que permita hallarlo en forma directa. Ahora bien, el gradiente de presión se encuentra expresado indirectamente por la ecuación de conservación de masa en forma integral, ecuación (6). Esto es debido a que el gradiente de presión no es cualquiera, sino uno en específico, tal que los perfiles de velocidad que de él se obtengan (mediante la solución de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de masa diferencial) satisfagan la ecuación de conservación de masa integral.

Sin lugar a dudas, el punto más álgido en dinámica de fluidos computacional lo constituye el cálculo del gradiente de presión, tal como se ha mencionado anteriormente. En la literatura sobre este tema abundan diversos métodos para determinar el gradiente de presión de flujos internos, entre ellos los más conocidos son los propuestos por Patankar y Spalding¹², Briley¹⁵ y Raithby y Schneider¹³. La naturaleza no iterativa del esquema de Patankar y Spalding no garantiza completamente la conservación de masa. Sin embargo, el esquema propuesto por Briley, basado en el método de la secante, permite hallar el valor exacto, pero se hace necesario resolver la ecuación de cantidad de movimiento al menos tres veces. En este sentido, Raithby y Schneider¹³ desarrollaron un procedimiento novedoso de cálculo para flujos de tipo parabólico, el cual está basado en el método de los volúmenes de control de Patankar y Spalding¹². En dicho trabajo los autores elaboraron una metodología iterativa altamente eficiente para determinar el gradiente de presión axial a partir de la ecuación de cantidad de movimiento y de la condición de flujo confinado, ecuación (6). La ventaja que brinda el algoritmo de Raithby y Schneider es que emplea un tercio del trabajo del de Briley y más importante aún, permite hallar el valor exacto del gradiente de presión. Estas características son lo

suficientemente importantes para resaltar este algoritmo sobre los otros y por lo tanto es el que se utiliza en este trabajo.

ANALISIS DE LOS RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos empleando el método numérico propuestos en la sección anterior, el cual fue codificado en FORTRAN y adaptado a un computador DEC-10. Los resultados iniciales que se reportan en este trabajo corresponden a 20 volúmenes de control de igual tamaño, en donde los tiempos de computación (CPU) no superan los 25 segundos para cada caso. A manera de verificación, se obtuvieron resultados con una malla más fina teniendo 40 volúmenes de control, elevándose los tiempos promedios de computación ligeramente a 50 segundos. La comparación arroja que los resultados son invariantes con la malla.

En primer término, los resultados del campo puramente hidrodinámico se presentan empleando la velocidad máxima en el centro del tubo U_c y el gradiente de presión local dP/dZ . En segunda instancia, para el campo térmico se utilizan las distribuciones de la temperatura volumétrica media y del número de Nusselt local, las cuales se determinan con las expresiones

$$\theta_b = 2 \int_0^1 U \theta R dR \quad (20)$$

y

$$Nu(Z) = (2r_0 q_w) / [k(T_b - T_w)] = -2[\partial\theta(R=1)/\partial R] / \theta_b \quad (21)$$

respectivamente.

El calor total transmitido Q_T entre la entrada $z = 0$ y una estación cualquiera $z = L$ del tubo se puede hallar directamente por

$$Q_T = \dot{m} c_p [T_0 - T_b(L)] \quad (22)$$

Esta ecuación descansa en el Primer Principio de la Termodinámica. El caso límite de esta ecuación proporciona un calor total ideal Q_j , válido para un tubo ilimitado, o sea

$$Q_j = \dot{m} c_p [T_0 - T_w] \quad (23)$$

Introduciendo el concepto de eficiencia térmica Ω , dado por el cociente

$$\Omega = Q_T / Q_j \quad (24)$$

y combinando las ecuaciones (23) y (24) resulta que

$$\Omega = 1 - \theta_{bL} \quad (25)$$

En cambio, vale la pena resaltar que la manera tradicional de calcular el calor transmitido en flujos internos requiere el uso indirecto de la distribución del número de Nusselt.

