

# ANALISE DE SENSIBILIDADE DE ESTRUTURAS UTILIZANDO UN PROGRAMA COMERCIAL DE ELEMENTOS FINITOS

A. F. MELÃO BARROS<sup>1</sup>

e

C. A. MOTA SOARES<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Assistente do I. S. T., investigador do CEMUL  
(Centro de Mecânica e Materiais da Universidade Técnica de Lisboa)*

<sup>2</sup> *Professor Catedrático do I. S. T., investigador do CEMUL*

## RESUMO

Neste trabalho descreve-se uma implementação numérica de Análise de Sensibilidade de Estruturas, utilizando um programa comercial de elementos finitos. São consideradas variáveis de projecto de dimensionamento e de forma. E apresentado um resumo de alguns resultados de uma formulação de Análise de Sensibilidade pelo método da estrutura adjunta. Como funcionais da resposta da estrutura consideraram-se deslocamentos e tensões pontuais.

A implementação é realizada fora do programa comercial, utilizando resultados da análise das estruturas actual e adjunta. Aplicações a um problema de estado plano de tensão são apresentadas e analisadas sob o ponto de vista da precisão numérica.

## SUMMARY

A numerical implementation of Design Sensitivity Analysis using a commercially available finite element code is described in this paper. Both distributed parameter and shape design variables are considered. Some results from a specific design sensitivity formulation, using the adjoint structure method, are presented. Performance functionals considered were local displacement and stress.

The implementation is performed outside the finite elements code, using analysis results of the real and adjoint structures. Numerical results in a plane stress case are provided, and checked for accuracy.

## INTRODUÇÃO

Existem actualmente numerosos programas comerciais de elementos finitos que permitem analisar virtualmente qualquer estrutura. Nos aspectos de concepção, porém, tais programas fornecem pouca ou nenhuma informação. Dependem inteiramente da experiência e intuição do projectista a concepção inicial e eventuais alterações necessárias, o que conduz normalmente a soluções sub-óptimas.

Recibido: Noviembre 1986

O desenvolvimento de esquemas iterativos de optimização estrutural, baseados em programas de elementos finitos, exige a implementação numérica da sensibilidade da resposta estrutural às variáveis de projecto.

É numerosa a literatura relacionada com variáveis de projecto de dimensionamento, tais como espessura de placas ou dimensões transversais de vigas<sup>1, 2, 4, 5</sup>. Mais recentemente tem-se concentrado esforços na análise de sensibilidade a variáveis de projecto de forma, ou geometria<sup>3, 5</sup>.

Embora outros tratamentos sejam equivalentes, a formulação e notação utilizadas são as apresentadas por DEMS e MRÓZ, que apresentam um tratamento bastante completo da análise de sensibilidade da resposta estática de estruturas<sup>2, 3, 4</sup>. A sensibilidade da resposta estrutural é obtida explicitamente das variáveis de projecto e das variáveis de estado da estrutura inicial e de uma estrutura análoga, designada estrutura adjunta.

No presente artigo descreve-se a implementação da análise de sensibilidade, de dimensionamento e de forma, para constrangimentos de deslocamento e de tensão, em estruturas de resposta linear utilizando o programa ADINA (AUTOMATIC DYNAMIC INCREMENTAL NONLINEAR ANALYSIS)<sup>10, 11</sup>.

## SENSIBILIDADE DE DIMENSIONAMENTO

Apresentam-se alguns resultados da análise de sensibilidade de dimensionamento. A dedução dos mesmos pode ser encontrada em<sup>2, 4</sup>.

Seja  $B$  um sólido ocupando o domínio  $V$ , de fronteira  $S$ , com tensões  $\mathbf{T}^\circ$  em  $S_T$  e deslocamentos prescritos  $\mathbf{u}^\circ$  em  $S_u$ , e forças volúmicas  $\mathbf{f}$ , (Fig. 1).

Sejam  $\mathbf{u}$ ,  $\underline{g}$ ,  $\underline{\epsilon}$ , os deslocamentos, tensões e extensões no sólido. As tensões e extensões estão relacionadas pelas equações constitutivas:

$$\underline{g} = \mathbf{D}(y_k) \cdot \underline{\epsilon} \quad ; \quad \underline{\epsilon} = \mathbf{E}(y_k) \cdot \underline{g} \quad (1)^*$$

Sendo  $\mathbf{D}$  o tensor da rigidez,  $\mathbf{E}$  o tensor da flexibilidade e  $y_k$  uma variável de projecto de dimensionamento:

$$y_k = y_k(\mathbf{x}) \quad (2)$$

Considere-se o funcional:

$$G = \int \psi(\underline{g}, y_k) dV + \int h(\mathbf{u}, y_k) dV + \int f(\mathbf{T}) dS_u + \int g(\mathbf{u}) dS_T \quad (3)$$

que depende das tensões e deslocamentos em  $V$ , das tensões em  $S_u$ , dos deslocamentos em  $S_T$  e das variáveis de projecto.

