

PRIMERA EXCURSION DE ALGUNOS OSCILADORES NO-LINEALES SIMPLES

B. F. SPENCER, Jr.*

L. A. BERGMAN**

J. C. HEINRICH[†]

RESUMEN

Se utiliza un método de elementos finitos de Petrov-Galerkin para determinar la probabilidad de fallo y los momentos de tiempo ordinarios en problemas de primera excursión de osciladores simples de un grado de libertad. No se establecen restricciones en la estrecha banda de la respuesta, amplitud del campo o magnitud de la no linealidad. La versatilidad del método se ilustra con ejemplos clásicos de osciladores de VanderPol y Duffing para varias anchuras de la región de seguridad, no linealidades y coeficientes de amortiguamiento. La exactitud y eficiencia computacional de la solución se demuestra por comparación de los resultados de elementos finitos con simulaciones de Monte Carlo.

SUMMARY

A robust Petrov-Galerkin finite element method is used to determine the survival probability and ordinary moments of time to first passage for simple single-degree-of-freedom nonlinear oscillators. No assumptions are made about the narrow bandedness of the response, width of bounds, or magnitude of the nonlinearity. The versatility of the method is illustrated for the classical cases of VanderPol and Duffing oscillators for various bound widths, nonlinearities and damping ratios. The accuracy and computational efficiency of the solution is then demonstrated by comparison of the finite element results with extensive Monte Carlo simulation.

INTRODUCCION

Un problema importante en el estudio de sistemas dinámicos es el de determinar la probabilidad de que un sistema, cuando se lo somete a una excitación aleatoria, no fallará durante un período determinado. Cuando el fallo ocurre la primera vez que el sistema responde con una excursión que cae fuera de una región de seguridad prescrita, el proceso de fallo se conoce por el nombre de problema de la primera

*Department of Theoretical and Applied Mechanics; University of Illinois, Urbana-Champaign, Urbana, IL 61801

**Department of Aeronautical and Astronautical Engineering; University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL 61801

[†]Department of Aerospace and Mechanical Engineering; University of Arizona, Tucson, AZ 85721

Recibido: Marzo 1985

excursión (*first passage problem*). En los últimos años esta clase de problemas han sido objeto de considerable interés debido a su aplicación al problema más general de la fiabilidad de sistemas. Investigaciones previas enfocadas a la solución del problema de la primera excursión, en particular en su aplicación a estructuras simples de interés en ingeniería, han involucrado a una gran cantidad de investigadores y metodologías. Estos esfuerzos, sin embargo, no han logrado obtener una solución exacta del problema de la primera excursión, ni siquiera para el problema del oscilador lineal con un sólo grado de libertad. Como consecuencia, con los años han ido apareciendo una gran cantidad de teorías de aproximación, con la mayor parte del trabajo basado en el oscilador lineal. En la práctica, todas las estructuras exhiben un cierto grado de no-linealidad; sin embargo el problema de la primera excursión para sistemas no-lineales sólo ha sido investigado por un número limitado de autores. Estas aproximaciones a la solución del problema de la primera excursión para sistemas no-lineales incluyen: simulaciones digitales del proceso de respuesta^{9,12}; un modelo discreto análogo del método continuo de Fokker-Planck o modelo de trayectoria aleatoria¹⁹; el modelo de la envolvente de la respuesta (*response envelope*) por un proceso de Markov^{13,15,17,18} e investigaciones experimentales¹⁶.

En este trabajo, presentamos detalles de la solución del problema de la primera excursión para osciladores no-lineales sin memoria obtenidos por un método de elementos finitos mediante una formulación de Petrov-Galerkin. Examinamos dos osciladores no-lineales bien conocidos, y la exactitud de la solución se demuestra mediante comparaciones con simulaciones extensivas por medio del método de Monte Carlo. Aún cuando el método de trayectorias aleatorias presentado en la referencia¹⁹ produce resultados razonables en el caso del oscilador no lineal, las extensiones al caso no-lineal parecen erróneas, y por lo tanto omitimos comparaciones directas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos el oscilador no-lineal de un grado de libertad que se muestra en la Figura 1 cuya respuesta está gobernada por la ecuación diferencial estocástica

$$\ddot{X} + H(X(t), \dot{X}(t)) = -\ddot{N}(t), \quad t > 0 \quad (1)$$

$$X(0) = x_0 \quad (2)$$

$$\dot{X}(0) = \dot{x}_0 \quad (3)$$

donde $X(t)$ es un proceso de desplazamiento relativo aleatorio, $H(\cdot, \cdot)$ es un operador que representa la fuerza restauradora del oscilador, y $\ddot{N}(t)$ es un ruido blanco de Gauss (*Gaussian white noise*) que representa una aceleración de la base. La media y la covarianza del proceso de excitación $\ddot{N}(t)$ están dadas por

$$E[\ddot{N}(t)] = 0 \quad (4)$$

$$E[\ddot{N}(t) \ddot{N}(t + t')] = 2\pi S_0 \delta(t') \quad (5)$$

donde S_0 es la magnitud de la densidad espectral bilateral constante, y $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac.

Está bien establecido⁵ que la respuesta dada por $\mathbf{X}(t) = [X(t), \dot{X}(t)]^T$ es un proceso vectorial de Markov si la correlación en el tiempo de la excitación es mucho menor que la escala de tiempo característica del oscilador. Por lo tanto, toda la teoría que

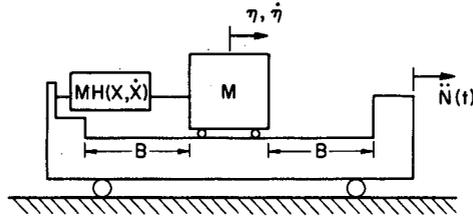


Fig. 1.— Oscilador de un sólo grado de libertad con fuerza restauradora no-lineal sometido a una aceleración en forma de ruido blanco de Gauss estacionario en la base; $x(t) = \eta(t) - N(t)$.

acompaña esta clase de problemas se hace utilizable, y se puede derivar un problema de valor inicial de contorno bien formulado que describe el comportamiento de la primera excursión del sistema^{6,20}.

