Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 6, 3, 397–407(1990)

SOLUCION DE PROBLEMAS DE CONTORNO PARA ECUACIONES EN DIFERENCIAS MATRICIALES DE SEGUNDO ORDEN

L. JODAR
y
J.L. MORERA

Departamento de Matemática Aplicada,
Universidad Politécnica de Valencia,
Apdo. 22.012,
Valencia.

RESUMEN

En este artículo se estudian condiciones de existencia de solución de problemas de contorno para ecuaciones matriciales de segundo orden. Mediante la solución de una ecuación algebraica matricial asociada al problema de contorno, obtenemos una expresión de la solución general del problema, computable en términos de los datos y sin aumentar la dimensión del problema.

SUMMARY

In this paper boundary value problems for second order matrix difference equations are considered. Existence conditions for the solutions of the problem as well as an explicit expression of the general solution of the problem, are given in terms of a solution of an algebraic matrix equation related to the problem. Our method provides an expression of the solutions of the problem avoiding the increase of the dimension of the problem.

INTRODUCCION

El objetivo de este artículo es el estudio de condicones de existencia y la obtención explícita de las mismas para problemas de contorno relacionados con ecuaciones de diferencias del tipo

$$\begin{aligned} &Y_{2+n} + A_1 Y_{1+n} + A_0 Y_n = \tilde{F}_n \\ &E_1 Y_0 + E_2 Y_1 + E_3 Y_{N-1} + E_4 Y_N = G \\ &F_1 Y_0 + F_2 Y_1 + F_3 Y_{N-1} + F_4 Y_N = H \quad , \quad 0 \leq n \leq N-2 \end{aligned} \tag{1}$$

donde$A_0, A_1, G; H, \tilde{F}_n, E_i, F_i$, para $0 \leq n \leq N-2$, $1 \leq i \leq 4$ y la incógnita Y_n son matrices cuadradas con coeficientes complejos, elementos de $\mathbb{C}_{p \times p}$.

Recibido: Diciembre 1988

Sistemas del tipo (1) aparecen, por ejemplo, en la representación de modelos discretos relacionados con economía, biología y sociología[2,3]. El estudio de sistemas controlados por ordenador conduce de manera natural a otra clase de modelos discretos del tipo (1)[4,9]. Además de estos problemas donde los sistemas del tipo (1) describen el problema original a resolver, el estudio de dichos sistemas surgen como recurso numérico en la resolución de sistemas diferenciales continuos cuando éstos son aproximados por las correspondientes ecuaciones en diferencias. Así por ejemplo, ésta es frecuentemente aplicada en simulación digital[8].

En el estudio de sistemas vibratorios[10], problemas térmicos y mecánicos[7], y cuando se consideran sistemas con parámetros distribuidos descritos por ecuaciones en derivadas parciales[1], aparecen frecuentemente sistemas continuos del tipo

$$\begin{aligned} &Y^{(2)}(t) + A_1Y^{(1)}(t) + A_0Y(t) = F(t) \\ &C_1Y(a) + C_2Y^{(1)}(a) + C_3Y(b) + C_4Y^{(1)}(b) = C_5 \ , \\ &D_1Y(a) + D_2Y^{(1)}(a) + D_3Y(b) + D_4Y^{(1)}(b) = D_5 \quad , a \le t \le b \end{aligned} \tag{2}$$

si dividimos el intervalo $[a, b]$ en N partes iguales por los puntos $t_0, t_1, \cdots, t_N$ con $t_0 = a$, $t_N = b$, y sustituimos en (2) la derivada $Y^{(j)}(t_n)$ de la incógnita continua $Y(t)$ en t_n, por la diferencia $\Delta^j Y(t_n)/(\Delta t)^j$, para $0 \le j \le 2$, se obtienen descritos del tipo (1), véase [12, p.205].

Problemas de condiciones iniciales para la ecuación en diferencias

$$Y_{2+n} + A_1Y_{1+n} + A_0Y_n = F_n \quad , \quad n \ge 0 \tag{3}$$

han sido estudiadas en [11], pero la expresión obtenida en dicho artículo, para la solución general de (3) tiene el inconveniente numérico del aumento de la dimensión del problema y su inconveniencia para tratar problemas de contorno del tipo (1).

