

UNA FAMILIA DE ELEMENTOS FINITOS CLASE C^1 APLICACION A FLEXION DE PLACAS DE KIRCHHOFF

J. TORRES,
A. SAMARTIN,
V. ARROYO

y
DIAZ DEL VALLE

*Departamento de Análisis de las Estructuras
Escuela de Ingenieros de Caminos
Universidad de Cantabria, Santander (España)*

RESUMEN

Se hace una pequeña introducción y después un estudio sobre las posibilidades y limitaciones —en análisis de placas delgadas—, de elementos simples polinómicos de clase C^1 . Se expone una familia jerárquica de dichos elementos, que se aplica a varios casos particulares. En base a estos se deducen algunas conclusiones, especialmente en lo que se refiere a eficacia computacional. Al final se proponen trabajos a realizar a partir de los datos existentes.

SUMMARY

After a short introduction the possibilities and limitations of polynomial simple elements with C^1 continuity are discussed —in plate bending analysis—. A family of this kind of elements is presented. These elements are applied to simple cases in order to assess their computational efficiency. Finally some conclusions are shown, and future researches are proposed as well.

INTRODUCCION

El cálculo de placas de sección, forma y condiciones de contorno arbitrarias ha sido bastante complejo hasta fechas recientes. Únicamente eran abordables casos drásticamente simplificados. Los métodos de que se disponía para resolver la ecuación diferencial (1) —o la ecuación variacional (3)— con las condiciones de contorno (2) se pueden clasificar en analíticos, semianalíticos (desarrollos en serie como Navier, Levy...) o numéricos (diferencias finitas). Con ninguno de ellos se podía encontrar una solución adecuada, o la complicación y esfuerzo numérico eran muy grandes.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{P}{D} \quad (1)$$

$$B(w) = 0 \quad (2)$$

Recibido: Noviembre 1985

$$\iint_A (\delta \underline{\epsilon}^*)^T \mathbf{D} (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_0) dA = \iint_A (\delta \mathbf{u}^*)^T \mathbf{b} dA + \iint_A (\delta \mathbf{u}^*)^T \mathbf{P} dA + \int_{A_1} (\delta \mathbf{u}^*)^T \mathbf{P}_s ds \tag{3}$$

donde: u_i = incógnitas básicas. Desplazamientos generales.

$$\begin{aligned} w &= \phi^i u_i \text{ con } \phi^i \text{ conocidas} \\ u &= \psi^i u_i \text{ con } \psi^i \text{ conocidas} \\ \underline{\epsilon} &= - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right]^T \end{aligned} \tag{4}$$

\mathbf{D} , $\underline{\epsilon}_0$, \mathbf{b} , \mathbf{P} , \mathbf{P}_s son los datos del material, deformaciones impuestas, fuerzas de volumen, fuerzas de superficie y acciones en el contorno.

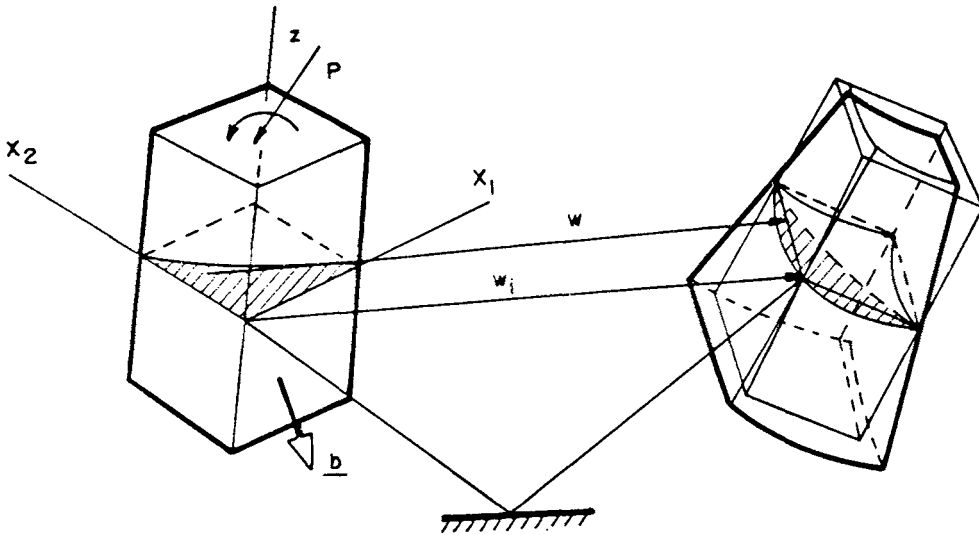


Figura 1.— Definición de variables

El desarrollo expresado en (4) necesita para ser empleado en (3) continuidad en primeras derivadas. De otra forma las segundas derivadas que aparecen en (3) pueden llegar a tener valores infinitos. El lector puede encontrar detalles en el excelente libro de Zienkiewicz¹.

Los tipos de elementos que satisfacen esta condición se suelen denominar elementos compatibles. Sin embargo se ha demostrado^{2, 3}, que se pueden obtener muy aproximados resultados, respecto a la media en energía, con elementos no conformes. En este caso la convergencia no es monótona y depende de la configuración de la malla de elementos finitos. Hay algunos casos en los que no hay convergencia. Irons⁴ propuso para estos casos sus "patch-test", que sirve para todas las situaciones no patológicas⁵.

La convergencia monótona e independiente del tipo de malla se asegura utilizando elementos finitos compatibles. Estas ventajas son de gran interés teórico y práctico en

algunos casos. Sin embargo la construcción de dichos elementos no es sencilla. Sin ir más lejos es imposible conseguir elementos polinómicos simples con un desarrollo único.⁶

Las técnicas hasta aquí utilizadas para obtener elementos compatibles C^1 7, 8, 9, 10, se pueden clasificar en dos tipos. Pueden abordar el problema o reducirlo a uno de clase C^0 en el que el valor de la segunda derivada mixta (w_{xy}) en las esquinas no tiene influencia.

La segunda derivada mixta (w_{xy}) en las esquinas de los elementos puede considerarse como grado de libertad (*g.d.l.*) esclavo, o como grado de libertad maestro. Si como en el primer caso este *g.d.l.* está en función de otros independientes o maestros hay a su vez otras dos posibilidades: (1) utilización de funciones racionales correctoras, (2) división de un elemento en subzonas. (Figura 2).

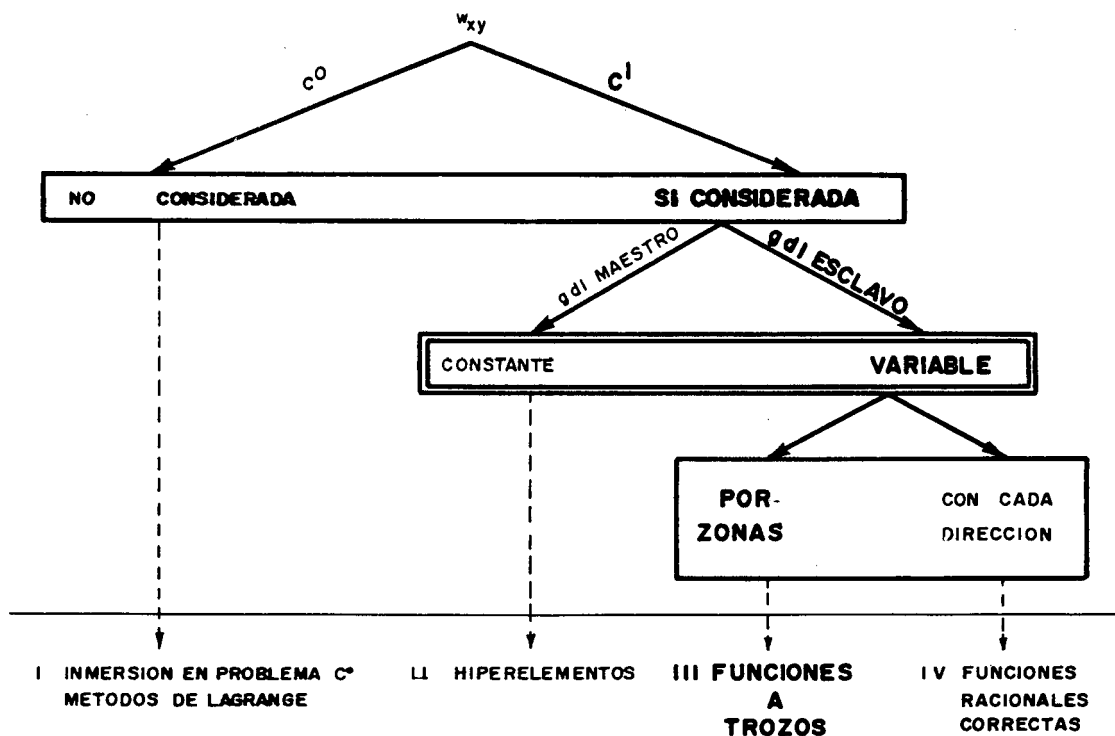


Figura 2.— Clases de elementos para problemas C^1 .

OBJETIVO DEL TRABAJO

Entre los cuatro métodos señalados en la Figura 2, el artículo trata con las funciones a trozos. Este procedimiento participa de las ventajas del Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) —solución unificada, fácil cambio de malla (convergencia h) e imposición de las condiciones de contorno así como matriz en banda simétrica—. Al contemplar la continuidad C^1 se obtiene convergencia monótonica e independencia de la malla.

Como ventajas adicionales se pueden señalar las siguientes:

- La integración numérica puede ser muy aproximada ya que se usan polinomios como funciones de interpolación.

- La extensión a láminas es sencilla ya, que se usan elementos simples¹¹
- Se propone una familia de elementos, basada en una idéntica forma de construcción de los polinomios de interpolación. De esta forma sin variar la malla de elementos, pero cambiando las funciones de interpolación se aumenta la convergencia (convergencia k).