Para reducir el número de parámetros, normalizamos las variables independientes usando las estadísticas estacionarias de los sistemas lineales asociados. Por lo tanto hacemos

$$x = x_o / \sigma \tag{6}$$

$$y = \dot{x}_o / \sigma \omega_n \tag{7}$$

$$\tau = \omega_n t / 2\pi \tag{8}$$

y

$$\sigma^2 = \frac{\pi S_o}{2\zeta \omega_n^3} \tag{9}$$

donde σ^2 es la varianza de la respuesta del desplazamiento estacionario para el sistema lineal asociado; esto es, cuando $H(X, \dot{X}) = 2\zeta \omega_n \dot{X} + \omega_n^2 X$. El problema de valor inicial de contorno toma la forma

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial F}{\partial \tau} = 2\zeta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + y \frac{\partial F}{\partial x} - G(x,y) \frac{\partial F}{\partial y} \tag{10}$$

donde

$$F = F(\tau | x, y) \equiv \text{función de distribución de la probabilidad de supervivencia} \tag{11}$$

$$F(\tau | B, y) = 0, \quad y > 0 \tag{12a}$$

$$F(\tau | -B, y) = 0, \quad y < 0 \tag{12b}$$

$$F(\tau | x, y) = 0, \quad |y| \rightarrow \infty \tag{12c}$$

$$F(0 | x, y) = 1, \quad x, y \in \Omega \tag{13}$$

Aquí

$$G(x,y) = \frac{H(\sigma x, \sigma \omega_n y)}{\sigma \omega_n^2} \tag{14}$$

y el dominio de seguridad Ω dado en las ecuaciones (12a-c) se muestra en la Figura 2. La función densidad de probabilidad del tiempo de la primera excursión está dada por

$$g(\tau | x, y) = - \frac{\partial F(\tau | x, y)}{\partial \tau}, \quad (15)$$

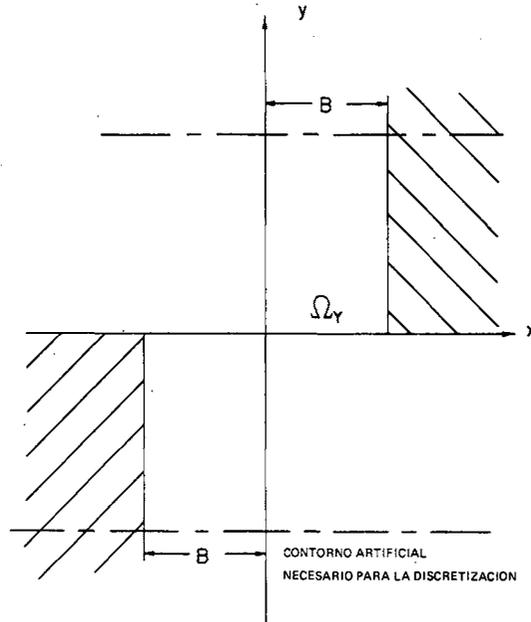


Fig. 2.— Dominio de seguridad Ω_Y .

ya la función de distribución acumulativa del tiempo para la primera excursión, o la probabilidad de fallo, está dada por el complemento de $F(\tau | x, y)$,

$$P(\tau | x, y) = 1 - F(\tau | x, y). \quad (16)$$

Finalmente, los momentos ordinarios de tiempo para la primera excursión están dados por

$$T^{(n)}(x, y) = \int_0^{\infty} \tau^n g(\tau | x, y) d\tau. \quad (17)$$

Integrando las ecuaciones (10) y (12) con respecto al tiempo conduce a la ecuación generalizada de Pontriagin-Vitt que describe directamente el comportamiento estadístico de los momentos del proceso de la primera excursión. Este problema está dado por²

$$2\zeta \frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial y^2} + y \frac{\partial T^{(n)}}{\partial x} - G(x, y) \frac{\partial T^{(n)}}{\partial y} = \frac{-n}{2\pi} T^{(n-1)} \quad (18)$$

$$T^{(n)} \equiv T^{(n)}(x, y) = \text{momento ordinario } n\text{-avo de tiempo para la primera excursión} \quad (19)$$

$$T^{(0)}(x, y) = 1 \quad (20)$$

$$T^{(n)}(B,y) = 0, y > 0 \quad (21a)$$

$$T^{(n)}(-B,y) = 0, y < 0 \quad (21b)$$

$$T^{(n)}(x,y) = 0, |y| \rightarrow \infty \quad (21c)$$

donde el dominio de seguridad se muestra en la Figura 2.

Como se estableció anteriormente, soluciones exactas para los momentos estadísticos de tiempo para la primera excursión utilizando las ecuaciones (18-21), y para el problema de la primera excursión dado por las ecuaciones (10-13), no se han encontrado aún. Demostraremos que el método de elementos finitos con la formulación de Petrov-Galerkin presentado aquí produce soluciones para ambos problemas con la exactitud que se desee, dada una malla suficientemente densa.

SOLUCION POR UN METODO PETROV-GALERKIN DE ELEMENTOS FINITOS

Para facilitar la discretización, debemos introducir contornos a más y menos un valor de Y suficientemente grande en la dirección de las velocidades iniciales como se muestra en la Figura 2. El valor de Y se escoge de modo que no afecte la solución en el interior, y denotaremos la región por Ω_Y . Seguidamente implementamos un método de elementos finitos de Petrov-Galerkin. Las ecuaciones se formulan en forma débil y se discretizan utilizando funciones de forma lineales dadas en coordenadas isoparamétricas ($-1 \leq \xi, \eta \leq 1$) por

$$\begin{aligned} N^1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N^2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N^3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N^4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (22)$$

y funciones de peso biquadráticas dadas por

$$\begin{aligned} W^1(\xi, \eta) &= N^1(\xi, \eta) \left[1 - \frac{3\alpha}{2}(1 + \xi) \right] \left[1 - \frac{3\beta}{2}(1 + \eta) \right] \\ W^2(\xi, \eta) &= N^2(\xi, \eta) \left[1 + \frac{3\alpha}{2}(1 - \xi) \right] \left[1 - \frac{3\beta}{2}(1 + \eta) \right] \\ W^3(\xi, \eta) &= N^3(\xi, \eta) \left[1 + \frac{3\alpha}{2}(1 - \xi) \right] \left[1 + \frac{3\beta}{2}(1 - \eta) \right] \\ W^4(\xi, \eta) &= N^4(\xi, \eta) \left[1 - \frac{3\alpha}{2}(1 + \xi) \right] \left[1 + \frac{3\beta}{2}(1 - \eta) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

donde

$$\alpha = \begin{cases} 1 & y < 0 \\ 0 & y = 0 \\ -1 & y > 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$\beta = \coth \frac{\gamma}{2} - \frac{2}{\gamma} \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{G(x,y) \Delta y}{2\xi} \quad (26)$$

y Δy es el tamaño de un elemento en la dirección y en las coordenadas globales. Los parámetros α y β son los parámetros de orientación con el flujo (*upwind parameters*) y se han definido en la referencia¹⁰ y en el contexto de este problema en la referencia².