Con el propósito expreso de estudiar independientemente la influencia de cada mecanismo, esta sección se divide en dos subsecciones:

- a) *Validación del método numérico*
- b) *Influencia de la convección natural sobre la convección forzada*

a) *Validación del método numérico*

Las Figuras 2-5 se prepararon con el propósito de mostrar los resultados para el problema del desarrollo simultáneo de velocidad y temperatura (sin convección natural) en un tubo isotérmico. En estas figuras se ilustra la convergencia del algoritmo propuesto en función del número de volúmenes de control empleados. Aquí se aprecia que los resultados obtenidos, tanto hidrodinámicos como térmicos, con 20 y 40 volúmenes no se diferencian entre sí en forma apreciable. Igualmente, se indican las comparaciones para el mismo problema entre los resultados numéricos reportados por Hornbeck¹⁶, Liu¹⁷ y Manohar¹⁸ y los nuestros utilizando una malla con 20 volúmenes de control. Una inspección detallada de estos resultados preliminares refleja una buena concordancia entre ellos, tanto en el campo hidrodinámico, como en el térmico.

b) *Influencia de la convección natural sobre la convección forzada*

La acción que ejerce la convección natural sobre la convección forzada en tubos verticales puede ser dividida en dos partes:

flujo ascendente con enfriamiento =
flujo descendente con calentamiento

flujo ascendente con calentamiento =
flujo descendente con enfriamiento

Esta clasificación da origen a dos combinaciones posibles, las cuales están influenciadas por el perfil de velocidad a la entrada de la zona de intercambio térmico, el número de Prandtl y el parámetro de convección mixta Gr/Re . En este contexto y con el propósito de economizar espacio en la revista, este trabajo se limita al caso de flujos de gases ($Pr = 0.7$) con velocidad uniforme impuesta a la entrada.

En las Figuras 6-10 se concentran los resultados obtenidos para el caso de flujo ascendente con enfriamiento ($Gr/Re > 0$). En la Figura 6 se observa que la velocidad en el centro de la tubería (velocidad máxima) tiende a incrementarse en función de Gr/Re desde un valor unitario a la entrada y desciende posteriormente hasta alcanzar el valor asintótico de $U_c = 2$. Cuando el parámetro de convección mixta llega a 40, el perfil de velocidad se invierte en la región cercana a la pared del tubo. Esto trae como consecuencia que la capa límite se invalide a partir de este punto ($Z = 0.005$) aproximadamente.

Tocante al gradiente de presión de la Figura 7, éste muestra su clásico comportamiento monótono decreciente en ausencia de convección natural ($Gr = 0$). A medida que el cociente Gr/Re aumenta, el gradiente de presión tiende a disminuir en la entrada y las curvas pasan por un mínimo, caracterizado por un patrón cóncavo. Desde estos valores mínimos, las curvas adquieren pendientes positivas correspondientes a un aumento sustancial de presión entre dos estaciones del tubo vertical. Como es evidente, este comportamiento se refleja en una disminución del coeficiente de fricción. La evolución de la velocidad axial correspondiente a la primera curva de la Figura 6 para $Gr/Re = 30$ (sin inversión) se dibuja en la Figura 8. Este caso ilustra las distorsiones

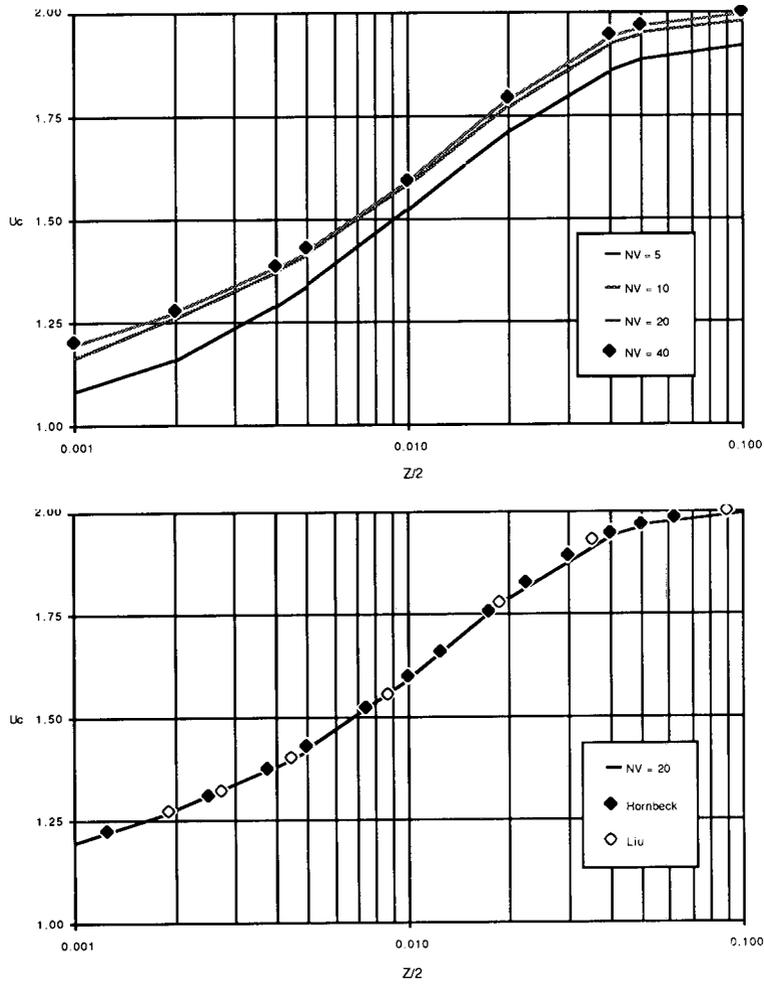


Figura 2. Desarrollo de la velocidad en el centro de la tubería.

