

## PROPAGACION DE GRIETAS EN MATERIALES ORTOTROPOS MEDIANTE EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

M. DOBLARE  
F. ESPIGA  
L. GRACIA  
y  
M. ALCANTUD

*Departamento de Ingeniería Mecánica,  
E.T.S.I.I., Universidad de Zaragoza,  
María de Luna, 3,  
50015 Zaragoza.*

### RESUMEN

Se presenta en este trabajo la aplicación del Metodo de los Elementos de Contorno (M.E.C.) a la determinación de factores de intensidad de tensiones (F.I.T.) y la predicción del ángulo de propagación de grietas en materiales ortótropos. El programa incluye elementos lineales, cuadráticos y elementos singulares para reproducir el estado tensional de bordes de grieta. Se sigue un proceso de subregionalización con cada uno de los labios de grieta en una subregión distinta, lo que evita la singularidad derivada de nudos dobles. Se estudian y comparan distintos métodos para la evaluación del F.I.T. y se obtiene el valor de los mismos en distintos casos de interés. Se utiliza el método de la tensión circunferencial máxima para la determinación del ángulo de propagación y se realiza el seguimiento de este ángulo en un caso específico.

### SUMMARY

The application of the Boundary Element Method (BEM) to the computation of the stress intensity factors (SIF) and the crack propagation angle in orthotropic materials is the aim of this paper. The computer program includes isoparametric linear, quadratic and quarter-point-traction-singular elements in order to obtain the stress distribution around the crack edges. A multidomain approach is followed in order to avoid the geometrical singularity that appears in the double-node method. Different methods to compute the SIF are compared and several SIFs computed for some cases. Finally, the maximum circunferencial stress approach is used to obtain the crack propagation angle in a mixed-mode propagation problem in an orthotropic material.

Recibido: Noviembre 1988

## INTRODUCCION

La utilización creciente de materiales con importante grado de anisotropía, ya sea como consecuencia de su estructura como hormigón, madera, rocas o laminados de fibra, o como consecuencia del proceso de fabricación como ocurre en ciertos procesos de estirado o laminación ha hecho necesaria la aplicación de las teorías de Mecánica de Fractura en general, y en particular del caso elástico lineal (MFEL) a este tipo de materiales, con objeto de predecir la posible propagación de grietas y la velocidad de la misma en caso de cargas alternantes, por ejemplo.

Por otro lado, es también cierto que en materiales isótropos el mayor esfuerzo de la MFEL ha ido encaminado a problemas de propagación en un solo modo, mientras que en materiales anisótropos la consideración de la aparición de modos de fractura mixtos es determinante. El problema es considerablemente más complicado que el correspondiente a materiales isótropos, aún restringiendo el caso a materiales ortótropos ya que es necesario estudiar la influencia del ángulo formado por las direcciones principales de ortotropía con la dirección de la grieta y la carga aplicada.

Referente a la descripción del comportamiento de materiales ortótropos existen textos clásicos en el tema como [24], mientras que en el contexto específico de la MFEL podemos citar a [14] y [20] entre otros. La expresión del campo tensional en el entorno de un borde de grieta de un material ortótropo puede encontrarse por ejemplo en [23] con bibliografía adicional.

En mecánica de Fractura Elástica, el parámetro más utilizado para la determinación de la vida a fatiga o del carácter estable o inestable de un proceso de carga monótono es el factor de intensidad de tensiones. Existen textos enteros dedicados a presentar valores de este parámetro en distintas situaciones<sup>30</sup>, pero salvo casos muy simples en los que es posible encontrar expresiones analíticas del F.I.T., se hace necesaria la aplicación de métodos numéricos para la evaluación del mismo. El M.E.F. ha sido aplicado con profusión al caso de materiales isótropos y algo menos al caso de ortótropos<sup>3,6,31,32</sup>. Sin embargo se han hecho cada vez más evidentes las ventajas del M.E.C. en problemas con concentraciones de tensiones y más concretamente en problemas con singularidades tales como los que ocurren en el campo de la MEFL.

Una extensa revisión sobre los resultados conseguidos por este método en este campo puede encontrarse en [36] con múltiples referencias. Sin embargo, no se ha considerado todavía con profundidad la extensión de este método a materiales ortótropos. Este trabajo tiene por objetivo pues la determinación de los parámetros determinantes del comportamiento en MEFL, singularmente el F.I.T. para materiales ortótropos en problemas planos sometidos a cualquier tipo de carga sobre el contorno.

En primer lugar se realiza una breve revisión de los conceptos de la teoría de propagación de grietas en materiales ortótropos con referencias específicas. A continuación se revisa la formulación del M.E.C. en problemas multidominio como el aquí empleado para salvar la singularidad geométrica que supone la discontinuidad de una grieta en un material. Se detallan asimismo los métodos más utilizados en él para la determinación del F.I.Ts. Finalmente se abordan una serie de casos en los que se determinan estos parámetros comparándolos con resultados análogos conseguidos con elementos finitos, finalizando con el estudio de un problema específico de propagación

de grietas, todo ello en materiales ortótropos.

**CAMPO DE TENSIONES EN EL ENTORNO DEL EXTREMO DE GRIETA Y LA CARACTERIZACION DE LA TENACIDAD A FRACTURA EN UN MATERIAL ANISOTROPO**

Es sabido que la relación de comportamiento en un material ortótropo en dos dimensiones puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

con los coeficientes  $A_{ij}$

$$A_{11} = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} \quad A_{12} = \frac{\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} \quad A_{22} = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \quad A_{33} = G_{xy} \quad (2)$$

que cumplen además

$$\nu_x \cdot E_y = \nu_y \cdot E_x \quad \frac{1}{G} = \frac{4}{E_{45}} - \frac{1 - 2\nu_x}{E_x} - \frac{1}{E_y} \quad (3)$$

con  $E_{45}$  el módulo de tracción a 45° de los ejes principales de ortotropía, que se han considerado los  $x, y$ . Los coeficientes  $B_{ij}$  pueden obtenerse fácilmente a partir de los anteriores.

La expresión del campo de tensiones en el entorno del extremo de una grieta para el caso anisótropo general puede encontrarse por ejemplo en [23] y para el caso de carga simétrica y antisimétrica respecto del plano de la grieta, en [23] ó [28]. La reducción al caso ortótropo queda como:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)} \frac{s_2}{\Psi_2^{1/2}} - \frac{s_1}{\Psi_1^{1/2}} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(s_1 - s_2)} \frac{s_2^2}{\Psi_2^{1/2}} - \frac{s_1^2}{\Psi_1^{1/2}} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(s_1 - s_2)} \frac{s_1}{\Psi_2^{1/2}} - \frac{s_2}{\Psi_1^{1/2}} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(s_1 - s_2)} \frac{1}{\Psi_2^{1/2}} - \frac{1}{\Psi_1^{1/2}} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)} \frac{s_2}{\Psi_1^{1/2}} - \frac{1}{\Psi_2^{1/2}} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(s_1 - s_2)} \frac{s_1}{\Psi_2^{1/2}} - \frac{s_2}{\Psi_1^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

con  $\Psi_i = \cos \theta + s_i \operatorname{sen} \theta$  y  $r, \theta$  se definen en la Figura 1 y  $s_i$  son las raíces de la ecuación característica del material

$$B_{11} s^4 + (2B_{12} + B_{33})s^2 + B_{22} = 0 \quad (5)$$

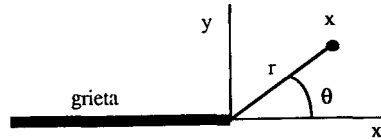


Figura 1. Coordenadas polares en extremo de grieta.