La discretización de la ecuación de Pontriagin-Vitt toma la forma

$$\mathbf{K} \mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{B}^{(n-1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (27)$$

donde

$$k_{ij} = \sum_{N_e} \int_{\Omega_Y} (-2\xi \frac{\partial W^i}{\partial y} \frac{\partial N^j}{\partial y} + W^i [y \frac{\partial N^j}{\partial x} - G(x,y) \frac{\partial N^j}{\partial y}]) dx dy \quad (28)$$

y

$$b_i^{(n-1)} = -\frac{n}{2\pi} \sum_{N_e} \int_{\Omega_Y} W^i T^{(n-1)}(x,y) dx dy \quad (29)$$

Nótese que la suma es sobre los N_e elementos de la malla. Este es un sistema lineal de ecuaciones de diferencias, que resuelto en forma recursiva, proporciona los n momentos ordinarios del tiempo para la primera excursión.

La discretización del problema con dependencia de tiempo conduce al sistema

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{F}} - \mathbf{K} \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (30)$$

donde la 'matriz de rigidez' está dada como antes. La 'matriz de masa' está dada por

$$m_{ij} = \frac{1}{2\pi} \sum_{N_e} \int_{\Omega_Y} W^i N^j dx dy \quad (31)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se discretiza ahora en el tiempo usando el método de Crank - Nicholson, y resulta en

$$[\mathbf{M} - .5 \Delta\tau \mathbf{K}] \mathbf{F}^{(n+1)} = [\mathbf{M} + .5 \Delta\tau \mathbf{K}] \mathbf{F}^{(n)}. \quad (32)$$

En la referencia² se presenta una discusión de este método y su aplicabilidad al problema de la primera excursión.

MOMENTOS DE TIEMPO DE LA PRIMERA EXCURSION PARA LOS OSCILADORES DE DUFFING Y VAN DER POL

Para demostrar la utilidad del método, se realizaron estudios paramétricos para los casos clásicos de los osciladores de Duffing y Van der Pol. Consideremos el caso del oscilador de Duffing dado por

$$\ddot{X} + 2\zeta \omega_n \dot{X} + \omega_n^2 X \left(1 + \frac{\epsilon}{\sigma^2} X^2\right) = -\dot{N}(t) \quad (33)$$

y el del oscilador de Van der Pol dado por

$$\ddot{X} + 2\zeta \omega_n \dot{X} \left(\frac{\epsilon}{\sigma^2} X^2 - 1\right) + \omega_n^2 X = -\dot{N}(t) \quad (34)$$

donde σ^2 es la varianza de la respuesta estacionaria del desplazamiento del oscilador lineal asociado sujeto a un ruido blanco de Gauss. El operador no lineal $H(\cdot, \cdot)$ es para cada sistema

$$H(X(t), \dot{X}(t)) = \begin{cases} 2\zeta \omega_n \dot{X} + \omega_n^2 X \left(1 + \frac{\epsilon}{\sigma^2} X^2\right) \text{ oscilador de Duffing} \\ 2\zeta \omega_n \dot{X} \left(\frac{\epsilon}{\sigma^2} X^2 - 1\right) + \omega_n^2 X \text{ oscilador de Van der Pol} \end{cases} \quad (35)$$

y el operador nodimensional $G(\cdot, \cdot)$ en términos de los parámetros iniciales, se hace

$$G(x, y) = \begin{cases} 2\zeta y + x \left(1 + \epsilon x^2\right) \text{ oscilador de Duffing} \\ 2\zeta y \left(\epsilon x^2 - 1\right) + x \text{ oscilador de Van der Pol} \end{cases} \quad (36)$$

El sistema lineal de ecuaciones de diferencias dado por la ecuación (27) se resolvió en forma recursiva para los dos primeros momentos del tiempo de la primera excursión. Los coeficientes de amortiguamiento crítico de $\zeta = 0.01$ y $\zeta = 0.08$ y parámetros no lineales $\epsilon = 0.0$ (oscilador lineal), $\epsilon = 0.05$ y $\epsilon = 0.20$ se examinaron para ambos osciladores con barreras simétricas en $\pm B\sigma$. Además se estudiaron los casos $\epsilon = 2.0$ y $\epsilon = 5.0$ para la barrera simétrica en $\pm B\sigma$ para el caso del oscilador de Van der Pol. Se observó que, como se esperaba, las condiciones iniciales distintas de cero reducen la vida de la estructura. Ambos osciladores se muestran más sensibles a una velocidad inicial distinta de cero que a un desplazamiento inicial distinto de cero. El oscilador de Duffing exhibió poca degradación en su vida útil, incluso para desplazamientos iniciales moderados. Sin embargo, el oscilador de Van der Pol es inestable cerca del origen para todo valor de ϵ , y por lo tanto el tiempo medio de fallo del oscilador de Van der Pol es mucho menor que aquel de un oscilador de Duffing comparable. Por ejemplo, el tiempo medio de fallo para el oscilador de Duffing con bordes a 3σ , 1 de amortiguación y coeficiente no-lineal de 0.05 fue de 711.47 períodos naturales mientras que el tiempo medio para el oscilador de Van der Pol correspondiente fue 17.812 períodos naturales. Finalmente, cuando aumentamos el parámetro no-lineal ϵ , los momentos del tiempo de fallo también aumentan para ambos osciladores. Una representación gráfica de la solución para cada uno de los osciladores estudiados aquí se encuentra en la referencia³. Las Tablas 1 y 2 resumen los dos

primeros momentos ordinarios del tiempo de la primera excursión de cada sistema correspondientes a condiciones iniciales en reposo, aunque la solución se obtiene para el plano de fase completo. Estas tablas también proveen estimaciones de la varianza y el coeficiente para el que se excede un límite preestablecido (*upcrossing rate*) calculados por

$$\text{Var}(0,0) = T^{(2)}(0,0) - [T^{(1)}(0,0)]^2, \quad (37)$$

$$\nu_B^+(0,0) = 1/T^{(1)}(0,0). \quad (38)$$

Los momentos ordinarios se presentan en unidades no-dimensionales de períodos naturales del sistema lineal asociado como en la ecuación (8).