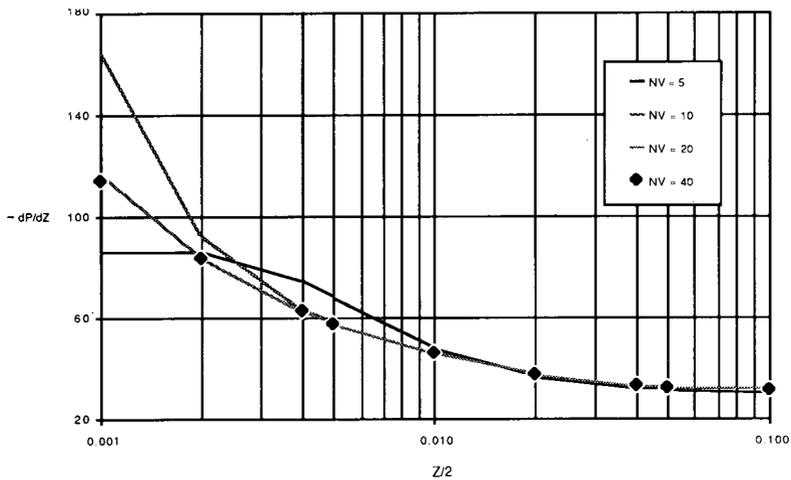


Figura 3. Variación del gradiente de presión.

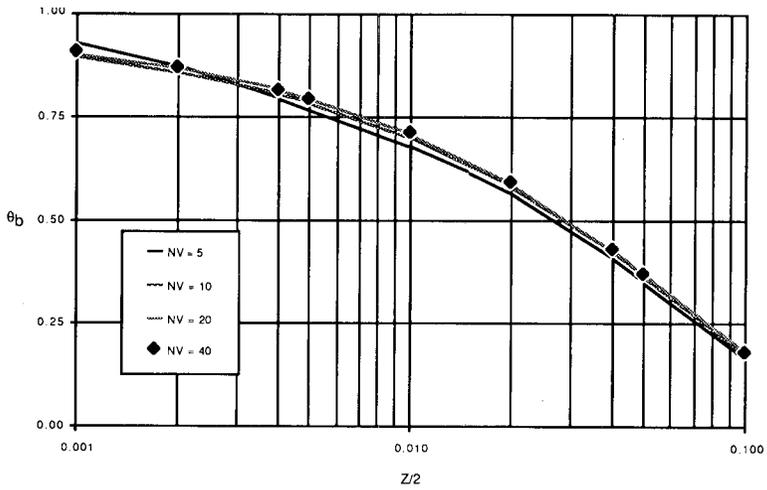


Figura 4. Desarrollo de la temperatura volumétrica media.