Se observa pues que, al igual que el caso isótropo, la singularidad es de orden  $-1/2$  y que los parámetros que determinan la amplitud de esta singularidad son de nuevo los factores de intensidad de tensiones en modo *I* y *II* respectivamente. Es de resaltar que en las expresiones (4) se supone que el plano de grieta coincide con el plano *xz* de ortotropía. En caso de que la grieta formase un ángulo con el eje *x*, habría que modificar las constantes  $B_{ij}$  a los nuevos ejes de la grieta y trabajar con ellos con lo que ahora los elementos  $B_{13}$  y  $B_{23}$  de la matriz de flexibilidad no serían nulos y la ecuación (5) se modificaría, pasando a la forma general para materiales anisótropos<sup>23</sup>. En definitiva se observa que el orden de la singularidad es el mismo que en el caso isótropo, pero la magnitud de la tensión y la distribución espacial se encuentra controlada no sólo por los FITs, como en el material isótropo, sino también por las propiedades del material y el ángulo que forma la grieta respecto de los ejes de ortotropía.

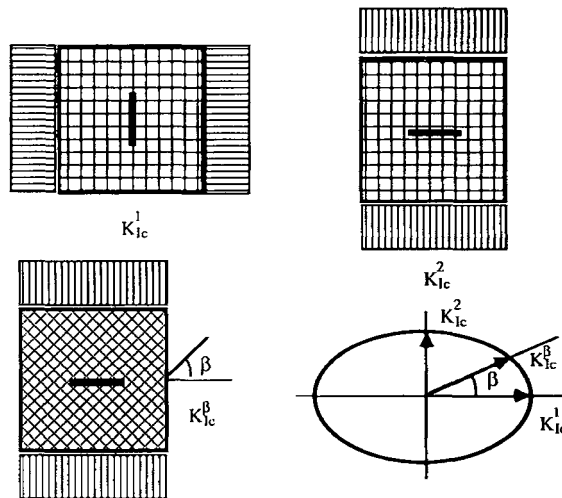


Figura 2. Tenacidad a fractura en una dirección cualquiera.

En cuanto a la tenacidad a fractura, también es muy conocido<sup>28</sup> que es necesario más de un parámetro para caracterizar a un material anisótropo, al contrario que un isótropo. En caso de ortotropía todavía es necesario más de un parámetro, pero este número puede reducirse a tan sólo dos,  $K_{Ic}^1$  y  $K_{Ic}^2$  si se asume que la tenacidad a fractura tiene un carácter tensorial, de forma que la tenacidad en cualquier dirección  $\beta$  (Figura 2) puede expresarse en función de las dos tenacidades principales como

$$K_{IC}^\beta = K_{IC}^1 \cdot \cos^2 \beta + K_{IC}^2 \cdot \sin^2 \beta \tag{6}$$

A veces se utiliza la relación aproximada

$$K_{IC}^1 = K_{IC}^2 \cdot \frac{E_2}{E_1} \tag{7}$$

que permite caracterizar el material con un solo parámetro.

### FORMULACION DEL M.E.C. EN ELASTICIDAD LINEAL 2-D EN PROBLEMAS MULTIDOMINIO

La ecuación de partida del M.E.C., en su formulación directa es la conocida identidad de Somigliana<sup>8</sup>, que expresa el vector de desplazamiento  $u_i(Q)$  en un punto  $Q$  de un dominio  $\Omega$  como una función de los desplazamientos  $u_i(P)$  y las tensiones  $t_i(P)$  en los puntos de contorno de dicho dominio, y de las fuerzas por unidad de volumen  $X_i$ :

$$C_{ik} u_i(Q) = \int_{\delta\Omega} U_{ik}(Q, P) t_i(P) d\delta\Omega - \int_{\delta\Omega} T_{ik}(Q, P) u_i(P) d\delta\Omega + \int_{\Omega} U_{ik}(Q, P) X_i(P) d\Omega \tag{8}$$

donde  $U_{ik}$  es la solución fundamental de la ecuación de Navier,  $T_{ik}$  son las tensiones correspondientes a dicha solución fundamental, que vienen dadas en el apéndice para el ortótropo, y  $C_{ik}$  viene dado por[12]:

$$C_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & Q \in \Omega \\ C'_{ik} & Q \in \delta\Omega \\ 0 & Q \in \Omega \cup \delta\Omega \end{cases} \tag{9a}$$

con:

$$C'_{ik} = \frac{1}{\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 2(1-\nu)(\pi + \alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{2}(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) & \sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_2 \\ \sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_2 & 2(1-\nu)(\pi + \alpha_1 - \alpha_2) - \frac{1}{2}(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) \end{bmatrix} \tag{9b}$$

para materiales isotropos, donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  tiene el significado de la Figura 3,  $\delta_{ik}$  es la delta de Kronecker,  $r$  el radio vector que une el punto  $P$  y el  $Q$ ,  $n$  la normal exterior al contorno del punto  $P$ ,  $G$  el módulo de rigidez y  $\nu$  el coeficiente de Poisson [en el caso de tensión plana este valor ha de modificarse en la forma conocida  $\nu^* = \nu/(1 + \nu)$ ]

Bajo determinadas condiciones<sup>12</sup>, la integral del dominio de (8) puede expresarse como suma de dos integrales de contorno, con lo que es posible conocer los desplazamientos de cualquier punto del dominio en función únicamente de integrales de contorno. En este trabajo no se va a contemplar la existencia de fuerzas por unidad

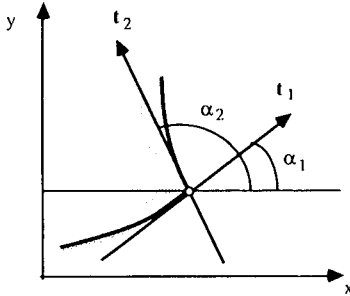


Figura 3. Significado geométrico de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

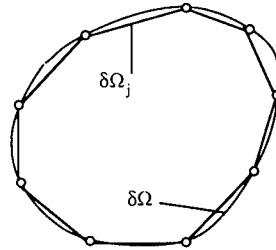


Figura 4. Discretización del contorno.

de volumen, por lo que dicha integral desaparece quedando expresada la ecuación (8) directamente en función de las integrales de contorno.

Si se discretiza el contorno mediante  $N_e$  elementos (Figura 4), y se aproximan en el interior de cada uno de ellos los valores de los desplazamientos y de las tensiones en función de sus valores nodales como:

$$u_i^j = \sum_{k=1}^{N_{nj}} (u_i^j)_k \varphi_k \quad t_i^j = \sum_{k=1}^{N_{nj}} (t_i^j)_k \varphi_k \quad (10)$$

donde  $N_{nj}$  es el número de nudos del elemento  $j$ , y  $\varphi_k$  son las funciones de aproximación para elementos bidimensionales continuos, la ecuación (8) queda como:

$$C_{ik} u_i(Q) = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\delta\Omega_j} U_{ik}(Q, P) \left[ \sum_{m=1}^{N_{nj}} (t_i^j)_m \varphi_m \right] d\delta\Omega_j - \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\delta\Omega_j} T_{ik}(Q, P) \left[ \sum_{m=1}^{N_{nj}} (u_i^j)_m \varphi_m \right] d\delta\Omega_j \quad (11)$$

En el caso, por ejemplo, de elementos lineales (dos nudos por elemento) la ecuación (11) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{N_e} \begin{bmatrix} A_{111}^{kj} & A_{211}^{kj} & A_{112}^{kj} & A_{212}^{kj} \\ A_{121}^{kj} & A_{221}^{kj} & A_{122}^{kj} & A_{222}^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_1^j)_1 \\ (u_1^j)_2 \\ (u_2^j)_1 \\ (u_2^j)_2 \end{bmatrix} = \\ = \sum_{j=1}^{N_e} \begin{bmatrix} B_{111}^{kj} & B_{211}^{kj} & B_{112}^{kj} & B_{212}^{kj} \\ B_{121}^{kj} & B_{221}^{kj} & B_{122}^{kj} & B_{222}^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (t_1^j)_1 \\ (t_1^j)_2 \\ (t_2^j)_1 \\ (t_2^j)_2 \end{bmatrix} \quad (12a) \end{aligned}$$

con

$$A_{imn}^{kj} = \int_{\delta\Omega_j} \varphi_i T_{mn}^{kj} d\delta\Omega_j \quad B_{imn}^{kj} = \int_{\delta\Omega_j} \varphi_i U_{mn}^{kj} d\delta\Omega_j \quad (12b)$$

Si se aplica esta ecuación a cada nudo y se introducen las condiciones de contorno pertinentes, se obtiene un sistema algebraico de  $[2 \sum_j (N n_j - 1)]$  ecuaciones con otras tantas incógnitas, correspondientes a valores de desplazamientos y tensiones en los nodos del contorno<sup>12</sup>. Cuando el nudo en que se aplica la ecuación no coincide con uno de los nudos adyacentes al elemento sobre el que se integra, las integrales de (12) se evalúan mediante una cuadratura de Gauss estándar. En cambio, cuando se integra desde un nudo sobre los elementos adyacentes, se producen singularidades en las integrales de (12). En este caso, las constantes  $B$  se evalúan con un cuadratura con función de peso logarítmica, mientras que las constantes  $A$ , se evalúan, junto con el término libre, imponiendo desplazamientos como sólido rígido al cuerpo en estudio<sup>12</sup>.