PROBABILIDAD DE SUPERVIVENCIA PARA LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DUFFING

Investigamos nuevamente la solución al problema de la primera excursión para los osciladores de Duffing y Van der Pol. Resolvimos la ecuación (30) en el tiempo por medio del algoritmo de integración de Crank-Nicolson para encontrar la probabilidad de supervivencia y la función de densidad de probabilidad del tiempo para la primera excursión. Todos los resultados fueron obtenidos con una malla de 5151 nodos. Para determinar el efecto del parámetro no-lineal ϵ en la probabilidad de super-

Sistema	$T^{(1)}(0,0)$	$T^{(2)}(0,0)$	VAR(0,0)	$\nu_B^+(0,0)$
D101000	.02871 E+01	.61124 E+02	.21596 E+02	.46304 E-01
D201000	.37664 E+02	.24197 E+04	.10011 E+04	.99887 E-03
D301000	.29501 E+03	.16677 E+06	.79739 E+05	.12541 E-04
D108000	.13255 E+01	.28057 E+01	.10487 E+01	.95352 E+00
D208000	.76605 E+01	.10377 E+03	.45087 E+02	.22179 E-01
D308000	.70002 E+02	.95497 E+04	.46494 E+04	.21508 E-03
D101005	.54421 E+01	.64284 E+02	.27783 E+02	.43892 E-01
D201005	.44919 E+02	.34911 E+04	.14734 E+04	.67871 E-03
D301005	.71147 E+03	.99162 E+06	.48543 E+06	.20600 E-05
D108005	.13508 E+01	.29187 E+01	.10940 E+01	.91404 E+00
D208005	.91476 E+01	.14998 E+03	.66301 E+02	.15083 E-01
D308005	.17424 E+03	.60025 E+05	.29665 E+05	.33709 E-04
D101020	.69126 E+01	.74386 E+02	.26602 E+02	.37591 E-01
D201020	.75256 E+02	.10176 E+05	.45125 E+04	.22160 E-03
D108020	.14286 E+01	.32799 E+01	.12390 E+01	.80710 E+00
D208020	.15433 E+02	.44147 E+03	.20329 E+03	.49190 E-02
D308020	.30622 E+04	.18740 E+08	.93629 E+07	.10680 E-06

Primer y segundo momentos ordinarios y segundo momento central de tiempo para la primera excursión y cociente de cruce (*upcrossing rate*) para condiciones iniciales de reposo (unidades de tiempo no-dimensionales).

Notación: D 3 08 002
 Duffing B=3 $\zeta=0.08$ $\epsilon=0.02$

Tabla 1

Sistema	$T^{(1)}(0,0)$	$T^{(2)}(0,0)$	VAR(0,0)	$\nu_B^*(0,0)$
V101005	.45382 E+01	.29552 E+02	.89567 E+01	.11165 E+00
V101020	.45524 E+01	.29757 E+02	.90327 E+01	.10071 E+00
V101200	.47476 E+01	.32595 E+02	.10055 E+02	.99450 E-01
V101500	.50756 E+01	.37915 E+02	.12153 E+02	.82282 E-01
V108005	.80797 E+00	.93435 E+00	.28153 E+00	.35520 E+01
V108020	.81296 E+00	.94698 E+00	.28608 E+00	.34956 E+01
V108200	.88140 E+00	.11284 E+01	.35153 E+00	.28447 E+01
V108500	.10250 E+01	.15695 E+01	.51888 E+00	.19272 E+01
V201005	.11614 E+02	.18101 E+03	.46125 E+02	.21680 E-01
V201020	.11942 E+02	.19242 E+03	.49809 E+02	.20077 E-01
V208005	.17182 E+01	.38635 E+01	.91129 E+00	.10973 E+01
V208020	.17891 E+01	.42183 E+01	.10174 E+01	.98288 E+00
V301005	.17812 E+02	.39711 E+03	.79843 E+02	.12525 E-01
V301020	.19589 E+02	.48753 E+03	.10380 E+03	.96338 E-02
V308005	.24680 E+01	.74607 E+01	.13697 E+01	.73010 E+00
V308020	.27695 E+01	.95448 E+01	.18747 E+01	.53343 E+00
V401005	.22860 E+02	.62121 E+03	.98630 E+02	.10139 E-01
V401020	.28206 E+02	.96984 E+03	.17426 E+03	.57385 E-02
V408005	.30914 E+01	.11185 E+02	.16282 E+01	.61416 E+00
V408020	.40382 E+01	.19695 E+02	.33879 E+01	.29516 E+00
V501005	.27250 E+02	.85242 E+03	.10986 E+03	.91027 E-02
V501020	.46646 E+02	.27041 E+04	.52825 E+03	.18930 E-02
V508005	.36572 E+01	.15174 E+02	.17989 E+01	.55590 E+00
V508020	.75844 E+01	.74896 E+02	.17373 E+02	.57561 E-01

Primer y segundo momentos ordinarios y segundo momento central de tiempo para la primera excursión y cociente de cruce (upcrossing rate) para condiciones iniciales de reposo (unidades de tiempo no-dimensionales).