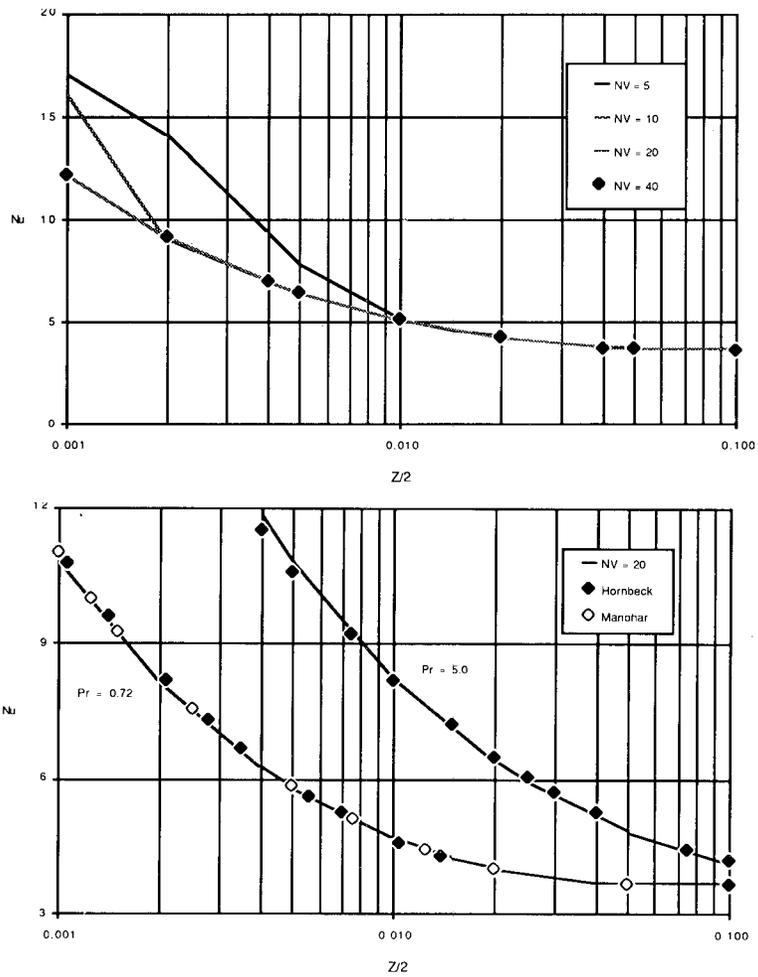


Figura 5. Variación del número de Nusselt local.

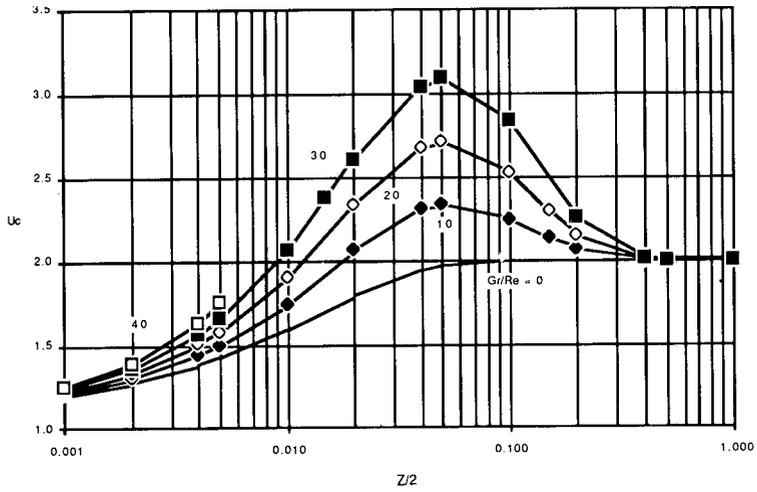


Figura 6. Desarrollo de la velocidad en el centro.

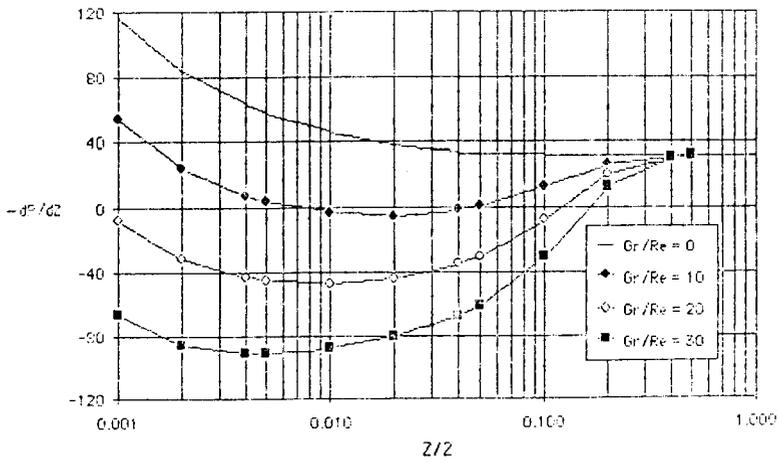


Figura 7. Variación del gradiente de presión.

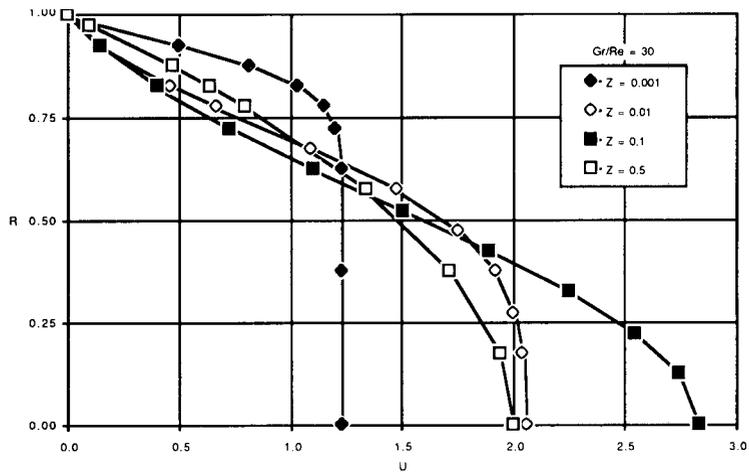


Figura 8. Distribución de la velocidad axial ($Gr/Re = 30$).