A primeira variação de  $G$  é dada por<sup>4</sup>:

$$\delta G = \int \left( \frac{\partial \psi}{\partial y_k} + \frac{\partial h}{\partial y_k} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_k} \cdot \mathbf{u}^a - \underline{\epsilon}^r \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial y_k} \cdot \underline{\epsilon} \right) \delta y_k dV \quad (4)$$

(\*) Um ponto entre dois tensores indica contracção de todos os índices do tensor de ordem inferior.

em que  $\delta y_k$  é uma pequena perturbação da variável de projecto.  $\mathbf{u}^a$  e  $\underline{\epsilon}^x$  são os deslocamentos e extensões residuais na estrutura adjunta (Fig. 2), estrutura com a mesma geometria e propriedades da estrutura inicial, as condições fronteira:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{a0} &= \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \text{ em } S_T \\ \mathbf{u}^{a0} &= -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \text{ em } S_u \\ \mathbf{f}^a &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}} \text{ em } V \end{aligned} \quad (5)$$

e um campo de extensões iniciais:

$$\underline{\epsilon}^i = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\sigma}} \text{ em } V \quad (6)$$

As extensões e tensões na estrutura adjunta são:

$$\underline{\epsilon}^a = \underline{\epsilon}^i + \underline{\epsilon}^x \quad ; \quad \underline{\sigma}^x = \mathbf{D} \cdot \underline{\epsilon}^x \quad (7)$$

No caso singular de o funcional  $G$  ser a tensão  $\sigma_{qs}$  no ponto  $\mathbf{x}_o$ :

$$G = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \sigma_{qs} \, dV \quad (8)$$

em que  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$  é o delta de Dirac, a estrutura adjunta tem a extensão inicial:

$$\epsilon_{k1}^i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \delta_{qk} \delta_{s1} \quad (9)$$

em que  $\delta_{qk}$ ,  $\delta_{s1}$  são símbolos de Kronecker.

Para o deslocamento  $u_q$  no ponto  $\mathbf{x}_o$  de  $S_T$ :

$$G = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) u_q \, dS_T \quad (10)$$

a solicitação na estrutura adjunta é uma força unitária aplicada em  $\mathbf{x}_o$ :

$$\mathbf{T}_k^{a0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \delta_{qk} \quad (11)$$

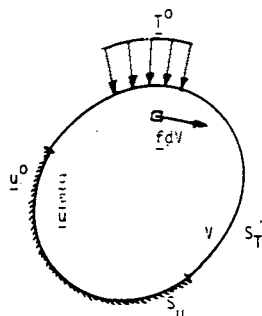


Figura 1. Estrutura inicial

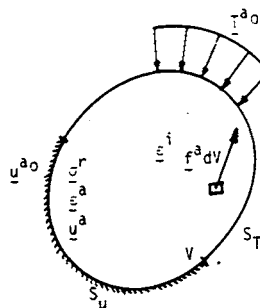


Figura 2. Estrutura adjunta

## SENSIBILIDADE DE FORMA

Por efeito das solicitações, o corpo sofre uma deformação  $C \rightarrow C^d$ , definida pelo campo de deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}^d = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ . Considere-se adicionalmente um processo de transformação do domínio  $V$ ,  $C \rightarrow C^t$ , definida por uma variável de projecto de forma  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \quad ; \quad \mathbf{x}^t = \mathbf{x} + \mathbf{y} \quad (12)$$

Limitaremos a análise à situação em que o processo de transformação não afecta a fronteira apoiada, i. e. (Fig. 3).

$$\mathbf{y} = 0 \text{ em } S_u \quad (13)$$

Considere-se o funcional:

$$G = \int \psi(\boldsymbol{\sigma}) dV + \int h(\mathbf{u}) dV + \int \bar{f}(\mathbf{T}) dS_u + \int g(\mathbf{u}) dS_T \quad (14)$$

A primeira variação de  $G$  é dada por<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \delta G = & \int \delta \mathbf{T}^o \cdot \mathbf{u}^a dS_T + \int \left\{ [\psi + h + g,_{,n} + (\mathbf{T}^o \cdot \mathbf{u}^a)_{,n} - 2(g + \mathbf{T}^o \cdot \mathbf{u}^a) H - \underline{g} \cdot \underline{\xi}^a + \right. \\ & \left. + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^a] n_k - \mathbf{T}^o_{,k} \cdot \mathbf{u}^a \right\} \delta y_k dS_T \end{aligned} \quad (15)$$

em que a estrutura adjunta é idêntica à anteriormente definida e  $\mathbf{n}$  e  $H$  são a normal exterior e a curvatura média em  $S_T$ .