Notación: V 3 08 050
 Van der Pol B=3 $\zeta=0.08$ $\epsilon=0.50$

Tabla 2

vivencia, se investigó solamente el problema con una barrera simétrica con $B = 1.0$. Aún cuando la solución proporciona la probabilidad de supervivencia y la función de densidad sobre el plano de fase completo de condiciones iniciales, debido a limitaciones de espacio sólo se da aquí un ejemplo gráfico de la solución. Los diagramas de superficie que muestran la evolución de la probabilidad para el oscilador de Duffing con $\epsilon = 0.05$ y $\zeta = 0.8$ se presentan en la Figura 3. Se puede observar que, cuando sólo ha pasado un período natural, la fiabilidad del oscilador es cero en una gran parte del plano de fase de condiciones iniciales. La probabilidad de supervivencia y la función de densidad se dan en forma gráfica para el caso de condiciones iniciales cero. En el caso del oscilador de Duffing, las soluciones para coeficientes de amortiguamiento de $\zeta = 0.01$ y $\zeta = 0.08$ y parámetros no-lineales $\epsilon = 0.00$ (oscilador lineal), $\epsilon = 0.05$ y $\epsilon = 0.20$ se muestran en las Figuras 4-7. En las mismas figuras se muestran las soluciones para el oscilador de Van der Pol para coeficientes de amortiguamiento de $\zeta = 0.01$ y $\zeta = 0.08$ y parámetros no-lineales $\epsilon = 0.20$, $\epsilon = 2.0$ y $\epsilon = 5.0$.

Las soluciones por elementos finitos exhiben el comportamiento oscilatorio esperado⁶ en las funciones de densidad de probabilidad a una frecuencia de dos por ciclo, mientras la mayoría de las soluciones aproximadas obtenidas hasta ahora eliminan

esta característica de la solución al considerar términos medios. Como se dedujo del estudio de los momentos estadísticos, la probabilidad de supervivencia aumenta cuando el parámetro no-lineal ϵ aumenta.

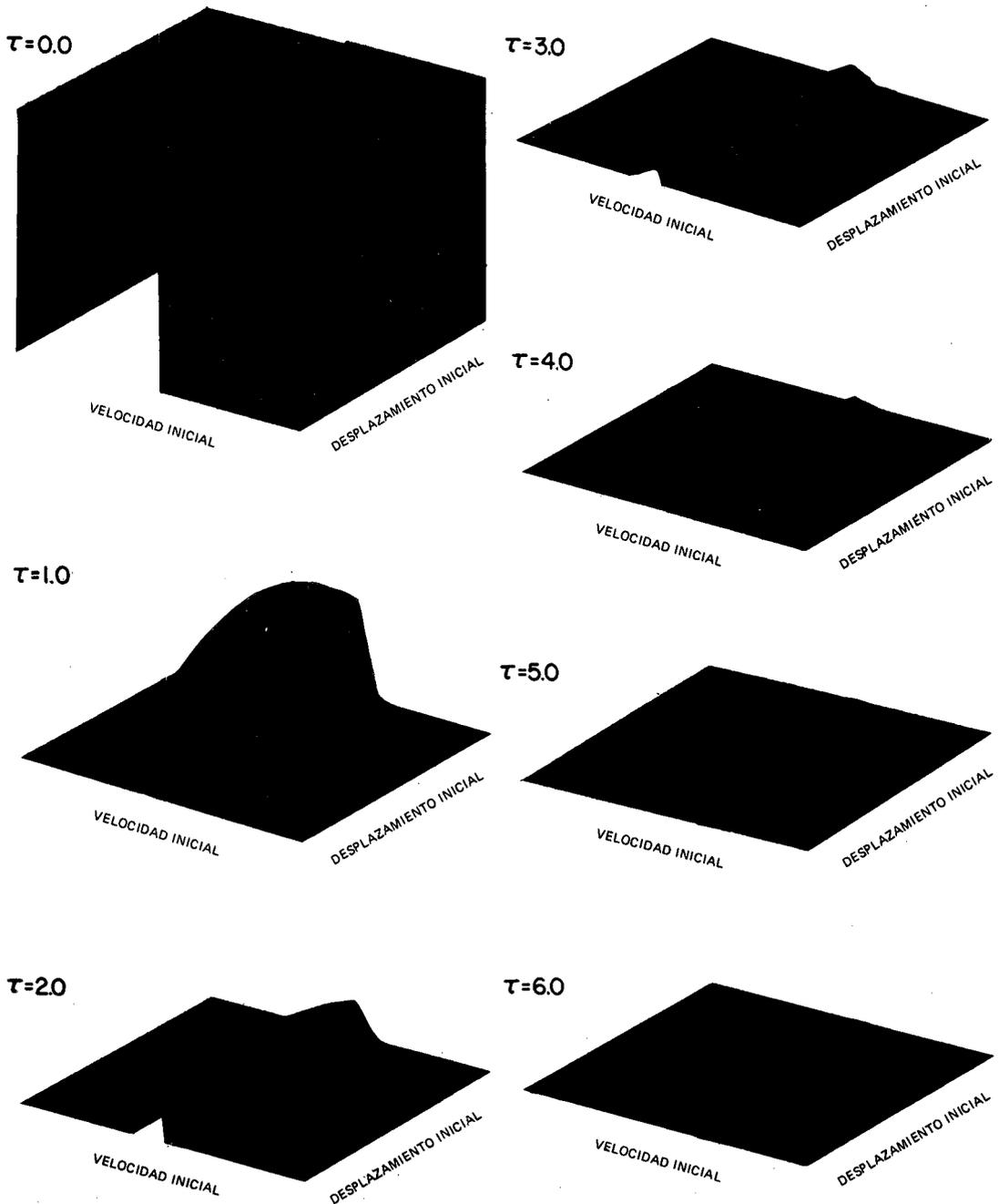


Fig. 3.— Diagramas de superficie mostrando la evolución de la probabilidad de supervivencia del oscilador para el sistema D108005.

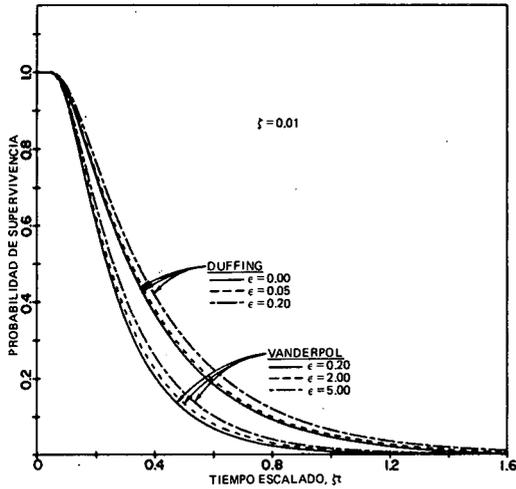


Fig. 4.— Probabilidad de supervivencia versus tiempo; $B = 1.0, \zeta = 0.01$.