REVISION HISTORICA⁹

Las funciones polinómicas a trozos fueron usadas primeramente por Clough y Tocher en 1965 ¹² en elementos triangulares, y extendidos más tarde a paralelogramos por Clough y Felippa¹³ Estos últimos utilizan un elemento triangular también.¹³ Usando la idea de estos se hace el presente trabajo construyendo una familia. El objetivo inicial fue confeccionar una función a trozos de quinto grado sobre soporte triangular. En la Figura 3 se muestra este tipo de elemento, en el que por supuesto no existe continuidad entre subelementos. El método de comprobación de continuidad se expone más tarde. La obtención de las funciones en cada subtriángulo dió buenos resultados, pero la expresión analítica se complicó mucho al imponer continuidad C^1 entre los subelementos. Esto hizo decidirse por un planteamiento numérico del problema.

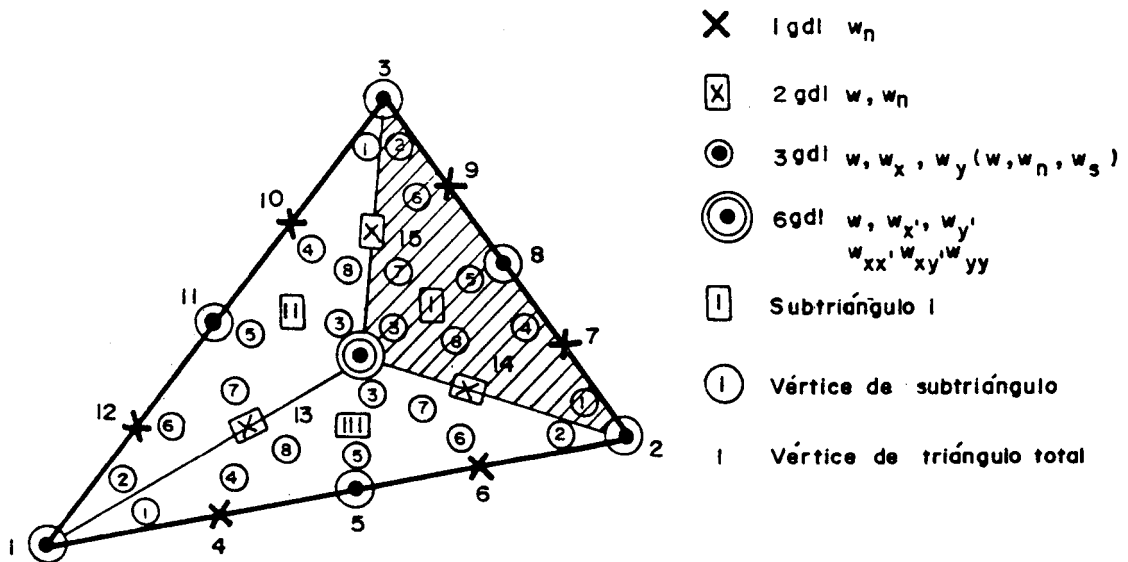


Figura 3.— Elemento quíntico primitivo

FAMILIA JERARQUICA

El planteamiento de un elemento genérico se reduce a elegir el número de grados de libertad ($g.d.l.$) y su distribución para definir la función de interpolación.

Se usan elementos triangulares, divididos en otros tres, como se indica en la Figura 4. El punto 0 se hace coincidir por comodidad con el centro de gravedad del elemento. El polinomio de interpolación en cada uno de los subelementos es un polinomio completo de grado N .

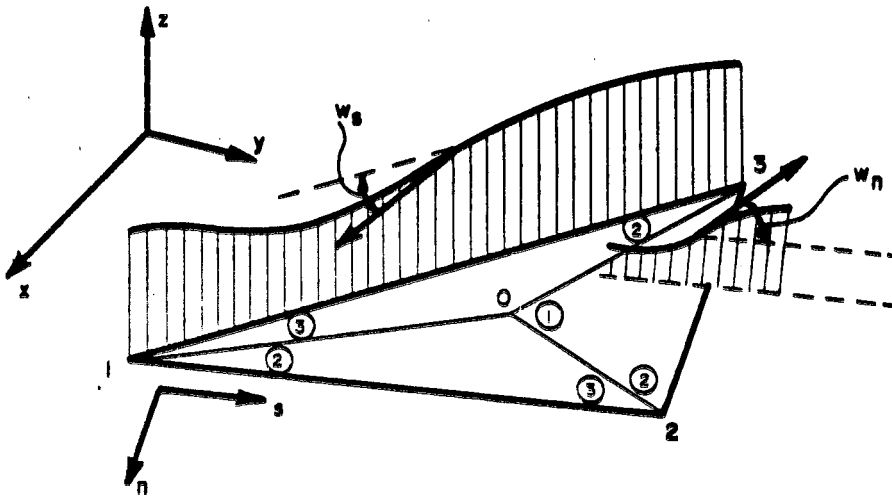
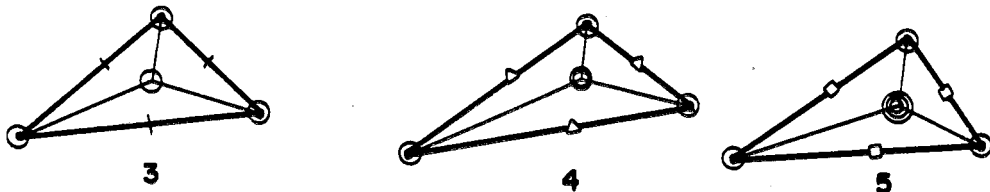


Figura 4.- Definición general de un elemento

En la Figura 5 se presentan los elementos de la familia de tercer, cuarto y quinto grado. La explicación de la distribución de g. d. l. se hace más tarde.

El número de grados de libertad en un polinomio completo de dos variables es:

$$S(N+1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2} \quad (5)$$



$n_1 = 15$

$n_2 = 12$

$n_1 = 24$

$n_2 = 21$

$n_1 = 34$

$n_2 = 31$

- w, w_x, w_y
- ⊙ $w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}$
- ⊗ $w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, w_{xxx}, w_{xxy}, w_{xyy}, w_{yyy}$

| w_n

△ $w_n w_{ns} / w$

□ $w_n w_{ns} w_{nss} / w w_s$

n_1 = Número de gdl sin continuidad interna

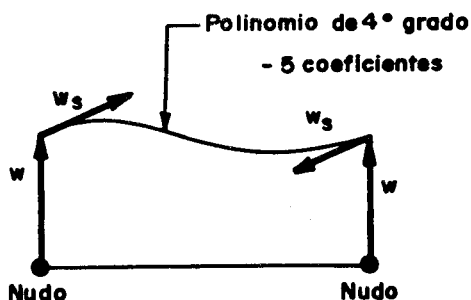
n_2 = Número de gdl con continuidad interna

Figura 5.- Elementos de tercer, cuarto y quinto grado

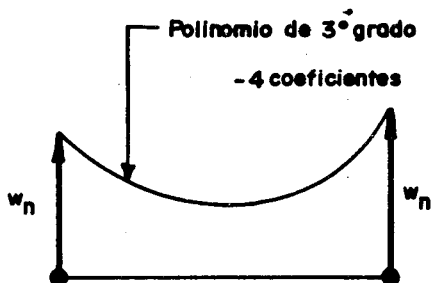
La compatibilidad en derivadas primeras $-w$ y w_n (Figura 4)– implica los resultados de la Tabla 1. Para un polinomio de cuarto grado se especifica en la Figura 6.

	A	B	A+B
Función	w (grado N)	w_n (grado $N-1$)	$w + w_n$
I N.º de g. d. l. necesarios para continuidad C^1	$N+1$	N	$2N+1$
II g. d. l. en las esquinas (elementos simples)	2×2	2×1	6
III=I-II g. d. l. en el lado (sin esquinas)	$N-3$	$N-2$	$2N-5$

TABLA 1.– Distribución de g. d. l. en un lado externo



Flecha. Los nudos tienen 4 coeficientes, se necesita 1 gdl más.



Derivada normal (no determinada)
coeficientes > gdl sobre el lado ($4 > 2$)

Figura 6.– Distribución de g. d. l. en un lado externo para el caso de $N=4$

La distribución de los g.d.l. en el lado externo fue primeramente como se indica en la Figura 7a ($N=5$), usando sólo primeras derivadas. Sin embargo, la convergencia no cambia y el elemento sigue siendo simple si todos los g.d.l. se concentran en el punto medio del lado ¹⁴ (Figura 7b).

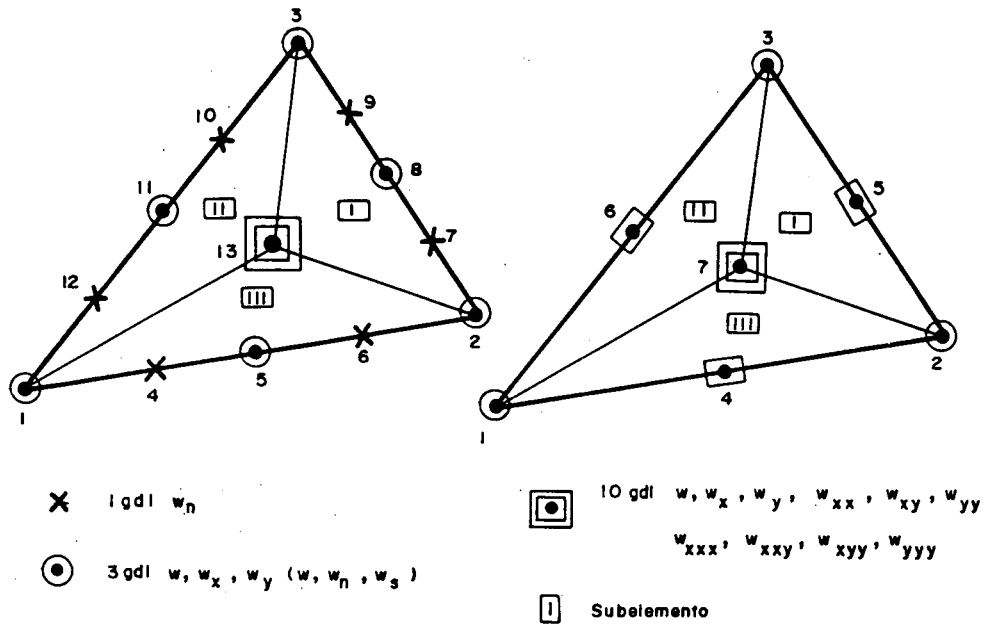


Figura 7.— Distribución de g.d.l. a lo largo de un lado externo ($N=5$)

Los grados de libertad utilizados en el nudo central se expresan en la Figura 8.