El artículo está organizado como sigue. En primer lugar obtendremos una representación de la solución general de (3) en términos de una solución invertible X_0 de la ecuación algebraica matricial

$$Z^2 + A_1Z + A_0 = 0 \tag{4}$$

y de los parámetros matriciales libres, que permitirán caracterizar la existencia de la solución de (1) y la obtención explícita de las mismas, cuando la ecuación algebraica (4) admite invertible X_0. La expresión obtenida para las soluciones de (1) está expresada en términos de la dimensión de los datos.

Si A es una matriz en $\mathbb{C}_{p\times p}$, denotaremos por $\sigma(A)$ el conjuntos de los valores propios de A. Para una matriz rectangular S en $\mathbb{C}_{p\times p}$, denotaremos por S^+ su inversa Moore-Penrose, y recordaremos que métodos efectivos para el cálculo de S^+ pueden encontrarse en [5, p.12].

SOBRE LA SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION EN DIFERENCIAS MATRICIAL (3)

Puesto que nuestro trabajo está basado en la existencia de una solución invertible de la ecuación algebraica (4), recordemos un método eficaz para la obtención de tal solución cuando existe:

•**Teorema 1.** [ref. 10, p.49, ref. 6, p.836]

Dada la ecuación (4) donde A_0, A_2 son elementos de $\mathbb{C}_{p\times p}$, consideremos la matriz polinomial $L(z) = z^2 I + A_1 z + A_0$. Si $L(z)$ tiene p vectores latentes a la derecha $b_1, \cdots b_p$, linealmente independientes, correspondientes a las raices latentes $\rho_1, \cdots, \rho_p$, entonces, si $Q = [b_1, \cdots, b_p]$, y $D = \operatorname{diag}(\rho_1, \cdots, \rho_p)$, resulta que $X = QDQ^{-1}$ es una solución de (4).

Nótese que en particular, si las raices latentes ρ_i, son distintas de cero, entonces la solución X suministrada por el teorema 1 es invertible.

Supongamos por momento que X_0 es una solución invertible de la ecuación algebraica matricial (4). Entonces, es claro, que para cualquier matriz C de $\mathbb{C}_{p\times p}$, la sucesión $Y_{n,1} = X_0^n C$, es una solución de la ecuación matricial en diferencias homogénea

$$Y_{2+n} + A_1 Y_{1+n} + A_0 Y_n = 0 \quad , \quad n \geq 0 \tag{5}$$

A continuación intentaremos obtener otra solución $\{Y_{n.2}\}$ de la forma

$$Y_{n,2} = X_0^n C_n \tag{6}$$

donde C_n, para $n \geq 0$, son matrices a determinar, de modo que $\{Y_{n,2}\}$ satisface la ecuación de diferencias (5). Consideramos las siguientes expresiones de $Y_{n+1,2}$ y de $Y_{n+2,2}$:

$$\begin{aligned} Y_{n+1,2} &= X_0^{n+1} C_n + X_0^{n+1}(C_{n+1} - C_n) \\ Y_{n+2,2} &= X_0^{n+2} C_{n+2} = X_0^{n+2} C_n + X_0^{n+2}(C_{n+1} - C_n) + X_0^{n+2}(C_{n+2} - C_{n+1}) \end{aligned} \tag{7}$$

Imponiendo que $\{Y_{n,2}\}$, definida por (6) satisface la ecuación (5), y teniendo en cuenta (7), resulta que las matrices C_n han de verificar

$$\begin{aligned} & Y_{n+2,2} + A_1 Y_{n+1,2} + A_0 Y_{n,2} = X_0^{n+2} C_n + X_0^{n+2}(C_{n+1} - C_n) + \\ & + X_0^{n+2}(C_{n+2} - C_{n+1}) + A_1[X_0^{n+1} C_n + X_0^{n+1}(C_{n+1} - C_n)] + A_0 X_0^n C_n = \\ & = (X_0^2 + A_1 X_0 + A_0) X_0^n C_n + X_0^{n+2}(C_{n+1} - C_n) + \\ & + X_0^{n+2}(C_{n+2} - C_{n+1}) + A_1 X_0^{n+1}(C_{n+1} - C_n) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Como X_0 es una solución de (4), si llamamos