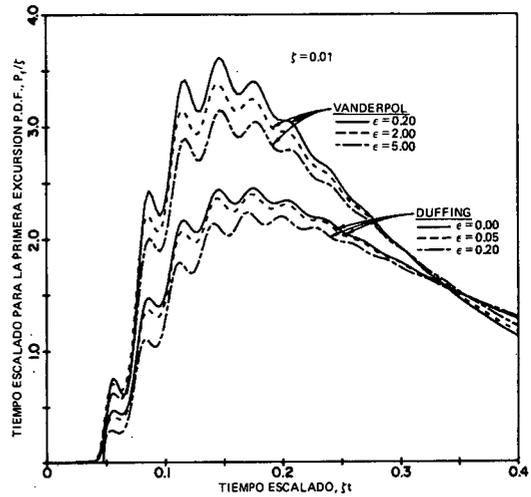


Fig. 5.— Densidad de probabilidad para la primera excursión versus tiempo; $B = 1.0, \zeta = 0.01$.

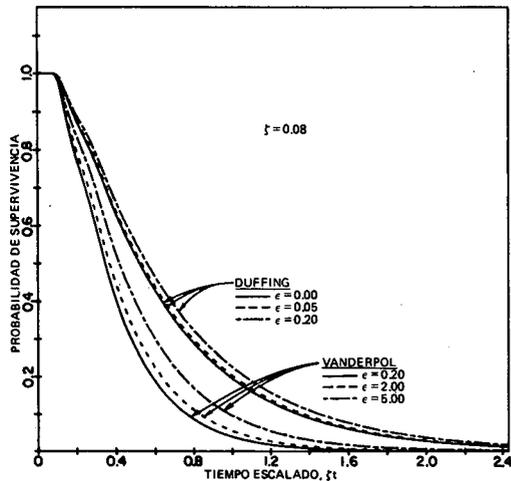


Fig. 6.— Probabilidad de supervivencia versus tiempo; $B = 1.0, \zeta = 0.08$.

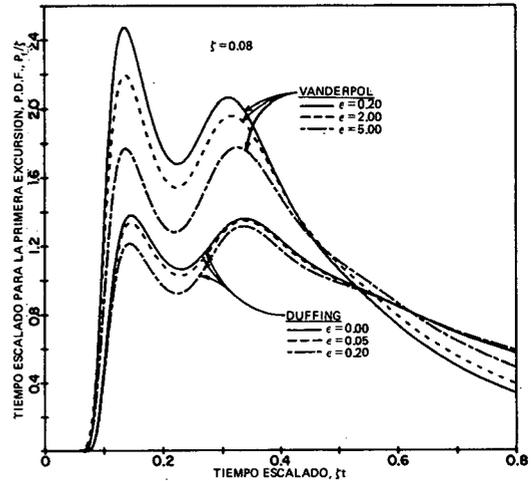


Fig. 7.— Probabilidad de la primera excursión versus tiempo; $B = 1.0, \zeta = 0.01$.

Para poder comparar estos resultados con simulaciones de Monte-Carlo, las representaciones gráficas de la probabilidad de supervivencia y la función de densidad de probabilidad se presentan en unidades dimensionales haciendo $\omega = 1.0$. Más aún, para cada clase de oscilador estudiada, los primeros dos momentos ordinarios de tiempo de la primera excursión se calculan utilizando la solución transitoria para condiciones iniciales de reposo. Estos momentos se presentan en las Tablas 3 y 4 junto con el porcentaje de desviación de la solución convergida de la ecuación de Pontriagin-Vitt que presentamos en la sección previa. Esta comparación nos permite comprobar la convergencia de la solución transitoria. Los momentos se calculan por

$$T^{(1)}(0,0) \cong \sum_i \tau_{i+1/2} [F(\tau_i | 0,0) - F(\tau_{i+1} | 0,0)] \quad (39)$$

$$T^{(2)}(0,0) \cong \sum_i (\tau_{i+1/2})^2 [F(\tau_i | 0,0) - F(\tau_{i+1} | 0,0)]. \quad (40)$$

También se ha tabulado la probabilidad de fallo en el último intervalo de tiempo. Esto nos da una indicación del potencial para reducir el error si quisiéramos extender el análisis o refinar la malla y el intervalo de tiempo.

<u>Sistema</u>	<u>T⁽¹⁾(0,0)</u> (%Desviación)	<u>T⁽²⁾(0,0)</u> (%Desviación)	<u>P(τ_n 0,0)</u>
D101000	.62204 E+01 (-1.06)	.58791 E+02 (-3.96)	0.99987
D108000	.13261 E+01 (+0.05)	.27830 E+01 (-0.81)	0.99949
D101005	.63566 E+01 (-1.33)	.61309 E+02 (-4.63)	0.99748
D108005	.13550 E+01 (+0.31)	.29329 E+01 (+0.49)	0.99997
D101020	.67718 E+01 (-2.04)	.69429 E+02 (-6.66)	0.99598
D108020	.14327 E+01 (+0.29)	.32896 E+01 (+0.30)	0.99994

Primer y segundo momentos ordinarios para el tiempo para la primera excursión calculados de la función de densidad de probabilidad y desviaciones de las soluciones directas de la ecuación de Pontriagin-Vitt (unidades de tiempo no-dimensionales) Oscilador de Duffing.

Tabla 3

<u>Sistema</u>	<u>T⁽¹⁾(0,0)</u> (%Desviación)	<u>T⁽²⁾(0,0)</u> (%Desviación)	<u>P(τ_n 0,0)</u>
V101020	.45582 E+01 (+0.13)	.29834 E+02 (+0.26)	0.99994
V108020	.81735 E+00 (+0.54)	.95495 E+00 (+0.84)	1.00000
V101200	.47378 E+01 (-2.21)	.32449 E+02 (-0.45)	0.99989
V108200	.88058 E+00 (-0.09)	.11267 E+01 (-0.15)	1.00000
V101500	.50681 E+10 (-0.15)	.37621 E+02 (-0.78)	0.99975
V108500	.10235 E+01 (-0.15)	.15650 E+01 (-0.29)	1.00000

Primer y segundo momentos ordinarios del tiempo para la primera excursión calculados de la función de densidad de probabilidad y desviaciones de la solución directa de la ecuación de Pontriagin-Vitt (unidades de tiempo no-dimensionales) Oscilador de Van der Pol.