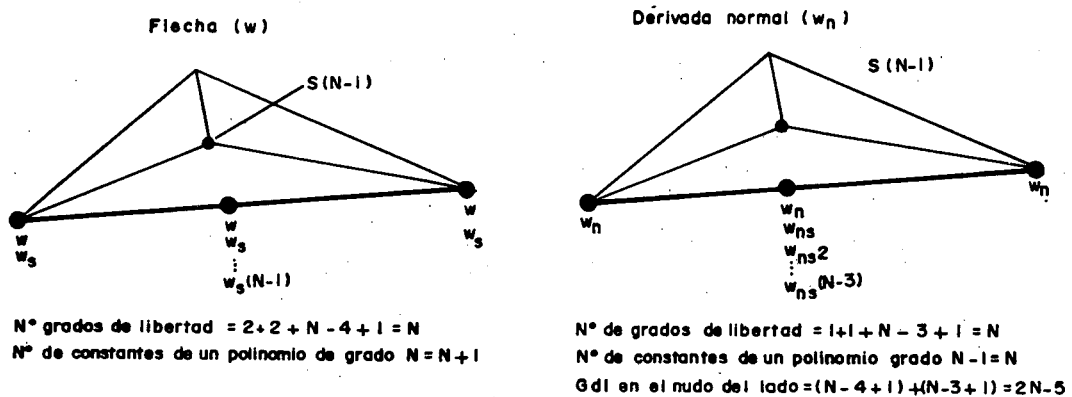


Figura 8.— G.d.l. usados en el centro de un lado externo (N genérico)

Como el número de *g.d.l.* en el centro de un lado externo es $2N-5$ (Tabla 1), el número de *g.d.l.* en interior de un elemento será:

$$S(N+1) - 2 \times 3 - (2N-5) = S(N-1)$$

La continuidad a lo largo de un lado interno se muestra en la Tabla 2. Para conseguir continuidad C^1 se necesita imponer una condición en derivadas normales (w_n)

		A	B	A B
	Función	w (orden N)	w_n (orden $N-1$)	$w + w_n$
I	Número total de <i>g.d.l.</i> necesarios para optimizar C^1	$N+1$	N	$2N+1$
II	<i>G.d.l.</i> en una esquina (elemento simple)	2	1	3
III	<i>G.d.l.</i> en el centro de gravedad $S(N-1)$	$N-1$	$N-2$	$2N-3$
IV=II+III	<i>G.d.l.</i> en lado interno	$N+1$	$N-1$	$2N$

TABLA 2.— Distribución de *G.d.l.* en un lado interno (Número)

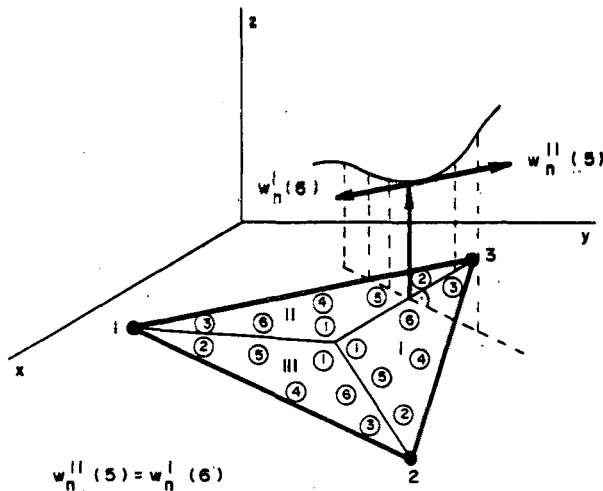


Figura 9.— Condición de continuidad interna

En este caso se ha utilizado como condición la igualdad de derivadas normales en el punto medio de los lados comunes entre subelementos, esto es:

$$\begin{aligned} w_n^{III}(6) &= -w_n^I(5) \\ w_n^I(6) &= -w_n^{II}(5) \\ w_n^{II}(6) &= -w_n^{III}(5) \end{aligned} \tag{6}$$

donde los superíndices indican el subelemento y los números entre paréntesis los nudos. (Figura 9).

Cómo condición adicional se podía haber impuesto otra, en otros puntos y añadirse más en el caso de polinomios de grado mayor que tres. Este tipo de condición elegida y el punto se han elegido así por comodidad, sin embargo se ha podido comprobar¹⁵ que es imposible imponer mayor número de condiciones con simetría cíclica. Por esto se ha optado por eliminar solamente los 3 g.d.l. del c. d.g. w, w_x y w_y .

Expresión analítica

Siguiendo la técnica general del M.E.F., la función de interpolación general es en cada subelemento:

$$w^{(i)} = L \alpha^{(i)} \tag{7}$$

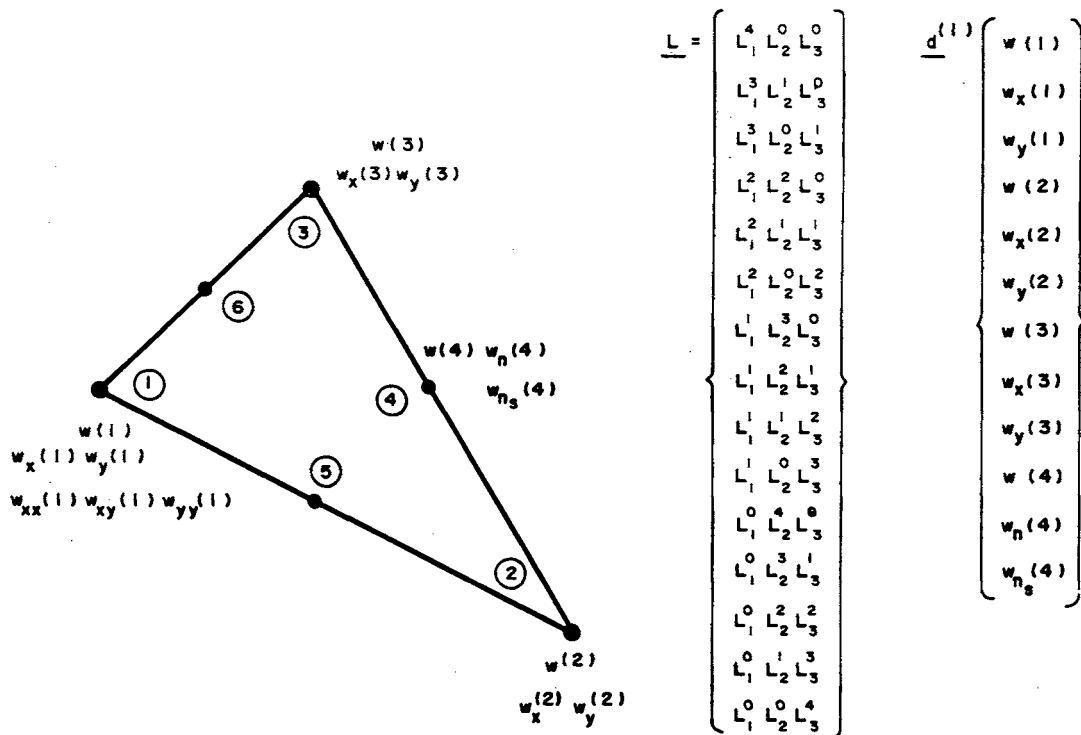


Figura 10.— Vector L y d⁽¹⁾ para N=4

donde: i es el número del subelemento; \mathbf{L} un vector de $S(N+1)$ componentes del tipo $L_1^a L_2^b L_3^c$ (L_i son las coordenadas baricéntricas) (Figura 10 para $N=4$); $\underline{\alpha}$ es un vector de $S(N+1)$ constantes α_{abc} .

Si \mathbf{d} es el vector de grados de libertad (w y sus derivadas), se pueden obtener considerando (7):

$$\mathbf{d}^{(i)} = \mathbf{C}^{(i)} \underline{\alpha}^{(i)} \quad (8)$$

$$\underline{\alpha}^{(i)} = \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{d}^{(i)} \quad (9)$$

La función de interpolación de (7) se puede expresar como sigue:

$$w^{(i)} = \mathbf{L} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{d}^{(i)} = \phi \mathbf{d}^{(i)} = \sum_1^{S(N+1)} \phi^j d_j^{(i)} \quad (10)$$

Con los vectores $\mathbf{d}^{(i)}$ de los grados de libertad de cada subelemento se forma otro vector \mathbf{d}^* incluyendo a todos ellos ($\mathbf{d}^{(1)}$, $\mathbf{d}^{(2)}$, $\mathbf{d}^{(3)}$) para obtener una expresión de la función de interpolación extendida a todo el elemento. Hay que tener en cuenta que algunos de los grados de libertad son comunes a los diversos $\mathbf{d}^{(i)}$ y en \mathbf{d}^* se consideran solamente una vez. Se puede dividir \mathbf{d}^* a su vez en dos vectores $(\mathbf{d}_0^*, \mathbf{d}_1^*)^T$, donde \mathbf{d}_0^* contiene los g. d. l. que van a resultar dependientes al imponer la continuidad C^1 .