Quando a variação do domínio apenas afecta a fronteira livre sem tensões  $S_o$ , não há forças volúmicas e para o funcional  $G$  tensão pontual:

$$G = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \sigma_{qs} dV \quad (16)$$

$$\delta G = - \int \underline{g} \cdot \underline{\xi}^a \delta y_n dS_o + \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \frac{\partial \sigma_{qs}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{y} dV \quad (17)$$

Ainda nas mesmas condições, considerando um funcional  $G$  deslocamento em  $\mathbf{x}_o$ :

$$G = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) u_q dS_o \quad (18)$$

$$\delta G = - \int \underline{g} \cdot \underline{\xi}^a \delta y_n dS_o + \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \frac{\partial u_q}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{y} dS_o \quad (19)$$

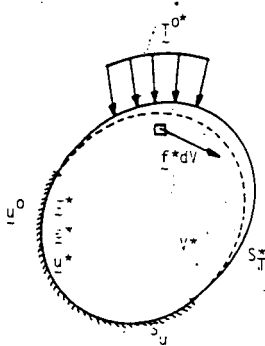


Figura 3. Perturbação da geometria

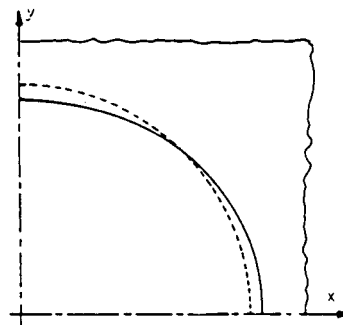


Figura 4. Perturbação da forma do furo

## IMPLEMENTAÇÃO

A implementação numérica da análise de sensibilidade é realizada pelo seguinte algoritmo:

1. Análise da estrutura inicial.
2. Cálculo das condições fronteira e extensões iniciais da estrutura adjunta, segundo as equações (5, 6, 9, 11), conforme aplicável.
3. Análise da estrutura adjunta.  
Esta análise é efectuada utilizando a matriz de rigidez da estrutura inicial factorizada, pelo que envolve um volume de computação reduzido.
4. Cálculo da sensibilidade, segundo as equações (4, 17, 19), conforme aplicável.

Note-se que toda a implementação pode ser efectuada exteriormente ao programa de elementos finitos, utilizando dados de pós-processamento.

## APLICAÇÕES

Uma placa em estado plano de tensão, com um furo central, e uma tensão de 100 MPa distante do furo foi analisada utilizando elementos triangulares de tensão constante. O módulo de Young e coeficiente de Poisson são, respectivamente,  $E = 200$  MPa,  $\nu = 0,3$ . A placa inicial é de espessura constante igual a 10 mm e o furo circular de raio 200 mm. Consideraram-se uma perturbação da espessura de 0.2 mm de uma coroa circular de raio exterior 340 mm (área sombreada na fig. 5) e uma perturbação da geometria do furo, sob a forma de uma elipse de semi eixos 204 mm e 196 mm. (Fig. 4).

Consideraram-se os seguintes funcionais:

$$G_1 = \int \delta(\mathbf{x} \cdot [0, 200]^T) u_y \, dS_0 \quad (20)$$

$$G_2 = \int \delta(\mathbf{x} \cdot [200, 0]^T) \sigma_{yy} \, dV \quad (21)$$

$$G_3 = \int \delta(\mathbf{x} \cdot [100\sqrt{2}, 100\sqrt{2}]^T) \sigma_{xy} \, dV \quad (22)$$

Os resultados obtidos são apresentados nas tabelas 1 e 2, para as variáveis de projecto de dimensionamento e de forma, respectivamente.  $G^0$  é o valor do funcional na placa inicial,  $G^1$  na placa de variável de projecto perturbada e  $\delta G$  a sensibilidade calculada por (4), (17) ou (19), conforme aplicável (deslocamentos em mm e tensões em MPa).  $G^2$  é o valor do funcional para uma perturbação das variáveis de projecto dupla da indicada.  $\Delta G^1 = G^1 - G^0$  e  $\Delta G^2 = G^2 - G^0$  são as diferenças finitas dos funcionais.

Os coeficientes  $(\delta G / \Delta G^1) \times 100$  e  $(2\Delta G^1 / \Delta G^2) \times 100$  são uma medida da precisão dos resultados da análise de sensibilidade e da validade da linearização no intervalo das perturbações consideradas.