Tabla 4

VERIFICACION DE LOS RESULTADOS

Para demostrar la exactitud y la eficiencia computacional del método de elementos finitos, se han utilizado simulaciones de Monte Carlo extensivas para los dos osciladores clásicos mencionados previamente. Un ruido blanco de Gauss se aproximó por medio de impulsos rectangulares⁷ en que el área de cada impulso es una desviación de Gauss¹¹ con un ancho de un 0.025-avo de un período natural. Para cada oscilador no-lineal considerado, la ecuación de movimiento se escribió en la forma de una ecuación diferencial vectorial de primer orden de modo que se pudiera usar un método de Runge-Kutta de cuarto orden para la integración en el tiempo. Esto limitó la acumulación de error en la simulación al aumentar el ancho de banda y el tiempo para que se produzca el fallo del sistema. Se simularon 10.000 registros para obtener una buena aproximación para la función de densidad. Sin perder generalidad se supuso que $\omega = 1.0$ y $\sigma = 1.0$.

Las probabilidades de supervivencia y la función de densidad de probabilidad para la primera excursión obtenidas por medio del método de elementos finitos se comparan con simulaciones para sistemas representativos en las Figuras 8-9. Como se ve, la simulación de Monte Carlo no se puede distinguir de los resultados por elementos finitos para la mayor parte de la escala de tiempo.

Además, resultados de la referencia¹⁸ para el oscilador de Van der Pol se han reproducido en las Figuras 10-11 con los resultados por elementos finitos superimpuestos para comparación. Una vez más los resultados obtenidos por elementos finitos muestran una correlación excelente con la simulación de doble barrera. Solamente 1.000 registros se usaron, sin embargo, para generar las curvas de la simulación en la referencia¹⁸. Cuando se aumenta el tamaño de la muestra, la discrepancia entre la solución por elementos finitos y la simulación decrece rápidamente. Todos los cálculos fueron realizados en un computador IBM 4341 operado por la Oficina de Servicios Computacionales en la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign (USA). Una malla uniforme de elementos finitos de 50 x 100 elementos se utilizó para calcular las probabili-

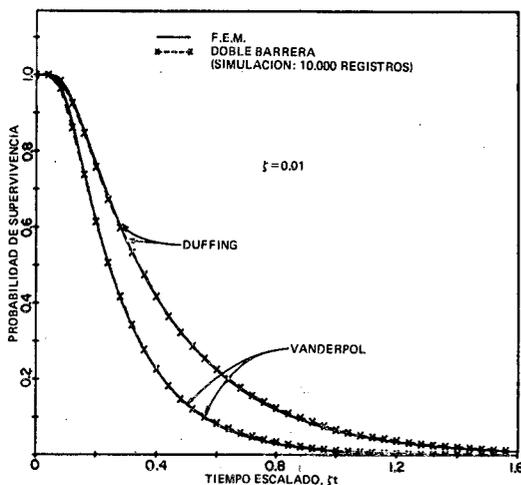


Fig. 8.— Probabilidad de supervivencia versus tiempo; comparación de resultados del método de elementos finitos con simulaciones para los sistemas D101020 y V101200.

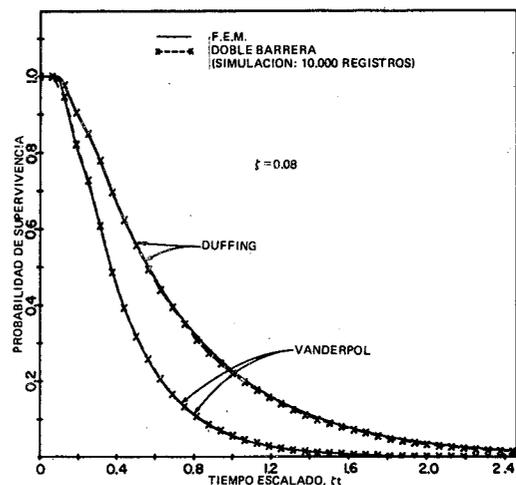


Fig. 9.— Probabilidad de supervivencia versus tiempo; comparación de resultados del método de elementos finitos con simulaciones para los sistemas D108020 y V108200.

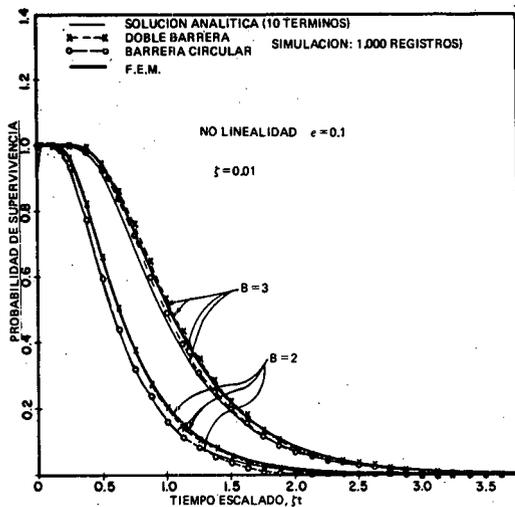


Fig. 10.— Densidad de probabilidad de supervivencia versus tiempo; comparación de resultados del método de elementos finitos con simulación y el método aproximado de la referencia 18 para los sistemas V201010 y V301010.