En cada nudo se pueden establecer dos ecuaciones, y existen seis posibles incógnitas, correspondientes a los dos desplazamientos del mismo, y a dos tensiones en el elemento anterior y otras dos en el elemento posterior. En la mayoría de los casos, éstas suelen venir expresadas en coordenadas locales, por lo que es preciso transformar el vector tensión a dichas coordenadas.

Si se plantea las ecuaciones anteriores para cada nudo de cada subregión (es claro que para los nudos de la interfase se plantearán 4 ecuaciones, dos para cada una de las subregiones) y se introducen las condiciones de contorno en el exterior, y de compatibilidad y equilibrio en la interfase, puede llegarse<sup>12</sup> a un sistema algebraico de la forma:

$$K \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (13)$$

en el que las incógnitas pueden corresponder tanto a desplazamientos como a tensiones en el contorno o desplazamientos y tensiones en la interfase. La resolución de dicho sistema puede llevarse a cabo por distintos métodos, dependiendo del tamaño del mismo. En este trabajo se ha seguido un procedimiento de Gauss estándar.

Una vez conocidos los desplazamientos y tensiones en todo el contorno, los desplazamientos en cualquier punto interior pueden obtenerse por medio de (8), y las tensiones a partir de la aplicación del operador tensión a la misma<sup>8</sup>.

El programa que se ha implementado incluye elementos lineales, cuadráticos y elementos con nudo a un cuarto, todos ellos con continuidad en tensiones y desplazamientos, si bien se incluye el chequeo de la existencia de nudos especiales (nudos con exceso o falta de incógnitas) que se tratan en forma análoga a [1]. Las funciones de aproximación para elementos lineales y cuadráticos son bien conocidas<sup>8</sup>, mientras que el caso del elemento singular se estudia en el epígrafe siguiente.

## DETERMINACION DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES

Son múltiples los métodos que existen para determinar el factor de intensidad de tensiones. Una revisión de los mismos para el caso de elementos de contorno puede encontrarse en [36] ó [25]. En este epígrafe nos centraremos en un caso de modo  $I$  en

tensión plana correspondiente a un material isótropo para simplificar (la extensión al modo  $II$  es inmediata, mientras que la obtención de  $K_I$  y  $K_{II}$  en modos mixtos o en materiales ortótropos puede necesitar un tratamiento adicional).

Recordando la definición de factor de intensidad de tensiones para un caso de modo  $I$  que puede obtenerse de forma inmediata de la expresión (5) o bien de la expresión de la distribución de desplazamientos perpendiculares a la dirección de la grieta (que consideraremos coincide con el eje  $x$ ) se tiene

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_y \sqrt{2\pi r} \quad \text{o bien} \quad K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{G}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} u_y \quad (14)$$

Una primera forma de evaluar  $K_I$  sería aplicar de forma literal la expresión (14) y obtenerlo por exploración de los valores del segundo miembro de cualquiera de las dos expresiones de (14). El inconveniente de este método radica en la necesidad de disponer una discretización muy fina en las cercanías del borde de grieta para reproducir suficientemente bien el gradiente de tensiones tan fuerte que se produce. Este problema no es tan importante si se utiliza la expresión en desplazamientos, pero de cualquier forma los valores de estos quedan relativamente falseados en las proximidades del borde de grieta en el M.E.C. al utilizar como variables incógnitas también las tensiones, salvo que de nuevo se disponga una malla suficientemente fina.

Una segunda posibilidad es utilizar la expresión de la integral  $J$  de Rice, bien conocida en Mecánica de la Fractura Elastoplástica, que coincide en el caso de la MEFL con la velocidad de energía libre disipada y cuya expresión viene dada por

$$J = \int_S W \, dy - T \frac{\partial u_x}{\partial x} \, ds = \frac{K_I^2}{E} \quad (15)$$

con  $W$  la energía de deformación por unidad de volumen,  $T$  el vector tensión y  $S$  cualquier trayectoria que rodee al borde de grieta al ser una integral independiente del camino. Este método no necesita una discretización tan fuerte y es mucho más preciso, pero por el contrario implica la necesidad de evaluar una integral, generalmente con trayectoria en el interior del dominio, lo que no suele ser muy eficiente en el M.E.C.

La tercera posibilidad estriba en la utilización de los elementos que incorporen en la distribución de desplazamientos y tensiones de carácter inherente al tipo de singularidad que aparece en el borde de la grieta. Este tipo de elementos no son más que elementos rectos de aproximación cuadrática degenerados en los que el nudo central se dispone a una distancia de  $1/4$  de la longitud del elemento respecto del extremo singular que se dispone en el borde de la grieta. Con ello puede demostrarse ([25] por ejemplo) que esta disposición y la realización de la transformación estándar a coordenadas naturales (Figura 5) es equivalente a utilizar una aproximación de desplazamientos en el interior del elemento del tipo:

$$u_i = \dot{u}_i^1 + (4u_i^2 - u_i^3 - 3u_i^1) \sqrt{\frac{r}{l}} + (2u_i^1 + 2u_i^3 - 4u_i^2) \frac{r}{l} \quad (16)$$

que incluye de forma automática la variación del tipo  $\sqrt{r}$  que se produce en el extremo de una grieta. Asimismo, si se utiliza una aproximación singular para las tensiones en la forma:



$$t_i = \bar{t}_i^1 \phi^1 \sqrt{\frac{l}{t}} + \bar{t}_i^2 \phi^2 \sqrt{\frac{l}{t}} + \bar{t}_i^3 \phi^3 \sqrt{\frac{l}{t}} \tag{17}$$

con  $\phi^i$  las funciones de forma estándar para elementos cuadráticos y  $\bar{t}_i^j$  los valores nodales de  $t_i$  divididos por los valores nodales de  $\phi^i$ .  $\sqrt{l/r}$ , puede demostrarse que es equivalente a considerar una aproximación del tipo

$$= t_i K \sqrt{\frac{l}{r}} + (2t_i^2 - 3K - 3t_i^3) + (2t_i^3 - 2t_i^2 + 2K) \sqrt{\frac{r}{l}} \quad \text{con} \quad K = \lim_{r \rightarrow 0} t_i \sqrt{\frac{r}{l}} \tag{18}$$

que corresponde la variación del tipo  $1/\sqrt{r}$ , como la solución analítica en borde de grieta.

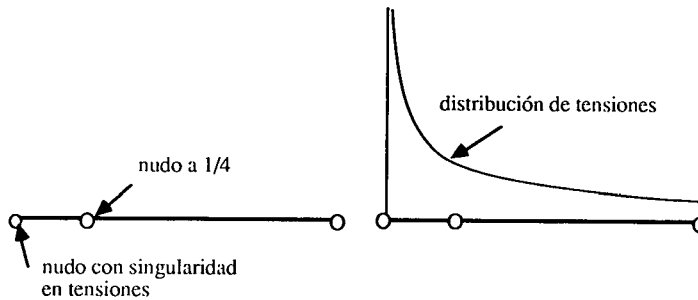


Figura 5. Elemento singular.