$$R_n = X_0^{n+1}(C_{n+1} - C_n) \quad , \quad n \geq 0 \tag{9}$$

de (8) se sigue que $Y_{n,2}$ definida (6), es solución de (5), si sólo si, R_n definida por (9), satisface

$$R_{n+1} + (X_0 + A_1)R_n = 0 \quad , \quad n \geq 0 \tag{10}$$

Resolviendo (10), tenemos que

$$R_n = (-1)^n (X_0 + A_1)^n R_0 \quad , \quad n \geq 0$$

De aquí, de (9) de la invertibilidad de X_0, se sigue que

$$C_n = C_0 + X_0^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-X_0)^{-(k-1)} (X_0 + A_1)^{k-1} R_0 \quad , \quad n \geq 1 \tag{11}$$

Tomando $C_0 = 0$, $R_0 = I$ tenemos que

$$C_n = X_0^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} X_0^{1-k} (X_0 + A_1)^{k-1} \quad , \quad n \geq 1 \tag{12}$$

en consecuencia hemos obtenido la siguiente expresión para $Y_{n,2}$:

$$Y_{n,2} = X_0^n C_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} X_0^{n-k} (X_0 + A_1)^{k-1} \quad , \quad Y_{0,2} = 0 \tag{13}$$

De aquí el siguiente resultado queda demostrado:

•Teorema 2.

Sea X_0 una solución invertible de la ecuación algebráica (4), entonces $Y_{n,1} = X_0^n$, $Y_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} X_0^{n-k} (X_0 + A_1)^{k-1}$, definen un par de soluciones de (5), satisfaciendo $Y_{0,1} = I$, $Y_{1,1} = X_0$, $Y_{0,2} = 0$, $Y_{1,2} = I$.

Sea C la matriz por bloques definida por

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

y suponemos que C es invertible. Sea $\{Y_{n,1}\}$, $\{Y_{n,2}\}$ un par de soluciones de la ecuación homogénea (5) y sea $\{W_n\}$ definida por

$$W_n = \begin{bmatrix} Y_{n,1} & Y_{n,2} \\ Y_{n+1,1} & Y_{n+1,2} \end{bmatrix} \tag{15}$$

entonces es inmediato comprobar que

$$W_{n+1} = CW_n \quad , \quad n \geq 0 \tag{16}$$

W_n es invertible si y sólo si, W_0 es invertible, porque

$$W_n = C^n W_0 \tag{17}$$

De aquí y del teorema 2, se deduce el siguiente resultado.

–Corolario 1.

Supongamos que la matriz C definida por (14) es invertible, y sea X_0 una solución invertible de (4). Entonces la sucesión de matrices $\{W_n\}$ definida por (15) es invertible para todo $n \geq 0$.

Nota 1. Bajo la hipótesis de la matriz C por (14), en virtud de [6], cualquier solución X_0 de (4) es invertible porque los valores propios de X_0 son también valores propios de C. En consecuencia, no necesitamos añadir la hipótesis de invertibilidad de X_0.

A continuación estamos interesados en la obtención de la solución general de la ecuación homogénea (5), en términos de las dos soluciones particulares $\{Y_{n,1}\}$ $\{Y_{n,2}\}$ suministradas por el teorema 2. Supongamos que buscamos una solución $\{Y_n\}$ de (5), tal que $Y_0 = C_0$, $Y_1 = C_1$. Entonces, sean matrices P, Q en $\mathbb{C}_{p\times P}$, y consideramos la sucesión de matrices $\{z_n\}_{n\geq 1}$ definida por

$$Z_n = Y_{n,1}P + Y_{n,2}Q \quad , \quad n \geq 0 \tag{18}$$

exigiendo que $Z_0 = C_0$, $Z_1 = C_1$, resulta que las matrices P, Q, han de verificar

$$\begin{bmatrix} Y_{0,1} & Y_{0,2} \\ Y_{1,1} & Y_{1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix},$$

es decir

$$W_0 \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Resolviendo (19) y teniendo en cuenta el teorema 2, resulta que