máximas de velocidad que ocurren justo antes de la inversión del flujo. Además, se puede concluir que la velocidad en el centro arriba al valor $U_c = 2$ para la estación axial $Z = 0.5$.

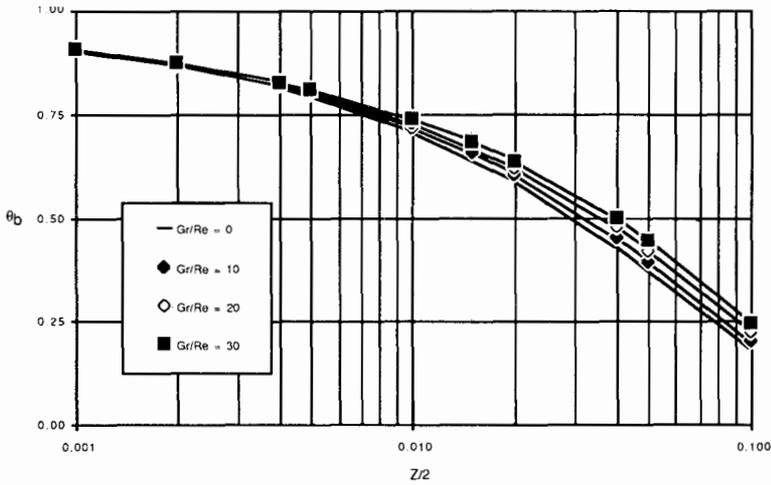


Figura 9. Desarrollo de la temperatura volumétrica media.

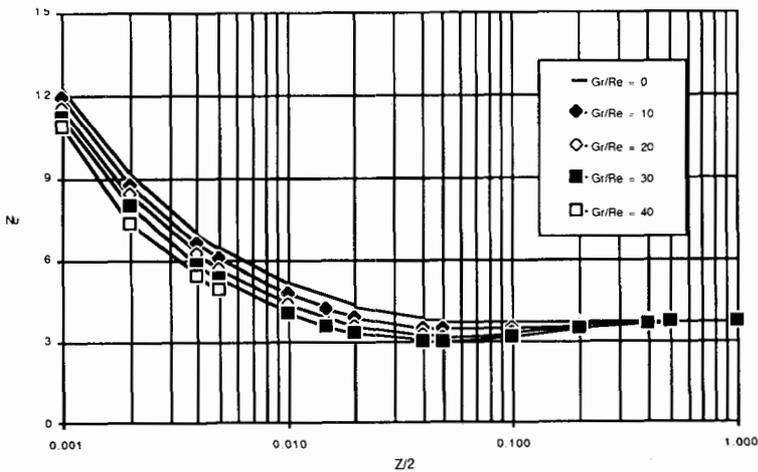


Figura 10. Variación del número de Nusselt local.

La distorsión del campo de velocidad ocasionada por el incremento del parámetro Gr/Re se traduce igualmente a las distribuciones de temperatura volumétrica media y de Nusselt local en las Figuras 9 y 10. A medida que Gr/Re aumenta, las curvas de θ_b (cantidad térmica global) tienden a desplazarse gradualmente hacia arriba. Este enfriamiento es menos efectivo y se debe a las bajas velocidades en la región cercana a la pared. En términos cuantitativos, la desviación $\Delta\theta_b$ se duplica en $Z = 0.1$ con respecto a su valor en la estación $Z = 0.01$. El examen de la Figura 10, en términos del número de

Nusselt local (cantidad térmica local), como coordenada es análogo al de la Figura 9 en donde la coordenada es una cantidad térmica global, o sea la temperatura volumétrica media. Asimismo, se puede observar una palpable disminución de la transmisión de calor total para el mismo tamaño de la zona de intercambio térmico Z . Al contrario, para $Gr/Re = 30$, Nu adquiere un valor asintótico de 3.66. Este patrón cóncavo lo describen todas las curvas de Nu vs. Z .