Con lo anterior, es evidente que la expresión de  $K$  permite obtener los valores del factor de intensidad de modo  $I$  para  $t_i$ ; la tensión normal y el modo  $II$  para  $t_i$ ; la tensión tangencial, sin más que multiplicar el valor  $K$  correspondiente (valor nodal como resultado de la resolución del problema en el extremo singular) por  $\sqrt{2\pi l}$ . Para ello, la única consideración que ha de realizarse es que los resultados de  $t_i$  se obtengan en ejes locales (normal-tangencial), es decir

$$K_I = t_i^k \sqrt{2\pi l} \tag{19}$$

Naturalmente también es posible obtener  $K_I$  a partir de los desplazamientos obtenidos en los nudos del elemento singular. Así, en tensión plana se tienen las dos siguientes expresiones

$$K_I = \frac{G}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} (4u_y^{k-1} - u_y^{k-2})(1-\nu^2) \tag{20}$$

$$K_I = \frac{G}{1-\nu} (1-\nu^2) \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \cdot u_y^{k-1} \tag{21}$$

es de esperar que (20) sea más precisa que (21) al incorporar dos valores de desplazamientos para la determinación de  $K_I$ . Una comparación entre estas tres últimas formas de determinar el FIT (19)(20) y (21) pueden encontrarse en [25].

Las expresiones anteriores son asimismo válidas para materiales ortótropos con grieta coincidente con uno de los ejes principales de ortotropía y cargada simétricamente, por lo que se ha utilizado un ejemplo de este tipo para comparación entre los distintos métodos. En la Figura 6 se muestra una placa otótropa en estas condiciones

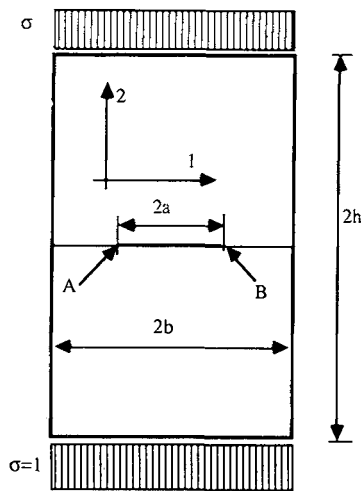


Figura 6. Grieta central sometida a tracción

Aplicando simetría puede reducirse el modelo a la mitad. En primer lugar se estudia el caso ortótropo habiéndose realizado cuatro discretizaciones distintas que se muestran en la Figura 7, donde los nudos en negro indican extremo de los elementos y los blancos los nudos intermedios de elementos cuadráticos o singulares en ambos lados del extremo de la grieta.

En la Tabla I se muestran los resultados del factor de intensidad de tensiones obtenidos para el caso  $a/b = 0.5$  y se comparan con el valor dado por Tada (entre paréntesis se muestra la diferencia en % con ese valor). Se denota en dicha Tabla por  $K_j$  el valor obtenido con la expresión (19) con  $K_{u1}$  el obtenido con la (21) con  $K_{u2}$  con la (20) y con  $K_{J1}$  y  $K_{J2}$  los obtenidos aplicando la expresión (15) para el recorrido 1 de la Figura 7 con 15 y 21 puntos respectivamente, mientras que  $K_{J2}$  y  $K_{J4}$  corresponden a la aplicación de nuevo de (15) sobre el recorrido 2 de la Figura 7 asimismo con 15 y 21 puntos.

En la Tabla I se observa que evidentemente se reduce el error con una discretización más fina y prácticamente en la totalidad de los casos el método que produce mejores resultados es el correspondiente a la expresión (19).

Una vez analizada la influencia de la malla, y observando que con la malla 3 de la Figura 7, por ejemplo, se consiguen resultados excelentes se pasa a estudiar la influencia

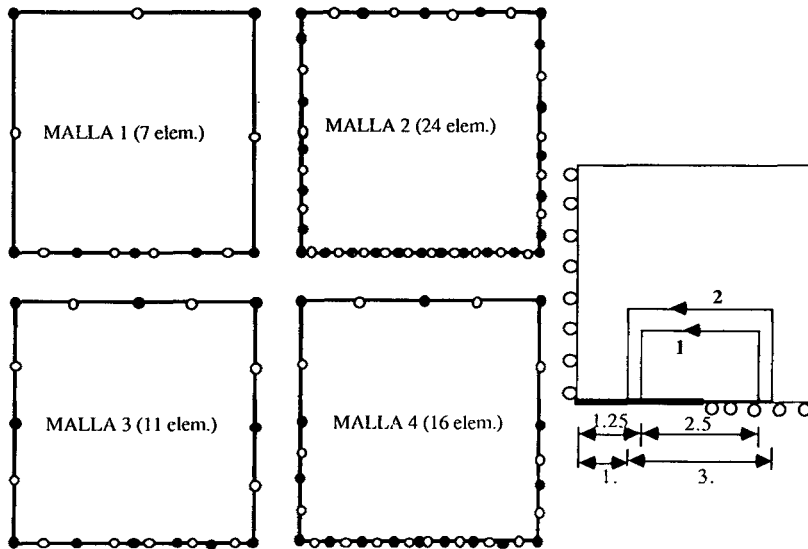


Figura 7. Diferentes discretizaciones utilizadas.

a/b=0.5	$K_I$	$K_{u1}$	$K_{u2}$	$K_{j1}$	$K_{j2}$	$K_{j3}$	$K_{j4}$
MALLA 1 (7 elem.)	3.6664 (-1.99)	3.5721 (-4.51)	3.9018 (4.29)	3.7845 (1.16)	4.3477 (17.48)	3.7215 (-0.52)	3.7183 (-0.6)
MALLA 2 (24 elem.)	3.7384 (-0.07)	3.7206 (-0.54)	3.7741 (0.88)	3.7918 (1.35)	3.7899 (1.3)	3.7897 (1.3)	3.7885 (1.26)
MALLA 3 (11 elem.)	3.7378 (-0.08)	3.7004 (-1.08)	3.8142 (1.95)	3.7898 (1.3)	Tada 3.741		
MALLA 4 (16 elem.)	3.7445 (-0.09)	3.7033 (-1)	3.8131 (1.92)	3.7902 (1.31)			

Tabla I.

de la longitud del elemento singular para distintas longitudes de grieta. En la Tabla II se analiza el mismo ejemplo pero sólo para la malla 3, y se comparan los resultados con los de Tada, de nuevo. Entre paréntesis se incluyen la diferencias entre % con estos últimos resultados observándose que con una malla muy simple se consiguen resultados excelentes, eligiendo adecuadamente la longitud del elemento singular  $L$ .

Finalmente, con el método de cálculo del FIT que produce asimismo los mejores resultados, es decir el correspondiente a la expresión (19) se pasa a estudiar el caso

$a/b$	$a$	$L$	$K_I$ TADA	$K_I$ SG.TR.	$K_I$ 1 DESP	$K_I$ 2 DESP	$K_I$ INT. J
0.1	0.5	0.0625	1.266	1.1434 (9.68)	1.1518 (9.02)	1.1733 (-7.32)	1.3068 (3.22)
		0.125		1.2129 (-4.19)	1.1992 (-5.27)	1.2566 (-0.74)	1.3072 (3.25)
		0.25		1.2522 (-1.09)	1.2037 (-4.92)	1.3312 (5.15)	1.3063 (3.18)
		0.5		1.279 (1.03)	1.1671 (-7.81)	1.4492 (-14.47)	1.1968 (-5.47)
0.3	1.5	0.125	2.442	2.3603 (-3.34)	2.3718 (-2.87)	2.4105 (-1.28)	2.5287 (3.55)
		0.25		2.4182 (-0.97)	2.3977 (-1.81)	2.4759 (1.38)	2.5081 (2.7)
		0.5		2.4451 (0.12)	2.3826 (-2.43)	2.5416 (4.07)	2.4596 (0.72)
0.5	2.5	0.125	3.741	3.663 (-2.08)	3.688 (-1.41)	3.7277 (-0.35)	3.8043 (1.69)
		0.25		3.7175 (-0.62)	3.7119 (-0.77)	3.7743 (0.89)	3.7994 (1.56)
		0.5		3.7378 (-0.08)	3.7004 (-1.08)	3.8142 (1.95)	3.6584 (-2.2)
0.7	3.5	0.125	5.538	5.4786 (-1.07)	5.5125 (-0.46)	5.5568 (0.33)	5.507 (-0.56)
		0.25		5.5023 (-0.64)	5.5153 (-0.4)	5.5578 (0.35)	5.5332 (-0.08)
		0.5		5.4958 (-0.76)	5.501 (0.66)	5.5591 (0.38)	5.5849 (-0.84)