La ecuación (10) tiene ahora la forma:

$$w^{(i)} = \mathbf{L} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{d}^{(i)} = \mathbf{L} (\mathbf{C}_0^{(i)} \mathbf{C}_1^{(i)}) (\mathbf{d}_0^*, \mathbf{d}_1^*)^T = \phi^{(i)*} \mathbf{d}^* = \sum_1^M \phi^{(i)*j} d_j^* \quad (10b)$$

donde $M = 3 [3 + 2(N+5)] + S(N-1)$

El sistema de ecuaciones (6) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi_n^{(3)*} (6) \mathbf{d}^* &= -\phi_n^{(1)*} (5) \mathbf{d}^* \\ \phi_n^{(1)*} (6) \mathbf{d}^* &= -\phi_n^{(2)*} (5) \mathbf{d}^* \\ \phi_n^{(2)*} (6) \mathbf{d}^* &= -\phi_n^{(3)*} (5) \mathbf{d}^* \end{aligned} \quad (11)$$

suponiendo $w_n = \phi_n^{(i)*} \mathbf{d}^*$

que se puede agrupar como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 \mathbf{d}_0^* + \mathbf{H}_1 \mathbf{d}_1^* &= \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_0^* &= -\mathbf{H}_0^{-1} \mathbf{H}_1 \mathbf{d}_1^* = \mathbf{H} \mathbf{d}_1^* \end{aligned} \quad (12)$$

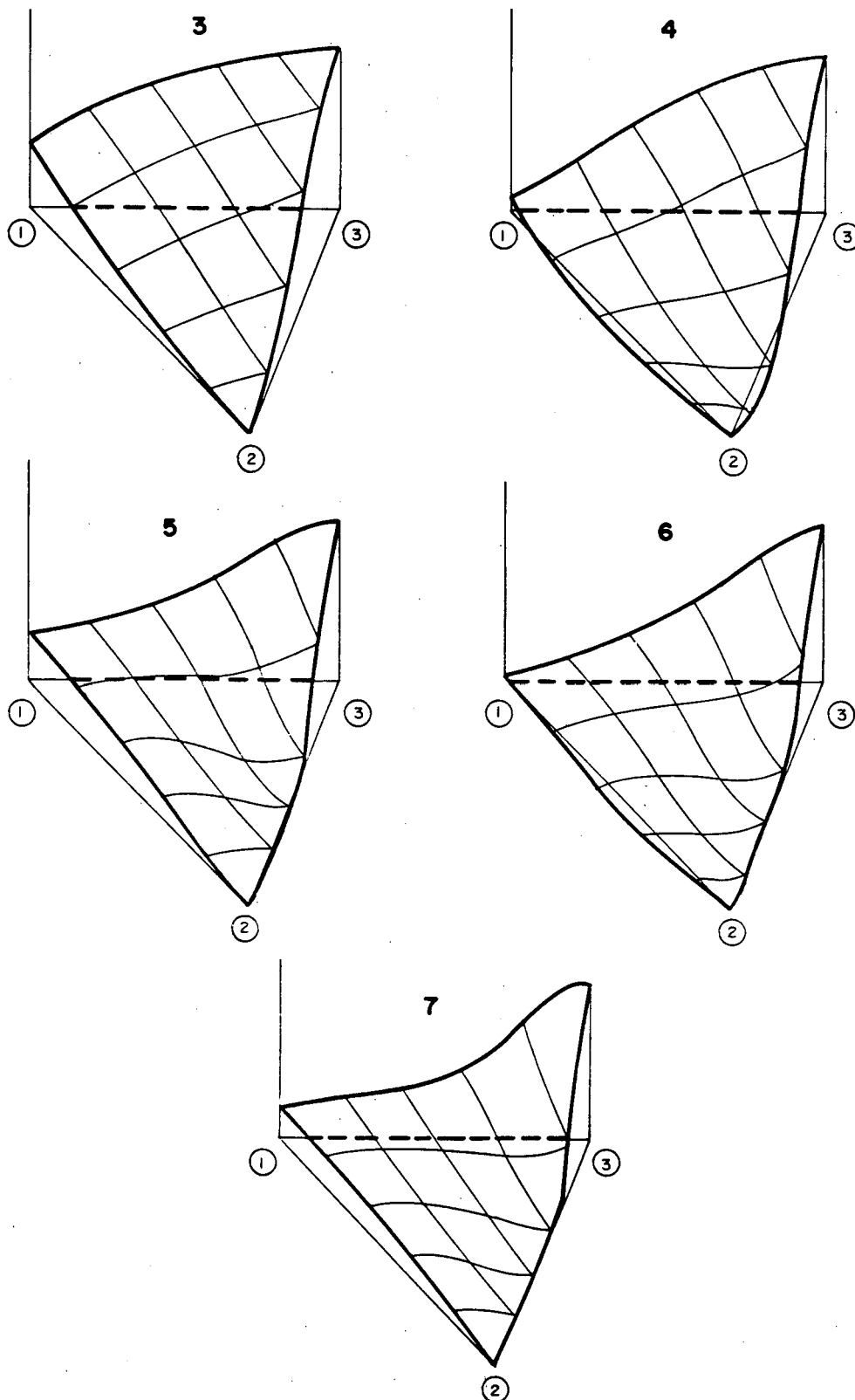


Figura 11.- Función de forma correspondiente a la flecha del nudo 3

De donde (10b) toma la expresión:

$$w^{(i)} = L(C_0^{(i)} C_1^{(i)}) (H d_1^*, d_1^*)^T = L(C_0^{(i)} H + C_1^{(i)}) d_1^* = L C d_1^* = \hat{\psi}^{(i)} d_1^* \quad (13)$$

En la Figura 11 se ha dibujado la función de forma correspondiente a la flecha en el nudo 3 para varios grados del polinomio ($\hat{\psi}^i$).

Matriz de rigidez elemental, condensación estática y ensamblaje

Usando las fórmulas (3) y (13) se obtienen la matriz de rigidez elemental y las fuerzas equivalentes en los nudos. Como los g.d.l. del nudo interior no se precisan en los cálculos, se condensan estáticamente.

Después se suman ordenadamente las matrices de rigidez elementales, para obtener la matriz de rigidez global, así como el vector de fuerzas equivalentes completo.

$$P = K d \quad (14)$$

donde

$$K = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} (B^i)^T D B^i dA$$

$$P = \sum_{i=1}^n \left\{ \iint_{A_i} \left\{ (B^i)^T D \epsilon_0^i + (\psi^i)^T b + (\psi^i)^T P \right\} dA_i + \int_{A \wedge A_i} (\psi^i)^T P_s ds \right\} \quad (15)$$

$n =$ número de elementos

Resultados

En cada uno de los tres subtriángulos de un elemento se define una función de forma. Los valores obtenidos en flechas y primeras derivadas son continuos en las líneas de separación entre subelementos —debido a la continuidad C^1 —. No ocurre lo mismo para las segundas y terceras derivadas —momento flector y esfuerzo cortante (Figura 12)—.

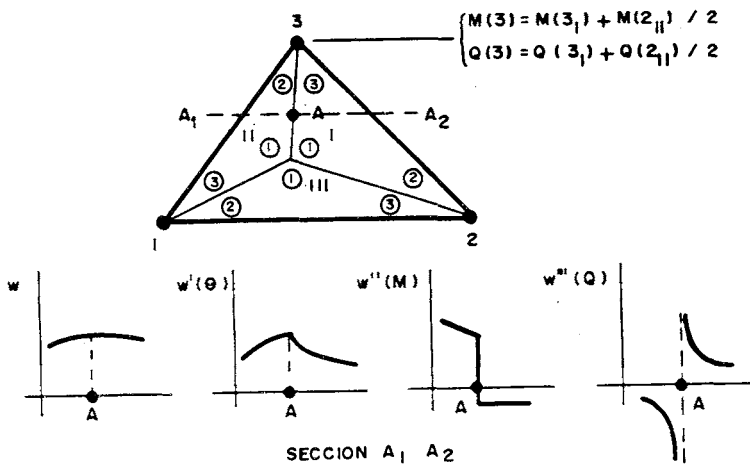


Figura 12.— Resultados. Tipo de continuidad

El valor adoptado como resultado final ha sido la media de los obtenidos en cada subelemento (Figura 12). También se ha utilizado la matriz de rigidez elemental para obtener los esfuerzos. La precisión se ha visto sensiblemente aumentada especialmente en lo que se refiere al esfuerzo cortante.

RESULTADOS NUMERICOS

Los elementos discutidos en este trabajo se han aplicado a numerosos casos para estudiar su comportamiento respecto a algunas variables de interés. Así la influencia de los distintos tipos de carga, condiciones de contorno, esviación de los elementos, relaciones de longitud entre lados y configuraciones de malla.

Carga y condiciones de apoyo

Como ejemplo típico se experimenta una placa cuadrada de lado "a" con un coeficiente de Poisson igual a 0.3. Se estudian dos casos: placa empotrada en el contorno sometida a una carga uniforme de intensidad q (Tabla 3), y placa simplemente apoyada en las esquinas bajo una carga puntual P en el centro (Tabla 4).