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = (W_0)^{-1} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X_0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 - X_0 C_0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Tomando estos valores de P, Q, en la expresión (18), se sigue que la correspondiente sucesión $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ satisface las mismas condicones iniciales que la sucesión $\{Y_n\}$ de partida. Por otra parte, es claro, que tomando matrices cualesquiera P, Q, en el segundo miembro de (18), se obtiene una solución de (5). En consecuencia, hemos demostrado el siguiente corolario:

–Corolario 2.

Supongamos que X_0 es una solución invertible de (4) y sean $\{Y_{n,1}\}$, $\{Y_{n,2}\}$, definidas en el teorema 2. Entonces la solución general de la ecuación en diferencias (5) viene dada por (18), donde P, Q, son matrices arbitrarias en $\mathbb{C}_{p\times p}$.

A continuación desrrollaremos un método de variación de los parámetros matricial discreto para obtener la solución general de la ecuación de diferencias no-homogénea (3), en términos de una solución invertible de (4), lo que nos permitirá resolver dicha ecuación sin aumentar la dimensión del problema.

Supongamos que X_0 es una solución invertible de (4), y sean $\{Y_{n,1}\}$, $\{Y_{n,2}\}$ el par de soluciones de (5) definido en el teorema 2. Ahora, ensayamos posibles soluciones de la ecuación no-homogénea (3), de la forma

$$Y_n = Y_{n,1}P_n + Y_{n,2}Q_n \quad , \quad n \geq 0 \tag{21}$$

donde P_n, Q_n, son matrices en $\mathbb{C}_{p\times P}$, que eligiremos de manera que (21) satisfaga la ecuación (3).

Sean S_n, T_n las sucesiones de matrices definidas por

$$S_n = P_{n+1} - P_n \quad ; \quad T_n = Q_{n+1} - Q_n \quad , \quad n \geq 0 \tag{22}$$

y supongamos por un momento que podemos encontrar matrices S_n, T_n, tales que

$$W_{n+1} = \begin{bmatrix} S_n \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{F}_n \end{bmatrix} \quad , \quad n \geq 0 \tag{23}$$

donde $\{W_n\}$ viene definido por (15). Ahora si suponemos que la matriz C definida por (14) es invertible, entonces, por el corolario 1, para todo $n \geq 0$, la matriz W_n es invertible, ya que $W_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_0 & I \end{bmatrix}$ es invertible. Además de (17) se sigue que la única solución $\begin{bmatrix} S_n \\ T_n \end{bmatrix}$ de (23) viene dada por

$$\begin{bmatrix} S_n \\ T_n \end{bmatrix} = (W_{n+1})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{F}_n \end{bmatrix} = (W_0)^{-1} C^{-(n-1)} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{F}_n \end{bmatrix} \quad , \quad n \geq 0 \tag{24}$$

Si denotamos las potencias i-ésimas de C^{-i} en la forma

$$C^{-i} = \begin{bmatrix} * & C_{2,i} \\ * & C_{4,i} \end{bmatrix} \quad i \geq 1 \tag{25}$$

entonces de (24) y (25) se sigue que

$$S_n = C_{2,n+1} F_n \quad ; \quad T_n = (-X_0 C_{2,n+1} + C_{4,n+1}) \tilde{F}_n \quad , \quad n \geq 0 \tag{26}$$

Veamos que si P_n, Q_n, satisfacen (22), entonces $\{Y_n\}$, definida por (21) Satisface la ecuación (3). Nótese que de (22) y (23) se sigue que las matrices P_n, Q_n, satisfacen

$$\left.\begin{aligned} Y_{n+1,1}(P_{n+1} - P_n) + Y_{n+1,2}(Q_{n+1} - Q_n) &= 0 \\ Y_{n+2,1}(P_{n+1} - P_n) + Y_{n+2,2}(Q_{n+1} - Q_n) &= \tilde{F}_n \end{aligned}\right\} \quad (n \geq 0) \tag{27}$$