Tabla II.

ortótropo para esta misma placa. Los resultados se presentan en la Tabla III en función de distintas longitudes de grieta y de elementos singulares y para distintas características del material, representadas por los parámetros  $\beta_1$  y  $\beta_2$

$$\beta_1\beta_2 = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/2} \quad \beta_1 + \beta_2 = \sqrt{2} \left\{ \left(\frac{E_1}{E_2}\right) + \frac{E_1}{2G_{12}} - \nu_{12} \right\}^{1/2} \quad (22)$$

introducidos por Bowie y Freese<sup>7</sup> con quien se comparan los resultados, observándose de nuevo mínimas discrepancias, a pesar de lo grosero de la discretización. Asimismo se aprecia que en general es necesaria una determinada longitud de los elementos singulares para resultados más precisos, no consiguiéndose estos por una discretización más fina.

Una vez demostrada la validez del M.E.C. para la determinación de factores de intensidad de tensiones en materiales ortótropos pasamos a estudiar un segundo caso

$a/b$	$a$	$L$	Bowie/ Freese	$K_1$	$\beta_1$	$\beta_2^2$	Dif.%
0.1	0.5	0.0625	1.266	1.1377	1.	2.5	-10.1
		0.125		1.2033			- 4.95
		0.25		1.2385			- 2.17
		0.5		1.2544			- 0.95
0.3	1.5	0.125	2.344	2.2656	1.	2.5	-3.34
		0.25		2.3179			-1.11
		0.5		2.3401			-0.16
		0.5	2.323	2.3136	1.	3.5	-0.4
		0.5	2.323	2.2973	1.	4.5	-1.1
0.5	2.5	0.125	3.475	3.4423	1.	2.5	-0.94
		0.25		3.4426			-0.93
		0.5		3.4601			-0.42
		0.5	3.419	3.403	1.	3.5	-0.46
		0.5	3.363	3.3717	1.	4.5	0.25
0.7	3.5	0.125	5.073	5.067	1.	2.5	-0.6
		0.25		5.0682			-0.09
		0.5		5.067			-0.11
		0.25	4.974	4.9871	1.	3.5	0.26
		0.25	4.941	4.9447	1.	4.5	0.07

Tabla III.

que corresponde a una placa con doble grieta en los extremos, tal como se muestra en la Figura 8.

Los ejes de ortotropía en este caso forman un ángulo de 45° con la dirección de la grieta por lo que, aunque la carga es simétrica respecto a la grieta, aparece un modo mixto de fractura. Resultados para distintas longitudes de grieta en un material de características

$$E_1 = 25000 \quad E_2 = 1750 \quad G_{12} = 750 \quad \nu_{12} = 0.27 \quad K_\infty = \sigma\sqrt{\pi a}$$

se muestran en la Tabla IV y en la Figura 9. Se presentan los FITs para las dos grietas y se compara con los obtenidos por Boone et al° mediante elementos finitos para una de ellas. El valor  $a$  corresponde a las longitud de cada una de las grietas  $L$  a la longitud del elemento singular utilizado.

Es de resaltar la buena concordancia entre ambos con una discretización mucho más simple en el caso presente que la utilizada en [6]. Asimismo se corroboran los resultados de Boone que en su artículo presentaban algunas discrepancias con los presentados previamente por Atluri et al³.

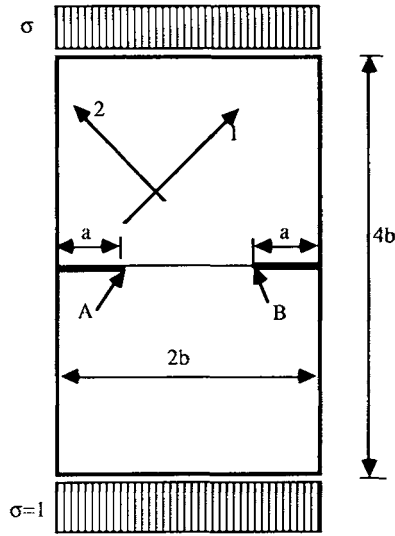


Figura 8. Doble Grieta extrema sometida a tracción.

$a$	$L$	$t_I$	$t_{II}$	$K_I$	$K_I/K_\infty$	$K_{II}/K_I$	$K_I/K_\infty$ (Boone)	$K_{II}/K_I$ (Boone)
0.1	0.05	1.296	0.272	0.726	1.296	0.21	1.291	0.24
		1.305	0.258	0.73	1.305	0.198		
0.2	0.05	1.872	0.485	1.041	1.323	0.259	1.291	0.24
		1.918	0.502	1.075	1.356	0.262		
0.2	0.1	1.330	0.350	1.054	1.330	0.263	1.3175	0.25
		1.361	0.359	1.079	1.361	0.263		
0.3	0.1	1.623	0.383	1.289	1.326	0.236	1.35	0.245
		1.617	0.376	1.282	1.320	0.233		
0.4	0.1	1.960	0.444	1.554	1.386	0.227	1.416	0.24
		1.960	0.440	1.554	1.386	0.227		
0.6	0.1	2.524	0.415	2.000	1.457	0.164	1.464	0.18
		2.512	0.407	1.991	1.450	0.162		
0.8	0.05	4.588	0.183	2.571	1.622	0.04	1.589	0.09
		4.736	0.263	2.655	1.674	0.055		

Tabla IV.

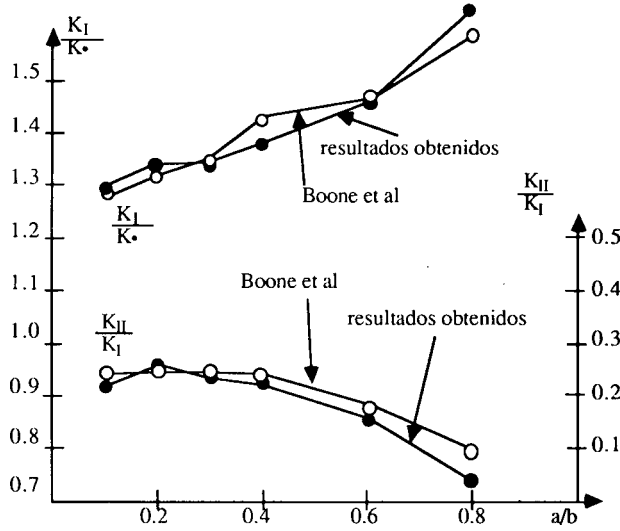


Figura 9. Resultados obtenidos para material ortótropo.

**PROPAGACION DE GRIETAS EN MATERIALES ORTOTROPOS**

Entre la multitud de modelos propuestos para el establecimiento de criterios de propagación de grietas en materiales isotrópos, una revisión de los cuales puede encontrarse en [28] dos de ellos aparecen como más adecuados para su extensión a materiales anisótropos; el criterio de la tensión circunferencial máxima de Erdogan y Sih<sup>15</sup>, y el criterio de la mínima densidad de energía de deformación de Sih<sup>33,34</sup>. En este trabajo se utiliza el primero de ellos por su simplicidad y por ser en este momento quizás el más utilizado por su simple extensión a materiales anisótropos.