El caso de flujo ascendente con calentamiento ($Gr/Re < 0$) se ilustra en el grupo de Figuras 11–15 en las cuales se evidencia un comportamiento totalmente opuesto al del caso anterior. En la Figura 11, la velocidad en el centro del tubo aumenta para valores bajos de Gr/Re hasta una posición axial en donde la fuerza de flotación es mayor que el gradiente de presión. Esto origina un decremento de la velocidad hasta alcanzar un valor mínimo. La curva correspondiente a $Gr/Re = -60$ desciende hasta casi cero en el entorno de $Z = 0.02$. Posteriormente, el grupo de velocidades axiales experimenta un crecimiento hasta empalmar con su valor asintótico de 2, correspondiente a la situación del cociente $|Gr/Re|$, la fuerza de flotación alcanza valores muy superiores al gradiente de presión lo que provoca una inversión del perfil de velocidad en el centro de la tubería para $Gr/Re = -70$ en $Z = 0.025$ aproximadamente.

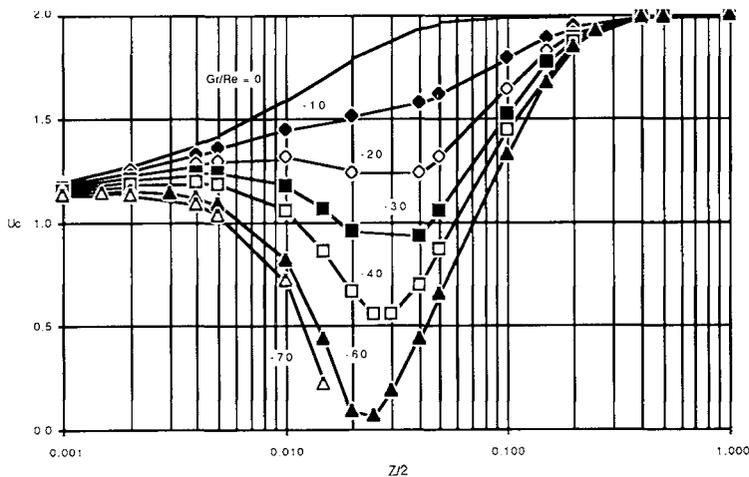


Figura 11. Desarrollo de la velocidad en el centro.

Conviene señalar que el comportamiento de la velocidad en el centro del tubo trae como consecuencia un aumento de la velocidad axial en la región cercana a la pared de éste. Este efecto compensatorio ocasiona así un aumento del gradiente de presión local a medida que crece el parámetro $|Gr/Re|$, lo cual se manifiesta en la Figura 12. Este aumento drástico del gradiente de presión redundaría lógicamente en un aumento del coeficiente de fricción. Como consecuencia directa de la distorsión del campo hidrodinámico, la transmisión de calor total se ve afectada también, lo que se evidencia en las Figuras 14 y 15, respectivamente. Las curvas de temperatura descienden gradualmente con pendiente mayor, hecho que se manifiesta también en la Figura 15 pero la trayectoria de las curvas de Nu es más abrupta, en particular

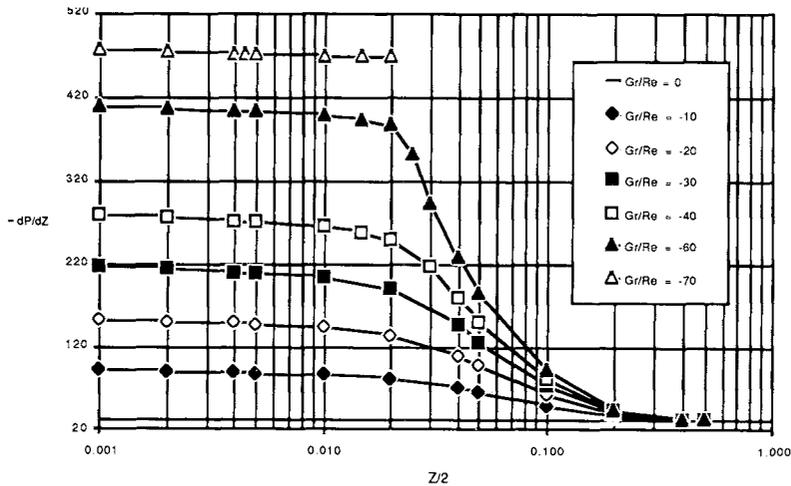
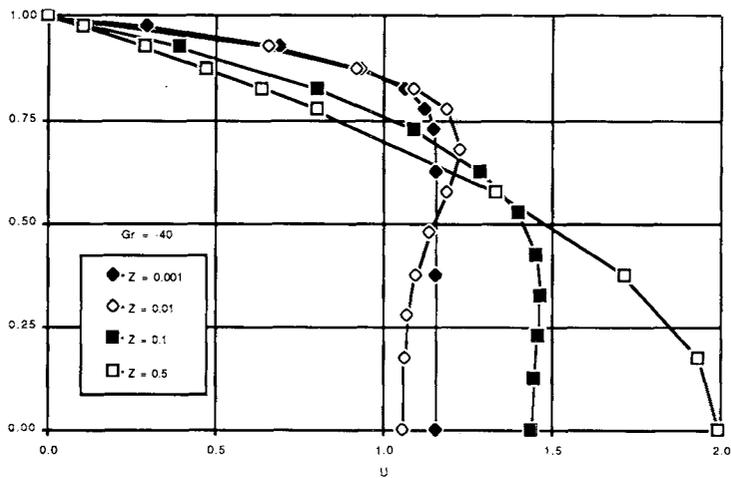