Note-se que o termo convectivo de (17), impossível de representar com elementos de tensão constante se anula no ponto de medida de tensão considerado no funcional  $G_3$ .

	$G^0$	$G^1$	$\Delta G^1$	$G^2$	$\Delta G^2$	$\frac{2\Delta G^1}{\Delta G^2} \times 100$	$\delta G$	$\frac{\delta G}{\Delta G^1} \times 100$
$G_1$	0.291596	0.289471	-0.002125	0.287385	-0.004211	100.9	-0.002144	100.9
$G_2$	297.273	294.755	-2.518	292.284	-4.989	100.9	-2.543	101.0

Tabela 1. Perturbação do dimensionamento

	$G^0$	$G^1$	$\Delta G^1$	$G^2$	$\Delta G^2$	$\frac{2\Delta G^1}{\Delta G^2} \times 100$	$\delta G$	$\frac{\delta G}{\Delta G^1} \times 100$
$G_1$	0.291596	0.293517	0.001921	0.295388	0.003792	101.3	0.001844	96.0
$G_3$	-40.3940	-38.8802	1.5138	-37.2077	3.1862	95.0	1.4811	97.8

Tabela 2. Perturbação da forma

## CONCLUSÕES

Os resultados obtidos confirmam a precisão numérica da implementação em elementos finitos do método da estrutura adjunta em análise de sensibilidade de estruturas, particularmente com variáveis de projecto de dimensionamento. O procedimento de integração na fronteira, utilizado em análise de sensibilidade de forma, diminui a precisão dos resultados, o que é agravado pela utilização de elementos de contorno linear, facto que tem sido notado por diversos autores<sup>5, 7, 8</sup>.

Note-se ainda que a sensibilidade da tensão pontual com variáveis de projecto de forma pode ser calculada com suficiente precisão utilizando elementos de tensão constante desde que o ponto de medida não seja afectado pela perturbação de geometria.

A implementação é computacionalmente eficiente, e pode ser realizada exteriormente ao programa de elementos finitos utilizando dados de pós-processamento.

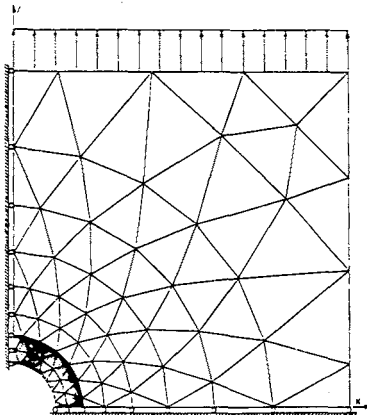


Figura 5. Modelo de elementos finitos de 1/4 da placa  
111 elementos, 72 nós, 126 graus de liberdade.

## REFERÊNCIAS

1. E. J. Haug. "A Review of Distributed Parameter Structural Optimization Literature", *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Ed. by E. J. Haug and J. Cea, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Netherlands, (1981).
2. K. Dems, Z. Mróz. "Variational Approach by means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis, I. Variation of Material Parameters Within Fixed Domain", *Int. J. Solids Structures*, Vol. **19**, n° 8, pp. 677-692, (1983).
3. K. Dems, Z. Mróz. "Variational Approach by means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis, II, Structure shape Variation", *Int. J. Solid Structures*, Vol. **20**, n° 6, pp. 527-552, (1984).
4. K. Dems, Z. Mróz. "Variational Approach to First, and second, Order Sensitivity Analysis of Elastic Structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. **21**, pp. 637-661, (1985).
5. E. J. Haug, K. K. Choi and V. Konkov. "Design Sensitivity Analysis of Structural Systems". Academic Press, New York, N. Y., (1986).
6. K. K. Choi, J. L. T. Santos, M. C. Frederick. "Implementation of Design Sensitivity Analysis With Existing Finite Element Codes", to appear.
7. R. J. Yang, K. K. Choi, E. J. Haug. "Numerical Considerations in Structural Component Shape Optimization", *The American Society of Mechanical Engineers*, 84 - DET - 219.
8. R. J. Yang, K. K. Choi. "Accuracy of Finite Element Based Shape Design Sensitivity Analysis". *Journal of Structural Mechanics*, to appear.
9. R. J. Yang, K. K. Choi, e. J. Haug. "Finite Element Computation of Structural Design Sensitivity Analysis", *tech. report 84-3*, CCAD, Univ. of Iowa, (1984).
10. ADINA: "System Theory and Modeling Guide", *Report AE 83-4*, ADINA Engineering, (1983).
11. ADINA: "User Manual", *Report AE 81-1*, ADINA Engineering, (1981).