Se define la tensión circunferencial máxima para materiales isotrópos  $\sigma_\theta^{max}$ , como

$$\sigma_\theta^{max} = \max_\theta (\sigma_x \text{sen}^2 \theta + \sigma_y \text{cos}^2 \theta - 2\tau_{xy} \text{sen} \theta \text{cos} \theta) \tag{23}$$

El criterio de la tensión circunferencial máxima supone que la grieta progresa en la dirección en la que se alcanza (23) y la tensión tangencial es nula.

Combinando (4b) y (23) puede extenderse este modelo a materiales anisótropos en modo mixto quedando <sup>28</sup>, por ejemplo,

$$\sigma_\theta^{max} = \max_\theta \left( \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \text{Re}[A(s_1 B - s_2 C)] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \text{Re}[A(B - C)] \right) \tag{24}$$

con

$$A = \frac{1}{s_1 - s_2} \quad B = (s_2 \text{sen} \theta + \text{cos} \theta)^{3/2} \quad C = (s_1 \text{sen} \theta + \text{cos} \theta)^{3/2} \tag{25}$$

Mientras que para el caso isotrópico el ángulo de propagación se obtiene sin más que maximizar la expresión (23), ha de seguirse un procedimiento distinto para el caso anisótropo, donde la tenacidad a fractura puede asimismo ser un tensor variable con  $\theta$ , tal como se expresó en (6). En este caso, el criterio se expresa en la forma

$$\max_{\theta} \left( \frac{1}{K_{Ic}^1 \cos^2 \theta + K_{Ic}^2 \sin^2 \theta} \{ K_I \operatorname{Re}[A(s_1 B - s_2 C)] + K_{II} \operatorname{Re}[A(B - C)] \} \right) \quad (26)$$

o su equivalente

$$\max_{\theta} \frac{\operatorname{Re}[A(s_1 B - s_2 C)] + \frac{K_{II}}{K_I} \operatorname{Re}[A(B - C)]}{\cos^2 \theta + \frac{K_{Ic}^1}{K_{Ic}^2} \sin^2 \theta} \quad (27)$$

Se determina el ángulo que maximiza (27) y si el valor de (26) es superior a 1, la grieta se propagará en esa dirección.

Este algoritmo se ha incluido como postprocesador en el programa de elementos de contorno, de tal forma que puede detectarse este ángulo y con ello modificar la longitud de grieta y la malla en la forma establecida "a priori".

Finalmente, es de resaltar la indeterminación que ocurre en (27) si se pretende extender al caso isótropo, siendo necesario volver a (23) o deshacer tal indeterminación mediante la regla de L'Hopital.

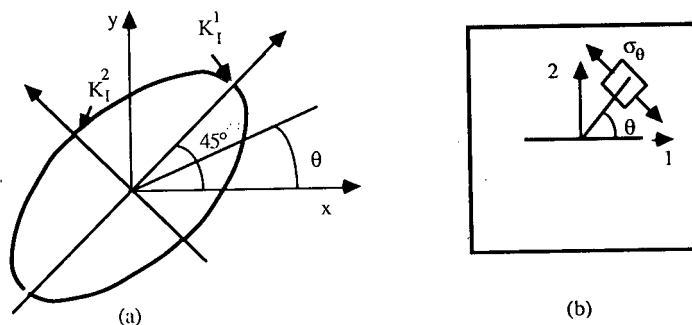


Figura 10. Variación de la tenacidad a fractura.

Se presenta el caso de propagación de una placa rectangular como la mostrada en la Figura 11 con una grieta formando un ángulo de  $-45^\circ$  con el eje 1 de ortotropía, y de longitud inicial  $a_{ini} = 0.1$  con las siguientes características del material

$$E_1 = 25000 \quad E_2 = 1750 \quad G_{12} = 770 \quad \nu_{12} = 0.27$$

La relación  $K_{Ic}^1/K_{Ic}^2 = 0.5$ , con variación tensorial (6) de la tenacidad a fractura con el ángulo (Figura 10). Se ha estudiado la variación del ángulo de propagación con dos incrementos distintos de la longitud de grieta  $\Delta a = 0.1$  y  $\Delta a = 0.05$ . Los resultados correspondientes al primer caso son los siguientes:

a) Paso 1:

Longitud de grieta = 0.1; longitud del elemento singular  $l = 0.025$ ; Angulo inicial de grieta =  $-45^\circ$



Resultados  $t_I = 1.8654$ ;  $t_{II} = -0.38088$ ;  $K_{II}/K_I = -0.204181$   
 Angulo de propagación respecto de la grieta=  $-32^\circ$

b) Paso 2:

Longitud de grieta= 0.2; longitud del elemento singular  $l = 0.08$ ; Angulo inicial de la grieta=  $-77^\circ$

Resultados  $t_I = 0.65169$ ;  $t_{II} = -0.43911$ ;  $K_{II}/K_I = -0.6738$   
 Angulo de propagación respecto de la grieta=  $11^\circ$

c) Paso 3:

Longitud de grieta= 0.3; longitud del elemento singular  $l = 0.0767$ ; Angulo inicial de la grieta=  $-66^\circ$

Resultados  $t_I = 2.1242$ ;  $t_{II} = -0.045989$ ;  $K_{II}/K_I = -0.02165$   
 Angulo de propagación respecto de la grieta=  $-14^\circ$

d) Paso 4:

Longitud de grieta= 0.4; longitud del elemento singular  $l = 0.07934$ ; Angulo inicial de la grieta=  $-80^\circ$

Resultados  $t_I = 2.3871$ ;  $t_{II} = 0.4762$ ;  $K_{II}/K_I = 0.199497$   
 Angulo de propagación respecto de la grieta=  $-1^\circ$

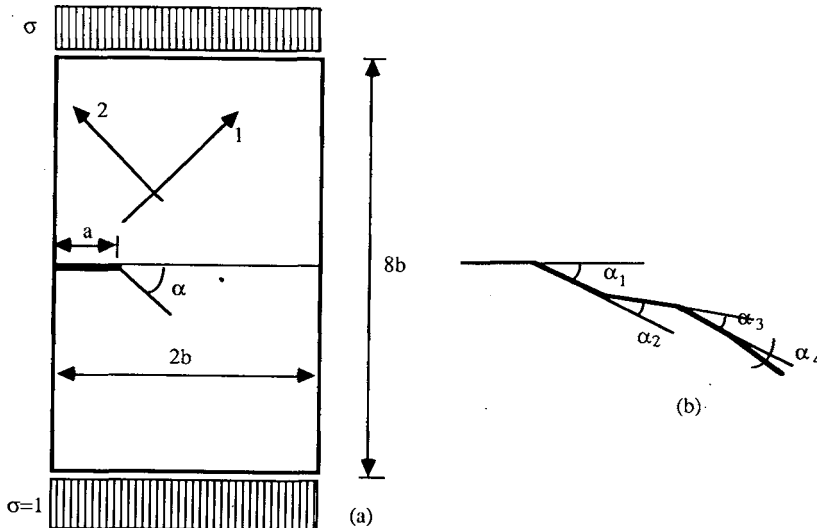


Figura 11. Propagación de grieta en placa ortótropa.

Es de destacar que la longitud de los elementos singulares se obtiene mediante un procedimiento de generación automática de la malla, densificando hacia el borde de grieta, lo que conduce a longitudes no exactas, tales como las que se han presentado a continuación. La variación de la dirección de la grieta a lo largo del proceso puede

observarse en la Figura 11b, teniéndose finalmente un ángulo de propagación de grieta de  $-81^\circ$  respecto del eje 1 de ortotropía. Repitiendo el proceso para incrementos de longitud de grieta de 0.05 se obtienen los siguientes resultados.

a) Paso 1:

Longitud de grieta= 0.1; longitud del elemento singular  $l = 0.025$ ; Angulo inicial de la grieta=  $-45^\circ$

Resultados  $t_I = 1.8654$ ;  $t_{II} = -0.38088$ ;  $K_{II}/K_I = -0.204181$

Angulo de propagación respecto de la grieta=  $-32^\circ$

b) Paso 2:

Longitud de grieta= 0.15; longitud del elemento singular  $l = 0.0025$ ; Angulo inicial de la grieta=  $-77^\circ$

Resultados  $t_I = 6.8633$ ;  $t_{II} = -1.1330$ ;  $K_{II}/K_I = 0.16508$

Angulo de propagación respecto de la grieta=  $-3^\circ$

c) Paso 3:

Longitud de grieta= 0.20; longitud del elemento singular  $l = 0.03$ ; Angulo inicial de la grieta=  $-80^\circ$

Resultados  $t_I = 6.9622$ ;  $t_{II} = 1.3767$ ;  $K_{II}/K_I = 0.1977$

Angulo de propagación respecto de la grieta=  $-1^\circ$

obteniéndose en este caso en tan sólo 3 análisis la dirección real de propagación de grieta en este material de  $-81^\circ$ , obtenida también anteriormente.