Figura 12. Variación del gradiente de presión.

Figura 13. Distribución de la velocidad axial ($Gr/Re = -60$).

para $Gr/Re = -60$. Aquí la curva posee un pico en $Z = 0.04$. Para esta estación, el desarrollo axial de la velocidad se puede visualizar en la Figura 13, notándose las grandes pendientes de U en la proximidad de la pared del tubo.

Por otro lado, vale la pena destacar que el patrón de las curvas de θ_b vs. Z en las Figuras 9 y 14 en forma de abanico facilita vincularlas a la ecuación (25) con el propósito de calcular directamente el calor total transmitido en un tramo de tubo. Esto demuestra que el cálculo del número de Nusselt es totalmente innecesario.

A manera de validar los resultados hallados, en la Tabla II se comparan los puntos de inversión del campo de velocidad axial con los resultados reportados por Campo y Pérez¹¹ usando MOL para $Pr = 0.7$. Aquí se puede corroborar una buena concordancia entre los mismos, aunque sólo se reportan dos comparaciones. Por otro lado, se debe recalcar que la predicción del punto de inversión representa una medida global de la

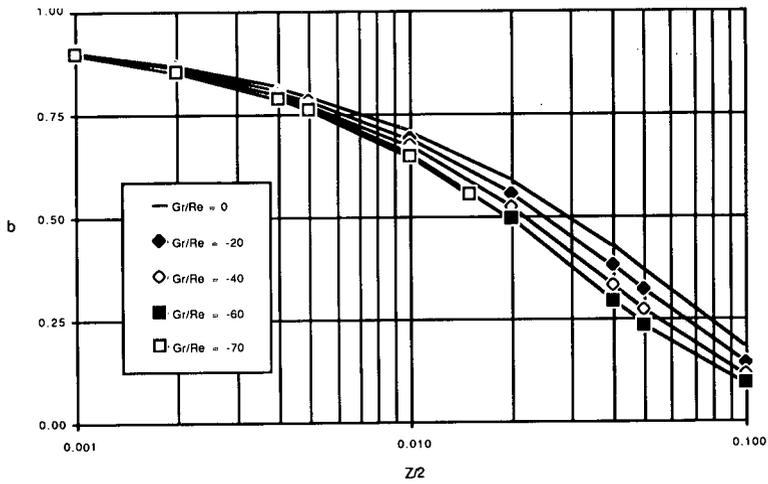


Figura 14. Desarrollo de la temperatura volumétrica media.

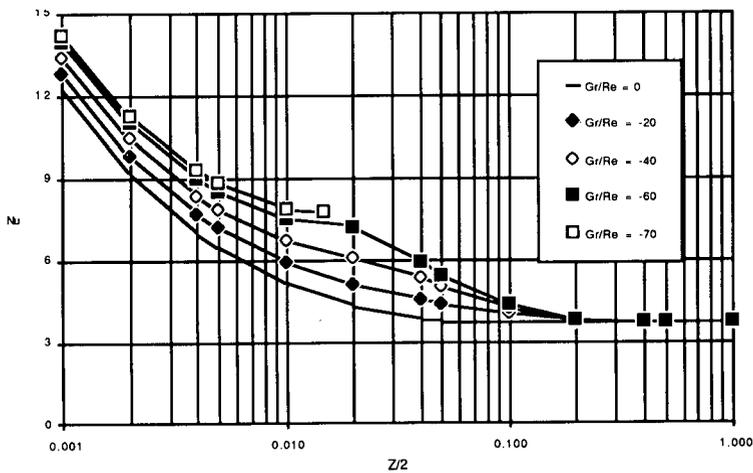


Figura 15. Variación del número de Nusselt local.