TABLA 3

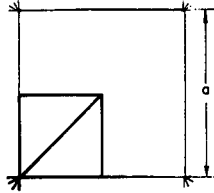
<p>CASO</p> <p>Placa cuadrada Contorno empotrado Malla: (ver figura) a: longitud del lado q: intensidad de la carga uniforme $\nu=0.3$ (coeficiente de Poisson)</p>		<p>RESULTADOS</p> <p>W: flecha central M: momento flector en el centro $M_1 M_2$: Momentos en el centro del lado Q: cortante en el centro del lado R: reacciones de Kirchhoff en el centro del lado</p> <p>DOF1: número total de g.d.l. DOF2: g.d.l. activos NDEG: grado del polinomio</p>
--	--	--

NDEG	DOF1	DOF2	W	M	M_1	M_2	Q	R
3	17	2	0.0005422	0.01480	-0.003904	-0.01301	0.05205	0.04750
4	27	6	0.0012921	0.03343	-0.01123	-0.03744	0.2221	0.2302
5	37	10	0.001265	0.02466	-0.01511	-0.05038	0.4319	0.4540
6	47	14	0.001263	0.02056	-0.01547	-0.05156	0.4515	0.4714
7	57	18	0.001266	0.02410	-0.01546	-0.05152	0.4545	0.4672
Exacto	16		0.00126	0.0231	-0.01540	-0.0513	0.4405	0.4403
Coeficiente			qa^4/D	qa^2	qa^2	qa^2	qa	qa

TABLA 4

CASO

Placa cuadrada
Esquinas simplemente
apoyadas
Malla: (ver figura)
 a : longitud del lado
 P : intensidad de la carga puntual
en el centro
 $\nu = 0.3$ (coeficiente de Poisson)



RESULTADOS

W : flecha en el centro
 W_1 : flecha en el centro del lado
 M : momento flector en el centro
 R_c : reacción de esquina
 $DOF1$: número total de g.d.l.
 $DOF2$: g.d.l. activos
 $NDEG$: grado del polinomio

$NDEG$	$DOF1$	$DOF2$	W	W_1	M	R_c
3	17	11	0.03765	0.02282	0.02569	0.13612
3	27	19	0.03891	0.02286	0.2067	0.2658
4	37	28	0.03907	0.02291	0.2009	0.2100
6	47	35	0.03911	0.02291	0.2038	0.2540
7	57	43	0.03912	0.02291	0.2017	0.2260
Exacto	<i>SAP4-LCCT9</i>		0.03904	0.02284	0.16217	0.2430
Coeficiente			Pa^2/D	Pa^2/D	P/a	P/a

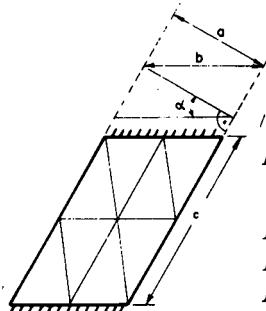
Esviación

Se han experimentado casos de placas rectangulares simplemente apoyadas en dos lados opuestos y libres en los otros dos. Con este tipo de casos se ha comprobado el funcionamiento de elementos con geometría irregular. Se han considerado tres casos de esviajes, y un máximo de grado de polinomio interpolante de 4. Se han evitado así grandes esfuerzos de computación y los resultados sólo expresan la tendencia. (Tabla 5).

TABLA 5

CASO

Placa esviada
 b, c : longitudes lados
 b : lado simplemente apoyado
 c : lado libre
Malla: (ver figura)
 q : intensidad de la carga uniforme
 $\nu = 0.3$ (coeficiente de Poisson)



RESULTADOS

W : flecha en el centro
 M : momento flector en el centro
 $DOF1$: número total de g.d.l.
 $DOF2$: g.d.l. activos
 $NDEG$: grado del polinomio

Influencia de la malla

La importancia del tipo de disposición de los elementos para cubrir el dominio se puede ver en la Figura 13, aplicada a un caso de carga uniforme sobre una placa cuadrada empotrada en su contorno. Los mejores resultados se obtienen para la malla tipo *C*, especialmente para los casos *1C* y *2CE*. Los resultados son similares para otras condiciones de contorno y otros tipos de carga. La convergencia monótonica está asegurada ya que la continuidad es C^1 .

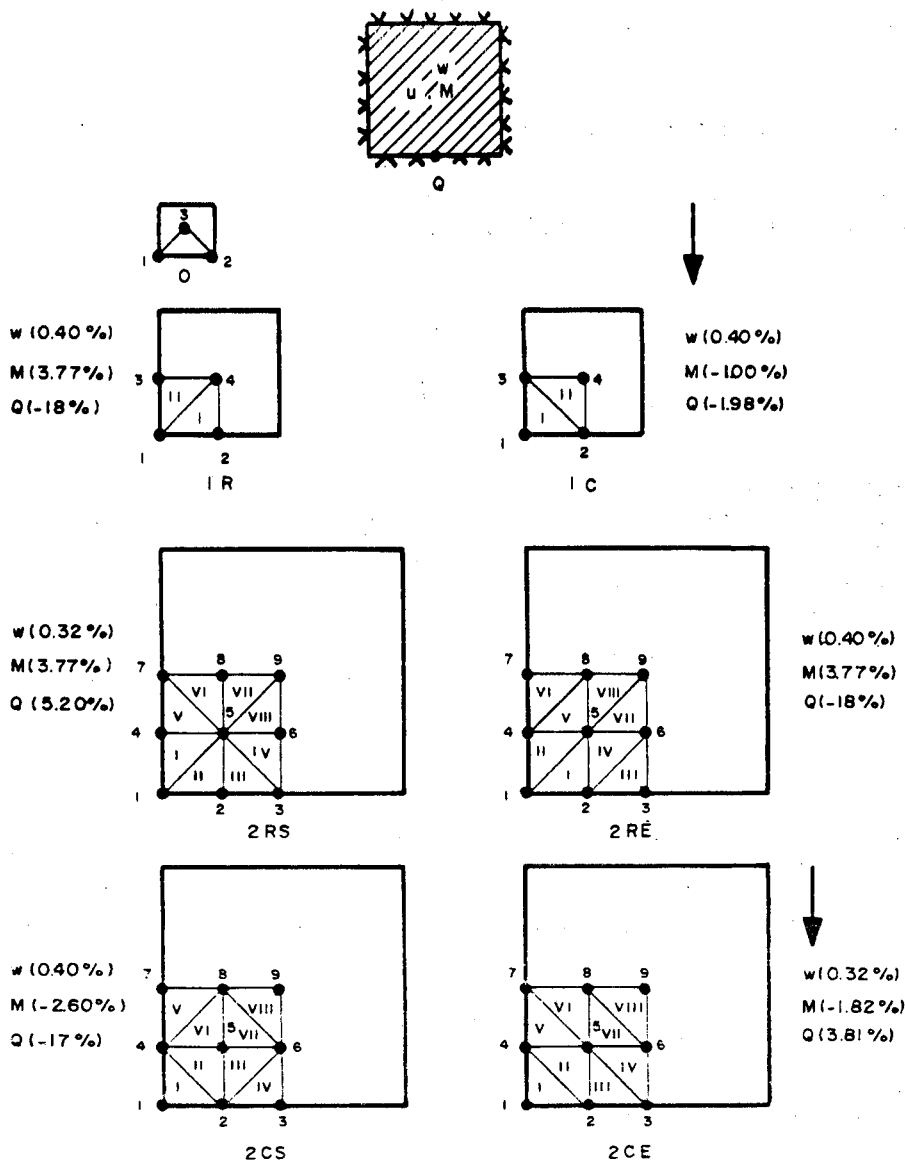


Figura 13.— Tipos de malla utilizados

Errores comparados con otros tipos de elementos

La velocidad de convergencia y el trabajo de computación se han acotado de forma relativa a otros elementos. La variable de comparación elegida ha sido el número de grados de libertad, aunque no represente exactamente el esfuerzo de computación —en elementos de alto grado de polinomio interpolante la matriz de rigidez exige mucho tiempo de operaciones—.

El resultado se ha expresado en las Figuras 14 y 15, para los valores del momento flector y la flecha central. Los valores de cortante no se suelen dar generalmente en la literatura, debido a que el error suele ser grande. Sin embargo, los valores obtenidos en esta familia son bastante aproximados.

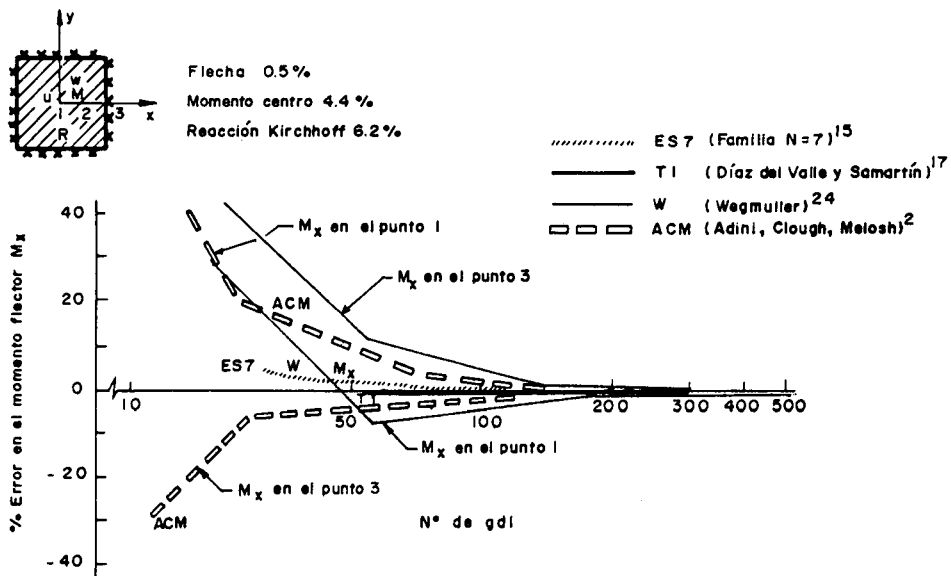


Figura 14.— Porcentaje de error en el momento flector M_1 en función del número de grados de libertad. Placa cuadrada con bordes empotrados y sometida a carga uniforme.

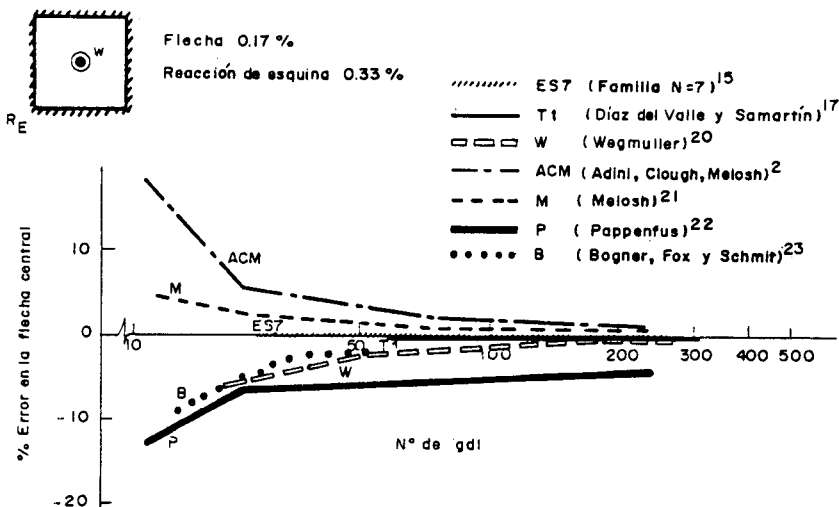


Figura 15.— Porcentaje de error en la flecha central en función del número de grados de libertad. Placa cuadrada con lados simplemente apoyados y carga puntual en el centro.