Teniendo en cuenta (27) y el hecho de que $\{Y_{n,1}\}$, $\{Y_{n,2}\}$ satisfacen la ecuación homogénea (5) se sigue que Y_n definida por (21) satisface

$$\begin{aligned} & Y_{n+2} + A_1 Y_{n+1} + A_0 Y_n = \\ &= (Y_{n+2,1}P_{n+2} + Y_{n+2,2}Q_{n+2}) + A_1(Y_{n+1,1}P_{n+1} + \\ &+ Y_{n+1,2}Q_{n+1}) + A_0(Y_{n,1}P_n + Y_{n,2}Q_n) \\ &= (Y_{n+2,1}P_{n+1} + Y_{n+2,2}Q_{n+1}) + A_1(Y_{n+1,1}P_n + \\ &+ Y_{n+1,2}Q_n) + A_0(Y_{n,1}P_n + Y_{n,2}Q_n) \\ &= F_n + (Y_{n+2,1} + A_1 Y_{n+1,1} + A_0 Y_{n,1})P_n + \\ &+ (Y_{n+2,2} + A_1 Y_{n+1,2} + A_0 Y_{n,2})Q_n = F_n \quad , \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Finalmente, puesto que S_n, T_n, están determinadas por (26), de (22) se sigue que

$$P_{n+1} = P_0 + \sum_{i=0}^{n} S_i \quad ; \quad Q_{n+1} = Q_0 + \sum_{i=0}^{n} T_i \quad , \quad n \geq 0 \tag{28}$$

De aquí y de (26) obtenemos

$$P_n = P_0 + \sum_{i=0}^{n-1} C_{2,i+1}\tilde{F}_i \quad ; \quad Q_n = Q_0 + \sum_{i=0}^{n-1}(C_{4,i+1} - X_0C_{2,i+1})\tilde{F}_i \quad , \quad (n \geq 1) \tag{29}$$

donde P_0, Q_0 son matrices arbitrarias en $\mathbb{C}_{p\times P}$.
El siguiente resultado queda demostrado.

•Teorema 3.

Supongamos que la matriz C definida por (14) es invertible y sea X_0 una solución invertible de la ecuación algebraica (4). Entonces la solución general de la ecuación en diferencias (3), viene dada por (21) donde P_n, Q_n están definidas por (29), P_0, Q_0 son matrices arbitrarias en $\mathbb{C}_{p\times p}$ y las matrices $C_{j,i}$ quedan determinadas por (25) para $j = 2, 4; i \geq 1$.

SOLUCION DEL PROBLEMA DE CONTORNO

En esta sección estudiaremos bajo qué condiciones el problema de contorno en diferencias (1) admite solución y obtendremos una expresión explícita en forma cerrada para la solución general de (1), sin aumentar la dimensión del problema original.

Supongamos que X_0 es una solución invertible de (4) y que la matriz C dada por (14) es invertible. Nótese que la solución general de (3) puede escribirse en la forma

$$Y_n = Y_{n,1}P_0 + Y_{n,2}Q_0 + L_n \quad , \quad L_n = \sum_{i=0}^{n-1} \{Y_{n,1}C_{2,i+1} + Y_{n,2}(C_{4,i+1} - X_0C_{2,i+1})\}\tilde{F}_i \tag{30}$$

para $n \geq 1$, donde $\{Y_{n,1}\}$, $\{Y_{n,2}\}$ están definidas en el teorema 2. Imponiendo a la expresión (30) que satisfaga las condiciones de contorno de (1), resulta que las matrices libre P_0, Q_0, han de verificar

$$S\begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ H_1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

donde $S = (S_{i,j})$, $1 \leq i, j \leq 2$, es la matriz por bloques definida por