Este trabajo		Campo y Pérez ¹¹	
Gr/Re	Z	Gr/Re	Z
+46.5	0.0053	+36.5	0.0043
-65.0	0.0036	-65.0	0.0034

Tabla II. Valores críticos de Gr/Re .

capacidad predictiva del modelo matemático (parabólico) y del algoritmo de solución numérica utilizados en este trabajo.

NOMENCLATURA

A	área seccional del tubo
c_p	calor específico a presión constante
g	aceleración de la gravedad
Gr	número de Grashof
k	conductividad térmica
\dot{m}	flujo másico
Nu	número de Nusselt
NV	número de volúmenes de control
p	presión
p_d	presión dinámica
p_o	presión a la entrada
Pr	número de Prandtl
q_w	densidad del flujo de calor en la pared
Q_T	calor total transmitido
Q_j	calor ideal transmitido
r	coordenada radial
r_o	radio del tubo
R	coordenada radial adimensional
Re	número de Reynolds
T	temperatura
T_o	temperatura a la entrada
T_w	temperatura de la pared del tubo
u	velocidad axial
u_m	velocidad axial media
$[BU$	velocidad axial adimensional
$v \diamond [B$	velocidad radial
V	velocidad radial adimensional
z	coordenada axial
Z	coordenada axial adimensional

Letras griegas

β	coeficiente de expansión térmica
θ	temperatura adimensional
μ	viscosidad dinámica
ρ	densidad

Subíndices

b	volumétrica media
o	entrada
P	nodo característico del volumen de control
w	pared del tubo

REFERENCIAS

1. B. Gebhart et al., "Bouyancy-Induced Flows and Transport", *Hemisphere*, Washington D.C., USA, (1988).
2. R.K. Shah y A.L. London, "Laminar Flow Forced Convection in Ducts", Academic, New York, USA, (1978).
3. R.C. Martinelli y L.M. Boelter, "The analytical prediction of superimposed free and forced viscous convection in a vertical pipe", University of California Publications, Vol. 5, pp. 23, Berkeley, California, USA, (1942).
4. R.L. Pigford, "Nonisothermal flow and heat transfer inside vertical tubes", Chemical Engineering Progress Symposium Series, Vol. 17, pp. 79, (1955).
5. T.W. Jackson, W.B. Harrison y W.C. Boteler, "Combined free and forced convection in a constant temperature vertical tube", *Trans. ASME* 80, pp. 739, (1958).
6. E.M. Rosen y T.J. Hanratty, "Use of boundary layer theory to predict the effect of heat transfer on the laminar-flow field in a vertical tube with a constant-temperature wall", *AICHE J.*, Vol. 7, pp. 112, (1961).
7. B. Zeldin y F.W. Schmidt, "Developing flow with combined forced-free convection in a isothermal vertical tube", *J. Heat Transfer* 94, pp. 211, (1972).
8. W.J. Marner y H.K. McMillan, "Combined free and forced laminar convection in a vertical tube with constant wall temperature", *J. Heat Transfer* 92, pp. 559, (1970).
9. M.W. Collins, "Finite-difference analysis for developing laminar flow in circular tubes applied to forced and combined convection", *Int. J. Num. Methods in Engng.*, Vol. 15, pp. 381, (1980).
10. M.A. Shadday, "Combined forced-free convection through vertical tubes at high Grashof numbers", *International Heat Transfer Conference*, pp. 1433, San Francisco, California, USA, (1986).
11. A. Campo y C. Pérez, "Efecto simultáneo de la convección forzada y natural de un flujo laminar en tuberías verticales", *Informe Técnico 85/09*, Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela, (1985).
12. S.V. Patankar y D.B. Spalding, "A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 1787, (1972).
13. G.D. Raithby y G.E. Schneider, "Numerical solution of problems in incompressible fluid flow: treatment of the velocity-pressure coupling", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 2, pp. 417, (1979).
14. S.V. Patankar, "Numerical Heat and Fluid Flow", *Hemisphere*, Washington D.C., USA, (1980).
15. W.R. Briley, "Numerical method for predicting three-dimensional steady viscous flow in ducts", *J. Comp. Physics*, Vol. 14, pp. 8, (1974).
16. R.W. Hornbeck, "An all-numerical method for heat transfer in the inlet of a tube", *ASME Paper 65-WA/HT-36*, (1965).
17. J. Liu, "Flow of Bingham fluid in the entrance region of an annular tube", *M.Sc. Thesis*, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, USA, (1974).
18. R. Manohar, "Analysis of laminar-flow heat transfer in the entrance region of a circular tube", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 122, pp. 15, (1969).