APLICACIONES Y CONCLUSIONES

La convergencia con este tipo de elementos se puede obtener de dos formas diferentes:

- por refinamiento de la malla (convergencia h), como en cualquier otro tipo de elemento,
- por un incremento del orden de interpolación del polinomio en el elemento (convergencia h^k).

Por la experimentación efectuada, parece que este segundo método es más eficaz. Sobre todo en el caso de que los elementos se repitan a lo largo del dominio. Se reduce así drásticamente el esfuerzo de cálculo de la matriz de rigidez de un elemento de alto grado.

La convergencia es monotónica como consecuencia de la continuidad C^1 .

En este tipo de elementos se pueden tener en cuenta los cambios de material o topológicos de un elemento a otro. Sin embargo los hiperelementos son más aproximados en los resultados de derivadas de orden alto ya que aparecen con g.d.l. Sin embargo en este caso las altas derivadas —duales de las derivadas de bajo orden— se pueden obtener mediante el uso de la matriz de rigidez.

Los resultados obtenidos se refieren a polinomios con grados comprendidos entre tres y siete, y se ha usado integración numérica. Cuando se usan derivadas de alto orden pueden aparecer ruidos numéricos y las matrices presentan una gran sensibilidad.

Es muy sencillo el uso de esta familia en el cálculo de láminas, ya que las derivadas de alto orden se compatibilizan sin necesidad de cambios.¹¹

EXTENSIONES FUTURAS

Se pueden elaborar tablas de resultados para distintas condiciones de apoyo, espesor de la placa y constantes elásticas.

La continuidad intersubelemental conseguida es C^1 . Si es o no posible conseguir una mayor y de qué orden queda por estudiar²⁴. Lo mismo ocurre con la influencia de qué g.d.l. se eliminan en el nudo central para conseguir dicha continuidad.

La extensión de este método a otros problemas —de topografía, diseño de carreteras...— está llevándose a cabo en la actualidad.

Como el condicionamiento de las matrices depende en gran parte de las derivadas de orden superior, es muy importante acotar el orden de dicho error.

Los resultados de las variables que no son grados de libertad se pueden obtener de diversas formas:

- Por medio de las funciones de forma.
- Por medio de la matriz de rigidez para las variables duales de los g.d.l.
- Por medio de los valores de las funciones de forma y sus derivadas en los puntos de integración.

La comparación de los métodos anteriores puede ser de gran interés⁹. De hecho el segundo método se ha utilizado en este trabajo dando muy buenos resultados.

Para el caso de contornos irregulares, la extensión a elementos curvos sería muy útil. La amplia experimentación numérica se ha llevado a cabo sólo para polinomios de

grado menor que siete, ya que no existen publicadas tablas de integración más extensas. La ampliación de estas tablas podría ampliar el uso de estos elementos.

Si se usan al mismo tiempo varios de los elementos de la familia se puede ahorrar bastante esfuerzo de cálculo. Los elementos de grado más bajo se pueden utilizar cerca del contorno, aunque se necesite gran número de elementos. Sin embargo se pueden utilizar los elementos de alto grado en grandes zonas interiores. Este planteamiento exigiría que la familia comprendiera elementos de transición, que se pueden obtener bien directamente o bien mediante la reducción del grado a lo largo de los lados necesarios.

El uso conjunto de diferentes elementos conlleva la introducción de una nomenclatura general de las familias jerárquicas de elementos, que ordenando todos ellos permita escogerlos de forma sencilla.

REFERENCIAS

1. O.C. Zienkiewicz. "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill. C. London, (1979).
2. A. Adini y R.W. Clough. "Analysis of plate bending by the Finite Element Method". A Report to *Nacional Science Foundation*, U.S.A. G. 7337, (1961).
3. G.P. Bazeley, Y.K. Cheung, B.M. Irons y O.C. Zienkiewicz. "Triangular elements in bending conforming and non-conforming solution". Proc. *Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.* Air Force Inst. Tech. Wright Patterson A.F. Base, Ohio, October, (1965).
4. B.M. Irons, "The patch test for engineers". *Conf. Atlas Computing Center*, Harwell U.J. March., (1974).
5. B.M. Irons and M. Loikkanen, "An Engineers Defence of the Patch Test" *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 19, n.º 9, (1983).
6. B.M. Irons, and J.K. Draper, "Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending". *J.A.I.A.A.*, 3,5, (1965).
7. J.L. Batoz, K.J. Bathe, y L.W. Ho. "A study of three node triangular plate bending elements". *Int. Jour. Num. Meth. Eng.* Vol. 15, n.º 12, (1980).
8. A.K. Noor and W.D. Pilkey. "State of the Art Surveys of Finite Element Methods". *AMD special publication*, (1981).
9. A. Peano. "Conforming approximations for Kirchhoff plates and Shells". *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 14, n.º 9, (1979).
10. A. Samartin. "Aplicación del Método de los Elementos Finitos al Análisis Estructural de Puentes". Discurso de Inauguración del Curso Académico, 1979-80. *Universidad de Santander*, (1979)
11. J.F. Moya, P. Fuster and S. Monleon. "Una teoría variacional para el análisis de láminas hiperelásticas basada en una jerarquización a orden N del modelo cinemático transversal. Aplicación de primer orden al estudio del comportamiento no lineal y de la estabilidad". *E.T.S de Ingenieros de Caminos*, Universidad Politécnica de Valencia. Junio, (1984).
12. R.W. Clough and J.L. Tocher. "Finite Element stiffness Matrices for analysis of Plate Bending". Proc. *Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech.* Air Force Inst. of Techn. Wright Patterson, A.D. Base Ohio, (1965).
13. R. Clough, y C. Felippa. "A reformed quadrilateral element for analysis of plate bending", Proc. II. *Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.* Air Force Inst. of Techn. Wright Patterson A F. Base, Ohio, (1968).
14. A. Samartin. "Un estudio sobre la exactitud del Método de los Elementos Finitos. Aplicación a la barra de sección variable bajo esfuerzos axiales". *Universidad de Santander*. Noviembre, (1980).
15. J. Torres. "Una familia de Elementos Simples Conformes Clase C^1 ". *Ph. D. Dissertation*. Departamento de Análisis de las Estructuras. Escuela de Ingenieros de Caminos de Santander, (1984).
16. T.H. Evans. *Journal Appl. Mechanics*, Vol. 6. pág. 4, (1939).
17. J. Díaz del Valle. "Una contribución al estudio de hiperelementos finitos en placas" *Ph. D. Dissertation*. Dpto. de Análisis de las Estructuras de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Santander, (1980).

18. U.P. Jensen. *Illinois University*. Bulletin 332, (1941).
19. S. Timoshenko and S. Woinowiki-Krieger. "*Theory of Plates and Shells*". McGraw-Hill, 2nd. ed. (1959).
20. A. Vegmuler. "Finite element analysis of elasticplastic plates and excetrically stiffned plates". *Ph. D. Dissertation*, Civil Eng. Dep. Lehigh University, (1971).
21. R.J. Melosh, "A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending", *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. **28**, 34, (1961).
22. S.W. Pappewfuss. "Lateral plate deflection by stiffness matrix methods with application to a margee", *M.S. Thesis*, Dept. of Civil Eng. Univ. of Washington, Seattle, (1969).
23. F.K. Bogner, R.L. Fox y L.A. Schmit. "The generation of Interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formules". *Proc. First Conf. in Matrix Methods in Struct. Mech.* Wright Patterson Air Force Base, Ohio, November, (1965).
24. M. Gasca and J.I. Maeztu, "On Lagrange and Hermite Interpolation in R^K ". *Numer. Math.* Vol. **39**, 1-14, (1982).
25. J. García de Jalón. "Contribución a la resolución numérica del problema termoelástico en sólidos con simetría de revolución". *Ph. D. Dissertation*. E.T.S. Ing. Industriales. San Sebastián, (1977).
26. B.M. Irons, "A Conforming Quartic Triangular Element for Plate Bending". *Int. J. Num. Eng.* Vol. **1**, n.º 1, (1969).

APENDICE

FORMULACION DEL TRIANGULO

Los valores de la figura A.1 son según sigue (se considera permutación circular $i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; k = 3, 1, 2$):

$$a_i = x_k - x_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

con
$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{i=1}^3 b_i = 0$$

$$a_i = -(a_j + a_k)$$

$$b_i = -(b_j + b_k)$$

$$d_i = a_k \operatorname{sen} \theta_i + b_k \operatorname{cos} \theta_i = \frac{a_i a_k + b_i b_k}{e_i}$$

$$e_i = a_i \operatorname{sen} \theta_i + b_i \operatorname{cos} \theta_i = -\sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

$$f_i = a_j \operatorname{sen} \theta_i + b_j \operatorname{cos} \theta_i = \frac{a_i a_j + b_i b_j}{e_i}$$

$$H_i = a_k \operatorname{cos} \theta_i - b_k \operatorname{sen} \theta_i = \frac{a_i b_j - b_i a_j}{e_i}$$

$$-H_i = a_j \operatorname{cos} \theta_i - b_j \operatorname{sen} \theta_i = \frac{a_i b_k - b_i a_k}{e_i}$$

con
$$d_i + f_i + e_i = 0$$

El área del triángulo y las coordenadas intrínsecas son:

$$2A = a_i b_k - b_i a_k = -(a_i b_j - b_i a_j)$$

$$\lambda_i = d_i / -e_i$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i = f_i / -e_i$$