## CONCLUSIONES

Se demuestra con este trabajo que la propagación de grietas en materiales ortótropos puede tratarse en forma similar a la más estudiada de materiales isótropos, y que los elementos singulares de Blandford et al producen resultados excelentes en la determinación de factores de intensidad de tensiones con mallas bastante groseras, especialmente utilizando el procedimiento de Martínez y Domínguez, siendo necesario tan solo la modificación de la solución fundamental en un programa de elementos de contorno isótropo.

En la mayoría de los casos el método que se ha encontrado mejor para la determinación de los FITs corresponde a la utilización de aproximaciones singulares para las tensiones, utilizando el valor nodal en el nodo singular como parámetro de determinación del FIT, si bien es necesario elegir adecuadamente la longitud del elemento singular. Longitudes excesivamente pequeñas dan resultados menos precisos y la sensibilidad al error en materiales ortótropos es superior que en isótropos.

Se corrobora la simplicidad del método de la tensión circunferencial máxima, pudiéndose incluir de forma muy simple como postprocesador de un programa de elementos de contorno estándar. En este caso, como era de esperar, la elección de incrementos de longitud de grieta menores supone la consecución más rápida del ángulo

de propagación con menos esfuerzo computacional y de redefinición de mallas.

En comparación con métodos de dominio, las mallas necesarias para producir resultados análogos son mucho más simples, lo que implica una mucho más fácil redefinición de las mismas si se pretende seguir la propagación de una grieta.

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por la Diputación General de Aragón, a través del C.O.N.A.I. dentro del Proyecto de Investigación ITE/85-12 y asimismo por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (C.I.C.Y.T.) dentro del proyecto coordinado PB85-0353-C02-02.

### APENDICE

Si se escriben las relaciones tensiones-deformaciones para un material ortótropo en la forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} \quad (A1)$$

donde los elementos  $B_{ij}$  vienen dados en función de las constantes elásticas<sup>23</sup>, la solución fundamental viene dada en función de los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\sqrt{B_{11} B_{12}} - B_{12} - c} \\ b &= \sqrt{\sqrt{B_{11} B_{12}} + B_{12} + c} \\ c &= \frac{1}{2G_{12}} \end{aligned} \quad (A2)$$

y de las siguientes variables que dependen además de la geometría:

$$\begin{aligned} l &= \frac{\sqrt{2} x_r y_r}{\sqrt{B_{11} x_r^2 + \sqrt{B_{22} y_r^2}} \\ l_1 &= \frac{b x_r^2}{B_{22} y_r^2 + (B_{12} + c) x_r^2} \\ l_2 &= \frac{b y_r^2}{B_{11} x_r^2 + (B_{12} + c) y_r^2} \\ m &= B_{11} x_r^4 + 2(B_{12} + c) x_r^2 y_r^2 + B_{22} y_r^4 \end{aligned} \quad (A3)$$

Dependiendo del valor del parámetro  $a$ , la solución fundamental en desplazamientos resulta:

a) *a real*

$$\begin{aligned}
 U^{11} &= -K_{11} \ln \frac{m}{B_{22}} - C_{11}^r \arctan(a l_1) \\
 U^{12} = U^{21} &= K_{12}^r \ln \left[ \frac{1+a l}{1-a l} \right] \\
 U^{22} &= -K_{22} \ln \frac{m}{B_{11}} - C_{22}^r \arctan(a l_2)
 \end{aligned} \tag{A4}$$

b) *a cero*

$$\begin{aligned}
 U^{11} &= -K_{11} \ln \frac{m}{B_{22}} - C_{11}^0 l_1 \\
 U^{12} = U^{21} &= K_{12}^0 l \\
 U^{22} &= -K_{22} \ln \frac{m}{B_{11}} + C_{22}^0 l_2
 \end{aligned} \tag{A5}$$

c) *a imaginario*

$$\begin{aligned}
 U^{11} &= K_{11} \ln \frac{m}{B_{22}} - C_{11}^i \ln \left[ \frac{1+ia l_1}{1-ia l_1} \right] \\
 U^{12} = U^{21} &= K_{12}^i \arctan(ia l) \\
 U^{22} &= K_{22} \ln \frac{m}{B_{11}} - C_{22}^i \ln \left[ \frac{1+ia l_2}{1-ia l_2} \right]
 \end{aligned} \tag{A6}$$

con:

$$K_{11} = \frac{[(b^2 - c) c + (a^2 + c) b^2]}{8\sqrt{2} \pi b \sqrt{B_{22}}} \qquad K_{22} = \frac{[(b^2 - c) c + (a^2 + c) b^2]}{8\sqrt{2} \pi b \sqrt{B_{11}}}$$

$$C_{11}^r = \frac{[(b^2 - c) a^2 + (a^2 + c) c]}{4\sqrt{2} \pi a \sqrt{B_{22}}} \qquad K_{12}^r = \frac{a^2 b^2 + c^2}{8\pi a b} \qquad C_{22}^r = \frac{[(b^2 - c) a^2 - (a^2 + c) c]}{4\sqrt{2} \pi a \sqrt{B_{11}}}$$

$$C_{11}^0 = \frac{c^2}{4\sqrt{2} \pi \sqrt{B_{22}}} \qquad K_{12}^0 = \frac{c^2}{4\pi b} \qquad C_{22}^0 = \frac{c^2}{4\sqrt{2} \pi \sqrt{B_{11}}}$$

$$C_{11}^i = \frac{[(b^2 - c) a^2 - (a^2 + c) c]}{4\sqrt{2} \pi i a \sqrt{B_{22}}} \qquad K_{12}^i = \frac{a^2 b^2 + c^2}{4\pi i a b} \qquad C_{22}^i = \frac{[(b^2 - c) a^2 - (a^2 + c) c]}{8\sqrt{2} \pi i a \sqrt{B_{11}}}$$

Para las tensiones, se tiene en todos los casos:

$$\begin{aligned}
 T^{11} &= -\frac{A_1 y^2 + B_1 x^2}{m} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \\
 T^{12} &= \frac{C_1 x_r^2 + D_1 y_r^2}{m} y_r n_x - \frac{A_2 x_r^2 + B_2 y_r^2}{m} x_r n_y \\
 T^{21} &= -\frac{A_1 y_r^2 + B_1 x_r^2}{m} y_r n_x + \frac{C_2 x_r^2 + D_2 y_r^2}{m} x_r n_y \\
 T^{22} &= -\frac{A_2 x_r^2 + B_2 y_r^2}{m} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})
 \end{aligned} \tag{A7}$$

con:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\sqrt{B_{22}}(b^2 - c)}{2\sqrt{2\pi} b} & A_2 &= \frac{\sqrt{B_{11}}(b^2 - c)}{2\sqrt{2\pi} b} \\
 B_1 &= \frac{\sqrt{B_{11}}(b^2 + c)}{2\sqrt{2\pi} b} & B_2 &= \frac{\sqrt{B_{22}}(b^2 + c)}{2\sqrt{2\pi} b} \\
 C_1 &= \frac{(b^2 + c)\sqrt{B_{11} B_{22}} - 2(a^2 + c) b^2}{2\sqrt{2\pi} b \sqrt{B_{11}}} \\
 C_2 &= \frac{(b^2 - c) B_{11}}{2\sqrt{2\pi} b \sqrt{B_{22}}} \\
 D_1 &= \frac{(b^2 - c) B_{22}}{2\sqrt{2\pi} b \sqrt{B_{11}}} \\
 D_2 &= \frac{(b^2 + c)\sqrt{B_{11} B_{22}} - 2(a^2 + c) b^2}{2\sqrt{2\pi} b \sqrt{B_{22}}}
 \end{aligned}$$