$$
\begin{aligned}
S_{11} &= E_1 Y_{0,1} + E_2 Y_{1,1} + E_3 Y_{N-1,1} + E_4 Y_{N,1} = \\
&= E_1 + E_2 X_0 + E_3 X_0^{N-1} + E_4 X_0^N \\
S_{21} &= F_1 Y_{0,1} + F_2 Y_{1,1} + F_3 Y_{N-1,1} + F_4 Y_{N,1} = \\
&= F_1 + F_2 X_0 + F_3 X_0^{N-1} + F_4 X_0^N \\
S_{12} &= E_1 Y_{0,2} + E_2 Y_{1,2} + E_3 Y_{N-1,2} + E_4 Y_{N,2} = \\
&= E_2 + (E_3 + E_4 X_0) \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{k-1} X_0^{N-1-k} (X_0 + A_1)^{k-1} \right\} + \\
&+ (-1)^{N-1} E_4 (X_0 + A_1)^{N-1} \\
S_{22} &= F_1 Y_{0,2} + F_2 Y_{1,2} + F_3 Y_{N-1,2} + F_4 Y_{N,2} = \\
&= F_2 + (F_3 + F_4 X_0) \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{k-1} X_0^{N-1-k} (X_0 + A_1)^{k-1} \right\} + \\
&+ (-1)^{N-1} F_4 (X_0 + A_1)^{N-1}
\end{aligned} \tag{32}
$$

$$
G_1 = G - E_2 L_1 - E_3 L_{N-1} - E_4 L_N \quad ; \quad H_1 = H - F_2 L_1 - F_3 L_{N-1} - F_4 L_N \tag{33}
$$

y las matrices L_n viene definidas por (30). En virtud del teorema 3, se sigue que el problema de contorno (1) admite solución, si y sólo si, el sistema algebraico (31) admite solución. Ahora, en virtud del Teorema 2.3.2. de [13, p. 24], el sistema (31) admite solución si y sólo si se satisface la relación

$$
S S^+ \begin{bmatrix} G_1 \\ H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ H_1 \end{bmatrix} \tag{34}
$$

Además en este caso, la solución general de (31) viene dada por

$$
\begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = S^+ \begin{bmatrix} G_1 \\ H_1 \end{bmatrix} + (I - S^+ S) Z \ , \tag{35}
$$

donde I es la matriz identidad en $\mathbb{C}_{2p \times 2p}$ y Z es una matriz arbitraria en $\mathbb{C}_{2p \times p}$. De aquí queda demostrado el siguiente teorema:

•Teorema 4.

Supongamos que la matriz C definida por (14) es invertible y sea X_0 una solución invertible de (4). Sea la S la matriz por bloques definida por (32) y sean G_1, H_1 las matrices definidas por (33). Si $\{Y_{n,1}\}$, $\{Y_{n,2}\}$, son las sucesiones definidas en el teorema 2, se verifica que

(i) El problema de contorno (i) admite solución, si sólo si, se satisface la condición (34). En este caso, la solución general de (1) viene dada por (21) donde P_0, Q_0 están definidos por (35), y Z es una matriz arbitaria en $\mathbb{C}_{p \times p}$.

(ii) El problema (1) admite solución única, si y sólo si, la matriz S es invertible, en cuyo caso, la única solución viene dada por (21) con

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ H_1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

El siguiente ejemplo ilustra el método desarrollado para resolver problemas de contorno del tipo (1).

Ejemplo

Consideremos el problema de contorno en diferencias (1) correspondiente a los datos $N = 4$ y

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \; ; \; A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \; ; \; E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ E_3 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ F_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; F_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con

$$\tilde{F}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{para } n \geq 0$$

Aplicando el teorema 1, obtenemos una solución invertible X_0 de la ecuación algebraica (4), que en este caso podemos tomar $X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Es fácil comprobar que en nuestro caso la matriz C definida por (14) es invertible. Teniendo en cuenta los datos, la matriz S definida por (32) toma la forma