$$i = 1, 2, 3$$

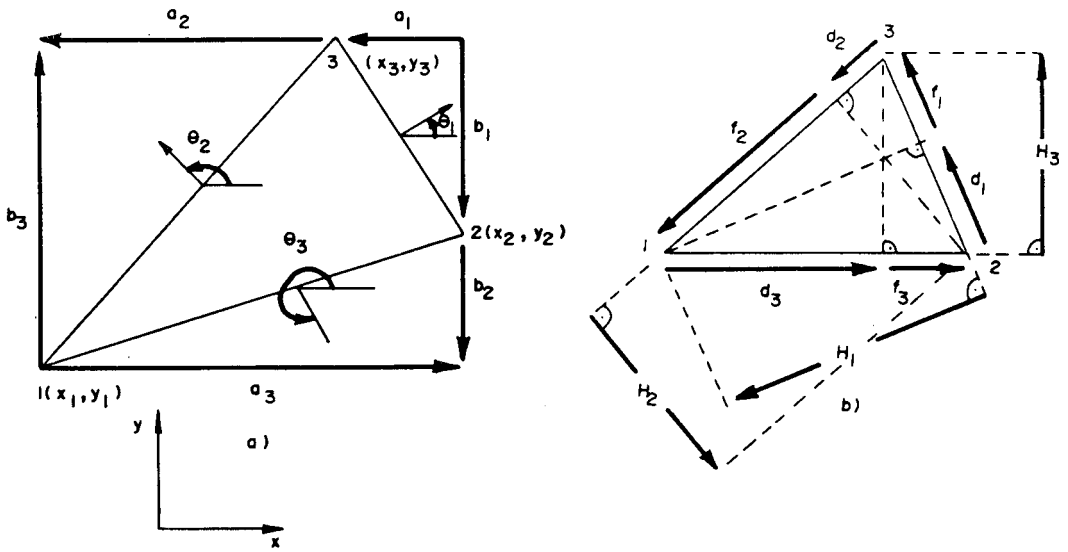


Figura A. 1.— Parámetros del triángulo

En la figura A. 2 se presentan las coordenadas triangulares:

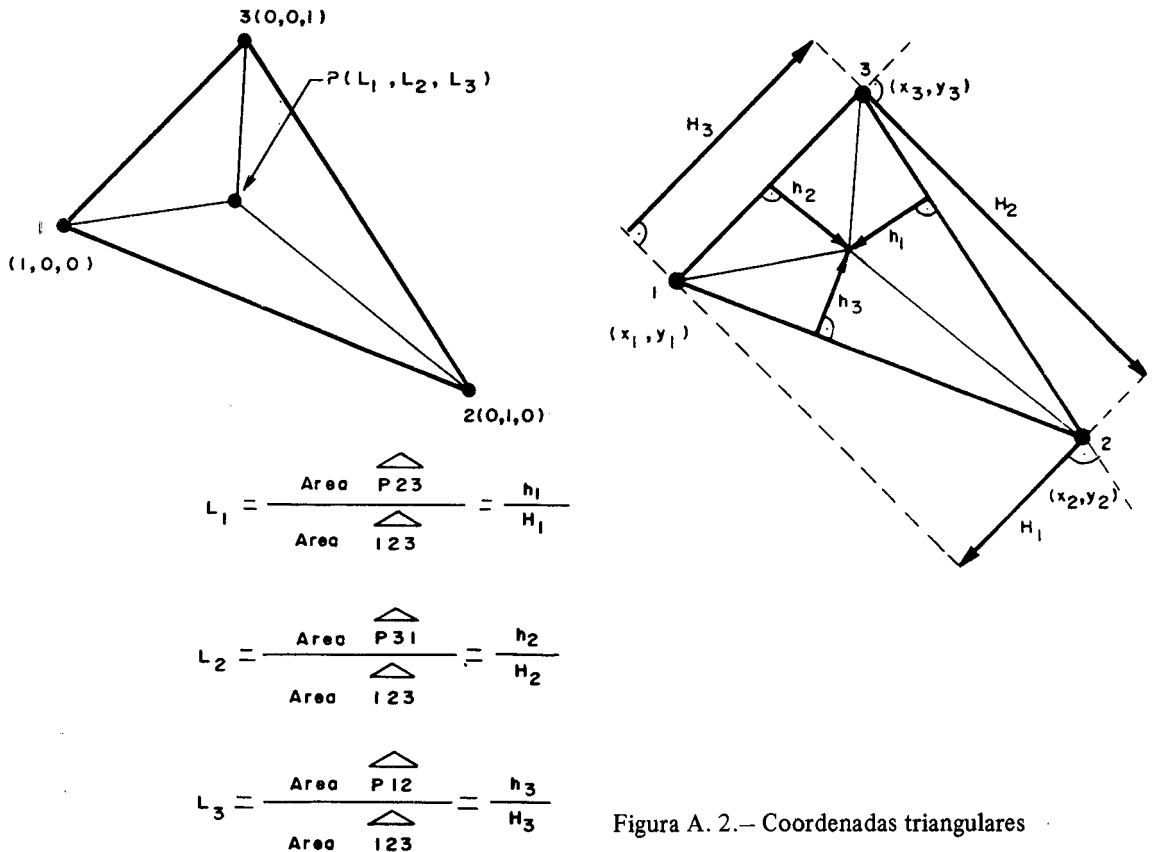


Figura A. 2.— Coordenadas triangulares

La relación entre las coordenadas triangulares y cartesianas es como sigue:

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_{23} & b_1 & a_1 \\ 2A_{31} & b_2 & a_2 \\ 2A_{12} & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

donde $2A_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$

y la relación inversa es:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

La relación entre las coordenadas cartesianas generales y locales (Figura A.3) es:

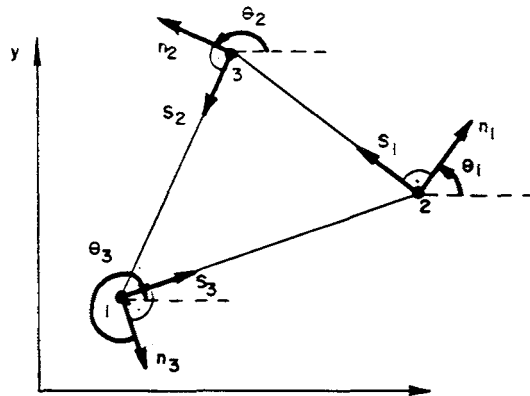
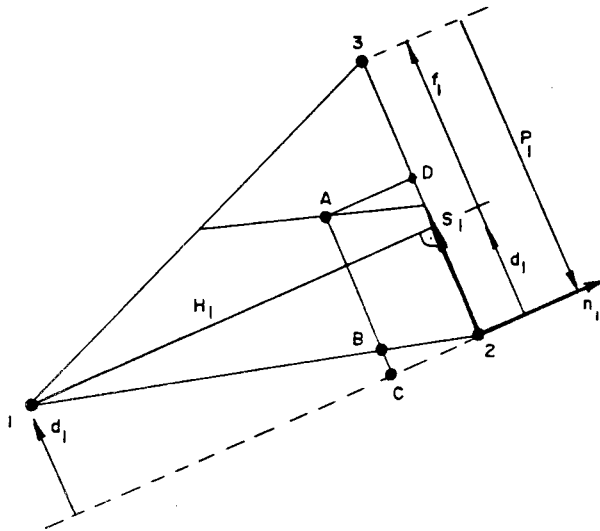


Figura A. 3.- Coordenadas cartesianas locales

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{e_1} \begin{bmatrix} +b_1 & a_1 \\ -a_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_j \\ y - y_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{e_1} \begin{bmatrix} b_1 & -a_1 \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & x_j \\ + & \\ s_1 & y_j \end{bmatrix}$$

Considerando la Figura A.4 la relación entre las coordenadas cartesianas locales y las triangulares se puede expresar del siguiente modo:



$$n_i = \left| \overline{AD} \right|$$

$$s_i = \left| \overline{AB} \right| + \left| \overline{BC} \right|$$

$$\left| \overline{AD} \right| = H_i L_i$$

$$\left| \overline{AB} \right| = -e_i L_3$$

$$\left| \overline{BC} \right| = d_i L_i$$

Figura A. 4.

$$\begin{bmatrix} n_i \\ s_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_i & 0 & 0 \\ d_i & -e_i & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_i \\ L_k \\ L_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_i \\ L_k \\ L_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} e_i & 0 & 0 \\ d_i & H_i & 0 \\ f_i & -H_i & 2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_i \\ s_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las derivadas entre coordenadas son:

$$\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A} \qquad \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{a_i}{2A}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial n_i} = \frac{e_i}{2A} \qquad \frac{\partial L_i}{\partial s_i} = 0$$

$$\frac{\partial L_j}{\partial n_i} = \frac{f_i}{2A} \qquad \frac{\partial L_j}{\partial s_i} = \frac{-H_i}{2A}$$

$$\frac{\partial L_k}{\partial n_i} = \frac{d_i}{2A} \qquad \frac{\partial L_k}{\partial s_i} = \frac{H_i}{2A}$$

La relación entre los parámetros de un elemento y de cada subelemento se puede expresar como sigue:

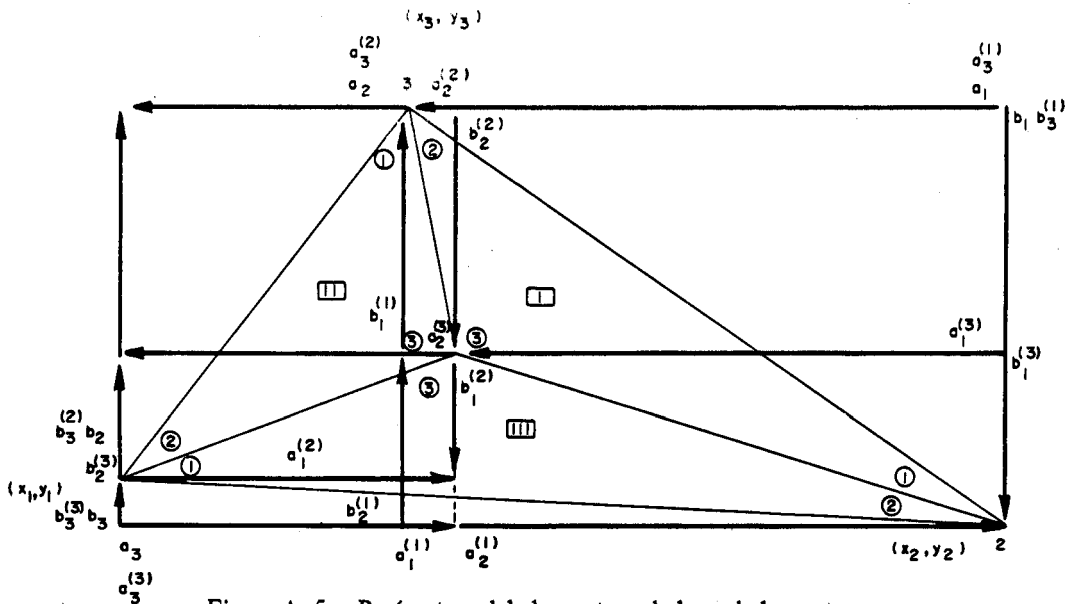


Figura A. 5.- Parámetros del elemento y de los subelementos

Se considera que el centro, vértice número 3 de la Figura A.5 es el baricentro:

$$a_1^{(1)} = -a_2^{(1)} = -x_k = -x_i + a_j$$

$$a_2^{(1)} = -a_1^{(k)} = +x_j = x_i + a_k$$

$$a_3^{(1)} = a_1$$

$$b_1^{(1)} = -b_2^{(1)} = y_k = y_i + b_j$$

$$b_2^{(1)} = -b_1^{(k)} = -y_j = -y_i + b_k$$

$$b_3^{(1)} = b_1$$

Como el nudo 3 de cada subelemento es el c.d.g.:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

Así que queda:

$$a_1^{(i)} = (a_j - a_i)/3 \quad b_1^{(i)} = (b_j - b_i)/3$$

$$a_2^{(i)} = (a_k - a_i)/3 \quad b_2^{(i)} = (b_k - b_i)/3$$

$$a_3^{(i)} = a_i \quad b_3^{(i)} = b_i$$

y para las coordenadas triangulares (Figura A.6).

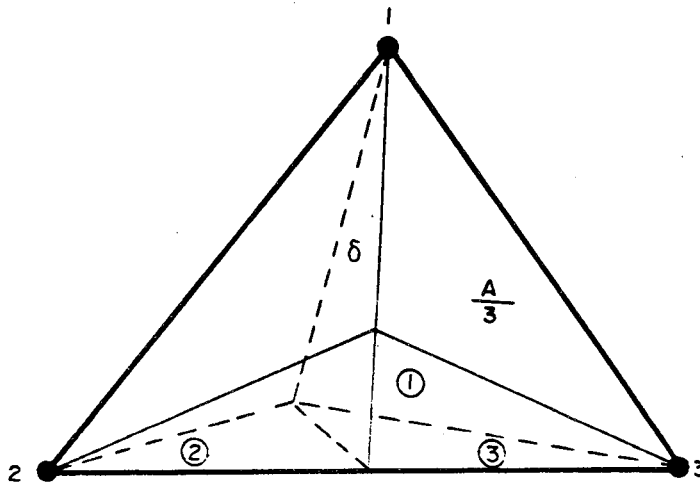


Figura A. 6.

$$L_i^{(i)} = 3L_i \quad L_i = \frac{L_i^{(i)}}{3}$$

$$L_j^{(i)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}L_i + \frac{1}{2}L_j - \frac{1}{2}L_k \quad L_j = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}L_i^{(i)} + \frac{1}{2}L_j^{(i)} - \frac{1}{2}L_k^{(i)}$$

$$L_k^{(i)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}L_i - \frac{1}{2}L_j + \frac{1}{2}L_k \quad L_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}L_i^{(i)} - \frac{1}{2}L_j^{(i)} + \frac{1}{2}L_k^{(i)}$$

EXPRESION DE UN POLINOMIO Y DE SUS DERIVADAS

Polinomio si $S(N) = N(N+1)/2$

$$p(L_1, L_2, L_3) = \sum_{\substack{i, j, k=0 \\ i+j+k=N}} \lambda_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k = \sum_{n=1}^{s(N+1)} \alpha N_n LN_n$$

donde

$$i = i(N,n), \quad j = J(N,n), \quad K = K(N,n)$$

DERIVADAS NATURALES

$$P_m = \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} p}{\partial L_1^\alpha \partial L_2^\beta \partial L_3^\gamma} = \sum_{n=1}^{s(N+1)} \alpha N_n \frac{i!}{(i-\alpha)!} \frac{j!}{(j-\beta)!} \frac{k!}{(k-\gamma)!} x$$

$$x L_1^{(i-\alpha)} L_2^{(j-\beta)} L_3^{(k-\gamma)} = \sum_{n=1}^{s(N+1)} \alpha N_n \frac{i!}{(i-\alpha)!} \frac{j!}{(j-\beta)!} \frac{k!}{(k-\gamma)!} LN_{n,\alpha\beta\gamma}$$

donde $LN_{n,\alpha\beta\gamma} = 0$ si $i < \alpha$ ó $j < \beta$ ó $k < \gamma$

$$\alpha = \alpha(m); \quad \beta = \beta(m); \quad \gamma = \gamma(m)$$

DERIVADAS CARTESIANAS GENERALES

$$\bar{P}_m = \frac{\partial^{j+k} p}{\partial x^j \partial y^k} = \left\{ \frac{1}{2A} (b_1 p, L_1 + b_2 p, L_2 + b_3 p, L_3) \right\}^{(j)} x \left\{ \frac{1}{2A} (a_1 p, L_1 + a_2 p, L_2 + b_3 p, L_3) \right\}^{(k)}$$

con $j = j(m), \quad k = k(m)$

$$\bar{P}_m = \left(\frac{1}{2A} \right)^{j+k} \sum_{\nu=1}^{s(j+1)} \sum_{\mu=1}^{s(k+1)} A_{j\nu} B_{k\mu} \frac{\partial^{j+k} p}{\partial L_1^{j_1+k_1} \partial L_2^{j_2+k_2} \partial L_3^{j_3+k_3}}$$

con:

$$A_{j\nu} = \frac{j!}{j_1! j_2! j_3!} b_1^{j_1} b_2^{j_2} b_3^{j_3}$$

$$B_{k\mu} = \frac{k!}{k_1! k_2! k_3!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3}$$

donde:

$$j_1 = j_1(j, \nu), \quad j_2 = j_2(j, \nu), \quad j_3 = j_3(j, \nu)$$

$$k_1 = k_1(k, \mu), \quad k_2 = k_2(k, \mu), \quad k_3 = k_3(k, \mu)$$

DERIVADAS CARTESIANAS LOCALES

$$\begin{aligned} \bar{P}_m^i &= \partial^{j+k} p / \partial s_j^i \partial n_i^k = \\ &= \left\{ \frac{1}{2A} (a_{11} p, L_1 + a_{12} p, L_2 + a_{13} p, L_3) \right\}^{(j)} \times \left\{ \frac{1}{2A} (b_{11} p, L_1 + b_{12} p, L_2 + b_{13} p, L_3) \right\}^{(k)} \end{aligned}$$

con $j = j(m)$, $k = k(m)$

$$a_{ii} = 0, \quad a_{ij} = -H_i, \quad a_{ik} = H_i \quad \text{y} \quad (0^\circ = 1)$$

$$b_{ii} = e_i, \quad b_{ij} = f_i, \quad b_{ik} = d_i$$

donde i es el número del lado

$$\bar{P}_m^i = \left(\frac{1}{2A} \right)^{j+k} \sum_{\nu=1}^{s(j+1)} \sum_{\mu=1}^{s(k+1)} \bar{A}_{j\nu}^i \bar{B}_{k\mu}^i \frac{\partial^{j+k} p}{\partial L_1^{j_1+k_1} \partial L_2^{j_2+k_2} \partial L_3^{j_3+k_3}}$$

con:

$$\bar{A}_{j\nu}^i = \frac{j!}{j_1! j_2! j_3!} (a_{11})^{j_1} (a_{12})^{j_2} (a_{13})^{j_3}$$

$$\bar{B}_{k\mu}^i = \frac{k!}{k_1! k_2! k_3!} (b_{11})^{k_1} (b_{12})^{k_2} (b_{13})^{k_3}$$

donde:

$$j_1 = j_1(j, \nu), \quad j_2 = j_2(j, \nu), \quad j_3 = j_3(j, \nu)$$

$$k_1 = k_1(k, \mu), \quad k_2 = k_2(k, \mu), \quad k_3 = k_3(k, \mu)$$

VARIACION DEL ESPESOR

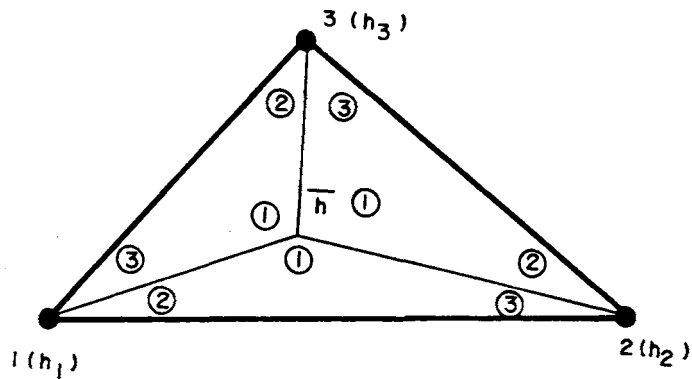


Figura A. 7.- Espesores

$$\bar{h} = h \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$$

En el subelemento *i*:

$$\bar{h}^{(i)}(L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, L_3^{(i)}) = \bar{h} L_1^{(i)} + h_1 L_2^{(i)} + \bar{h}_k L_k^{(i)}$$