## REFERENCIAS

1. E. Alarcón, A. Martín y F. París, "Boundary Elements in Potential and Elasticity Theory", *Computers and Structures*, Vol. 10, pp. 351-62, (1979).
2. M.H. Aliabadi, "An Enhanced Boundary Element Method for Determining Fracture Parameters", *In. Num. Meth. in Fract. Mech.*, (Ed. T.A. Cruse), pp. 27-39, (1987).
3. S.N. Atluri, A.S. Kobayashi y M. Nakagaki, "A Finite Element Program for Fracture Analysis of Composite Materials", *Fracture Mechanics of Composites*, ASTM STP 593, (1975).
4. P.K. Banerjee y R. Butterfield, "Boundary Element Methods in Engineering Science", McGraw Hill, (1981).
5. G.E. Blandford, A.R. Ingraffea y J.A. Liggett, "Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computation using the Boundary Element Method", *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, Vol. 17, pp. 387-405, (1981).
6. T.J. Boone, P.A. Wawrzynek y A.R. Ingraffea, "Finite Element Modelling of Fracture Propagation in Orthotropic Materials", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 26, pp. 185-201, (1987).
7. O.L. Bowie y C.E. Freese, "Central Crack in Plane Orthotropic rectangular Sheet", *Int. J. of Fract.*, Vol. 8, pp. 49-58, (1972).
8. C.A. Brebbia, "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, (1978).

9. C.A. Brebbia y J.C.F. Telles, "*Boundary Element Techniques-Theory and Applications*", Springer Verlag, (1984).
10. M.B. Buczek y C.T. Herakovitch, "A Normal Stress Criterion for Crack Extension Direction in Orthotropic Composite Materials", *J. Compos. Materials*, Vol. 19, pp. 544-553, (1985).
11. T.A. Cruse, "Two-Dimensional B.I.E.", *Fractura Mechanics Appl. Math. Modelling*, Vol. 2, pp. 287-293, (1978).
12. M. Doblare, "Computational Aspects of the B.E.M.", *Topics in B.E.*, Research III., pp. 51-131, (ed.C.A. Brebbia), Springer Verlag, (1987).
13. M. Doblare, F. Espiga, L. Gracia y M. Alcantud, "Computation of Stress Intensity Factors", *Problems with Crack Closure Effects*, (por publicar).
14. F. Erdogan, "Crack Propagation Theories", *Fracture II*, (Ed. H. Liebowitz), pp. 498-592, Academic Press,(1969).
15. F. Erdogan y G.C. Sih, "On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear", *J. Bas. Eng.*, Vol. 85, pp. 519-527, (1969).
16. Y. Ezawa y N. Okamoto, "Singularity Modelling in Two and Three Dimensional Stress Intensity Factors Computation using the Boundary Element Method", *B.E.M. VII*, (Ed. C.A. Brebbia, G. Maier), pp. 7.3-7.12, Springer Verlag, (1985).
17. R.O. Forchi y J.D. Barret, "Stress Intensity Factors in Anisotropic Plates using Singular Isoparametric Elements", *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol. 10, pp. 1281-1287, (1976).
18. E.E. Gdoutos, "Problems of Mixed Mode Crack Propagation", EAFM Series, Martinus Nijhoff, (1984).
19. W.H. Gerstle, "Finite and Boundary Element Modelling of Crack Propagation in Two and Three Dimensions using Interactive Computer Graphics", *PhD. Thesis*, Cornell Univ., (1985).
20. C.T. Herakovich, (Ed.), "Fracture of Fibrous Composites", AMD, ASME, Vol. 74, (1986).
21. J.W. Kim, "A Contour Computation of Stress Intensity Factors in Cracked Orthotropic Elastic Plates", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 21, pp. 353-364, (1985).
22. K. Kishitani, T. Hirai y K. Murakami, *J-Integral Calculations with Boundary Elements*, *B.E.M., V*, (ed. C.A. Brebbia, T. Futagami y M. Tanaka), pp. 481-493, Springer Verlag, (1983).
23. E.G. Ladopoulos, "On the Solution of Two-Dimensional Problem of a Plane Crack of Arbitrary Shape in an Anisotropic Material", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 28, pp. 187-195, (1987).
24. S.G. Lekhnitskii, "*Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*", Holden Day, 81963).
25. J. Martínez y J. Domínguez, "On the Use of Quarter-Point Boundary Elements for Stress Intensity Factor Computation", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 20, pp. 1941-1950, (1984).
26. H. Mews, "Calculation of Stress Intensity Factors of Various Crack Problems with the Boundary Element Method", *B.E.M., IX*, (Ed. C.A. Brebbia, W.L. Wendland y G. Kuhn), pp. 259-278, Springer Verlag, (1987).
27. H. Pina, "Numerical Integration", *Topics in B.E. Research*, Vol. III, pp. 36-50, (Ed. C.A. Brebbia), Springer Verlag, (1987).
28. A. Piva y E. Viola, "Crack Propagation in an Orthotropic Medium", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 29, pp. 535-548, (1989).
29. H.R. Riggs y G.H. Powell, "Rouge Crack Model for Analysis of Concrete", *J. Eng. Mech., Div. (ASCE)*, Vol. 112, pp. 448-464, (1986).

30. D.P. Rooke y D.J. Cartwright, "*Compendium of Stress Intensity Factors*", HMSO, (1973).
31. V.E. Saouma, M.L. Ayari y D.A. Leavell, "Mixed Model Crack Programation in Homogenous Anisotropic Solids", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 27, pp. 171-184, (1987).
32. V.E. Saouma y E.S. Sikiotis, "Stress Intensity Factors in Anisotropic Bodies using Singular Isoparametric Elements", *Eng Fract. Mech.*, Vol. 25, pp.115-121, (1986).
33. G.C. Sih, "Strain Energy Factors Applied to Mixed Mode Crack Problems", *Int. J. of Fracture*, Vol. 10, pp. 305, (1974).
34. G.C. Sih, "Failure of Composites as Predicted by the Strain Energy Density Theory", *Cracks in Composites*, (Ed. G.C. Sih), Martinus Nijhoff, (1981).
35. G.C. Sih, P.C. Paris y G.R. Irwin, "On the Cracks in rectilinear Anisotropic Bodies", *Int. J. of Fract.*, Vol. 1, pp. 189-203, (1965).
36. R.N.L. Smith, "From Rags to Riches?-Development in the B.E.M. for the Solution of Elastic Fracture Problems", *B.E.M. X*, pp. 155-176, Ed. C.A. Brebbia, Springer Verlag, (1988).
37. R.N.L. Smith y J.C. Mason, "Prediction of Crack Growth Direction using the Boundary Element Method", *B.E.M. VI*, (Ed. C.A. Brebbia, T. Futagami y M. Tanaka), pp. 495-503, (1983).
38. M.D. Snyder y T.A. Cruse, "Boundary Integral Equation Analysis of Cracked Anisotropic Plates", *Int. J. of Fract.*, Vol. 11, pp. 315-328, (1975).
39. M. Tanaka, "A New Family of Crack Elements for Stress Intensity Factors Computation in Elastostatics y Boundary Elements", *B.E.M. VIII*, (Ed. M. Tanaka, C.A. Brebbia), pp. 131-142, Springer Verlag, (1986).
40. F. Van Der Ween, "Mixed Mode Fracture Analysis of Rectilinear Anisotropic Plates using Singular Boundary Elements", *Comp. and Struct.*, Vol. 17, pp. 469-474, (1983).
41. J.G. Williams y M.W. Birch, "Mixed Mode Fracture in Anisotropic Media", *Cracks and Fract.*, ASTM STP 601, pp. 125-137, (1976).