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 80 & -95 & 270 \\ 2 & 83 & -95 & 270 \\ 2 & 32 & -32 & 71 \\ 0 & -27 & 66 & -167 \end{bmatrix}$$

y las matrices G_1, H_1 que aparecen en (31) toman la forma

$$G_1 = \begin{bmatrix} 20'9946 & 0 \\ 10'0184 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; H_1 = \begin{bmatrix} 31'7327 & 2 \\ 18'7832 & 3 \end{bmatrix}$$

como la matriz S es invertible, por el teorema 4, el problema de contorno (1) en nuestro caso, admite una única solución Y_n definida por

$$Y_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^n P_0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{n-k} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}^{k-1} Q_0 + L_n \quad , \quad 1 \leq n \leq 4$$

donde

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66'1563 & -2'2484 \\ -3'6587 & -0'3333 \\ -4'4449 & -0'2365 \\ -2'2357 & -0'1653 \end{bmatrix}$$

y L_n viene definido por (30) donde

$$Y_{n.1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^n \quad ; \quad Y_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{n-k} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}^{k-1}$$

y las matrices $C_{2,j}$, $C_{4,j}$, para $j = 0, 1, 2, 3, 4$ toman la forma

$$C_{2,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C_{4,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C_{2,1} = \begin{bmatrix} -0.5833 & 0,5 \\ -0.0833 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C_{4,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{2,2} = \begin{bmatrix} -0.8402 & 0.7916 \\ -0.0902 & 0.0416 \end{bmatrix} \quad , \quad C_{4,2} = \begin{bmatrix} -0.5833 & 0.5 \\ -0.0833 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{2,3} = \begin{bmatrix} -0.9307 & 0.9201 \\ -0.0665 & 0.0451 \end{bmatrix} \quad , \quad C_{4,3} = \begin{bmatrix} -0.8402 & 0.7916 \\ -0.0902 & 0.0416 \end{bmatrix}$$

$$C_{2,4} = \begin{bmatrix} -0.9792 & 0.9707 \\ -0.0417 & 0.0333 \end{bmatrix} \quad , \quad C_{4,4} = \begin{bmatrix} -0.9415 & 0.9201 \\ -0.0665 & 0.0451 \end{bmatrix}$$

Con esto queda determinada la única solución de nuestro problema de contorno.

CONCLUSIONES

En este artículo resolvemos problemas de contorno para ecuaciones en diferencias matriciales de segundo orden, obteniendo una solución explícita de los mismos, previo análisis de su existencia y expresada en términos de las dimensiones de los datos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente realizado con la ayuda de la Dirección General Científica y Técnica, D.G.I.C.Y.T. proyecto PS87-0064.

REFERENCIAS

1. M.J. Balas, "Trends in large Space Structure Theory: Fondest Hopes, Wildest Dreams", *IEE Trans. Autom. Control*, Vol. **AC-27**, pp. 522–535, (1982).
2. A.B. Bishop, *"Introduction a Discrete Linear Control: Theory and Applications"*, Academic Press, New York, (1975).
3. J.A Cadzow, *"Discrete Time Systems: An Introducction with Interdisciplinary Applications"*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, (1973).

4. J.A Cadzow, y H.R. Martens, "*Discrete-Time and Computer Control Systems*", Englewood Cliffs, Prentice Hall, (1970).
5. S.L. Campell y C.D. Meyer Jr., "*Generalized Inverses of Linear Transfomations*", Pitman, London, (1979).
6. J.E. Dennis Jr., J.F. Traub y R.P. Weber, "The algebraic theory of matrix polynomials", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **13**, pp. 831–845, (1976).
7. R.C. Dorf, "*Modern Control Systems*", Second Ed., Addison-Wesley, Reading, MA, (1974).
8. F.B. Hildebrand, "*Finite Difference Equations and Simulations*", Englewood Cliffs, Prentice Hall, (1968).
9. B.C. Kuo, "*Digital Control Systems*", Champaign: SRL Publg. Co., (1977).
10. P. Lancaster, "*Lambda-Matrices and Vibrating Systems*", Pergamon, Oxford, (1966).
11. P. Lancaster, " A fundamental theorem on lambda matrices II. Difference equations with constante coefficients", "*Linear Algebra and its Applications*", Vol. **18**. pp. 213–256, (1977).
12. E.L. Ince, "*Ordinary Differential Equations*", Dover, New York, (1927).
13. C.R. Rao y S.K. Mitra, "*Generalized Inverses of Matrices and its Applications*", John-Wiley, New York, (1971).