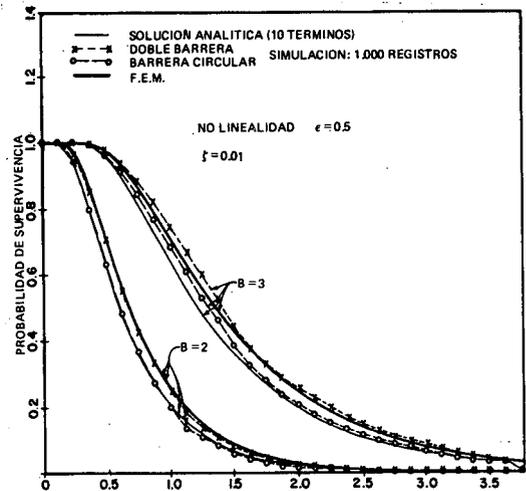


Fig. 11.— Densidad de probabilidad de supervivencia versus tiempo; comparación de resultados del método de elementos finitos con simulación y el método aproximado de la referencia 18 para los sistemas V201050 y V301050.

dades de supervivencia de la primera excursión presentadas aquí. Esta malla contiene 5151 nodos, con un grado de libertad por nodo, requiriendo un esfuerzo computacional relativamente grande. Sin embargo, con relación a esto los siguientes comentarios son obligatorios:

- (i) Las condiciones de contorno, que suman 200 grados de libertad deben substraerse.
- (ii) Existe una simetría con respecto al origen que permite la solución del problema usando sólo la mitad de la malla. Por lo tanto, se requirieron 2476 grados de libertad para la solución del problema en cada intervalo de tiempo.
- (iii) La “matriz de rigidez” es una matriz en banda, con una banda de 105.
- (iv) La “matriz de rigidez” sólo se construye y factoriza cuando se cambia el intervalo de tiempo; cada paso sucesivo en el tiempo sólo requiere calcular un nuevo segundo miembro usando la solución previa al tiempo $t - \Delta t$ y posteriormente dos sustituciones en la matriz factorizada. El intervalo de tiempo se aumentó entre tres y seis veces durante las soluciones, dando así un algoritmo sumamente efectivo en coste.

Se realizó una comparación entre el tiempo requerido por el IBM-4341 para ejecutar la simulación de Monte-Carlo y el análisis por elementos finitos. El análisis por elementos finitos incluyó el plano de fase de condiciones iniciales completo mientras que la simulación de Monte Carlo proporciona la probabilidad de la primera excursión para un sólo punto. Para el estudio del sistema de Van der Pol, el intervalo de tiempo se aumentó seis veces y se requirieron 2850 segundos de CPU para calcular la probabilidad de supervivencia en el plano de fase completo. Por otro lado, una simulación de Monte Carlo para un sólo conjunto de condiciones iniciales para el mismo oscilador requirió 15350 segundos de CPU para obtener 10,000 registros para bandas de impulso de 0.025 segundos. Para aprovechar la información contenida en una solución por elementos finitos se requerirían muchos de estos análisis. Aquí podemos invocar el teorema del límite central para determinar el intervalo de fiabilidad para el tiempo

medio para la falla del sistema usando la simulación. Si calculamos 1000 muestras, el intervalo de fiabilidad del 95% es ± 0.062 desviaciones standard del tiempo para la primera excursión. Para 10000 muestras, el intervalo de fiabilidad es ± 0.020 desviaciones standard del tiempo para la primera excursión. Por lo tanto, dependiendo de la exactitud requerida, el número de casos se puede reducir para hacer la simulación de Monte Carlo más económica.

Finalmente, dos momentos estadísticos para el oscilador de Van der Pol se pueden generar en un IBM-4341 en 98 segundos de CPU. Se puede utilizar entonces una distribución de entropía máxima⁸ para aproximar las probabilidades de supervivencia del sistema a un costo extra mínimo.

CONCLUSIONES

El problema de la primera excursión para osciladores no-lineales simples sometidos a excitaciones de Gauss puras, cuando las fronteras de fallo del sistema se definen en forma simétrica, se ha resuelto mediante un método de elementos finitos de Petrov-Galerkin. Se han obtenido soluciones para los osciladores de Duffing y Van der Pol para momentos del tiempo de la primera excursión y la probabilidad de supervivencia sobre un rango amplio de amortiguación del sistema, ancho de la región de seguridad, y parámetros no lineales. Dada la ausencia de soluciones analíticas, estos resultados son los más exactos a nuestro alcance hoy en día.

Debemos recordar que las soluciones obtenidas de esta manera cubren el dominio de seguridad completo. Por lo tanto, el comportamiento de la primera excursión se conoce para todas las combinaciones de desplazamiento y velocidad iniciales. Mientras lo primero es de interés para ciertas estructuras bajo el efecto simultáneo de cargas estáticas y cargas dinámicas aleatorias, lo segundo se relaciona con el problema más crítico de estructuras excitadas simultáneamente por excitaciones aleatorias impulsivas y de banda ancha.

Las soluciones se han comparado con simulaciones de Monte Carlo y se ha demostrado que son casi exactas, e incluso exhiben el comportamiento oscilatorio esperado⁶ en la función de densidad de probabilidad a una frecuencia de dos por ciclo. Esto se ha obtenido sin ninguna restricción de que la respuesta del sistema sea de banda estrecha, sobre el ancho de la región, o el grado de no-linealidad. Se ha demostrado que el procedimiento de solución es una herramienta económica para este tipo de análisis.

Quizás la mayor ventaja del método sea su versatilidad. El algoritmo se puede modificar fácilmente para incluir una colección de otros osciladores no-lineales^{3,4}, etc., así como combinaciones de efectos no-lineales. Igualmente, pueden considerarse de inmediato contornos asimétricos de la región de fallo del sistema, así como contornos que varíen con el tiempo.

REFERENCIAS

1. L. A. Bergman y J. C. Heinrich, On the moments of time to first passage of the linear oscillator. *Earthquake Engng. Struct. Dynam.* **9**, 197 (1981).
2. L. A. Bergman y J. C. Heinrich, On the reliability of the linear oscillator and systems of coupled oscillators. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **18**, 1.271 (1982).
3. L. A. Bergman y B. F. Spencer, Jr., Solution of the first passage problem for simple linear and nonlinear oscillators by the finite element method. *T. & A. M. Report No. 461 (UILU-ENG 83-6007)*, Univ. of Illinois (1983).

4. L. A. Bergman y B. F. Spencer, Jr., First passage of a sliding rigid structure on a frictional foundation. *Earthquake Engng. Struct. Dynam.* (En imprenta).
5. T. K. Caughey, Derivation and application of the Fokker-Planck equation to discrete nonlinear dynamic systems subject to white random excitation. *J. Acoust. Soc. Am.* **11**, 1,683 (1963).
6. S. H. Crandall, First crossing probabilities of the linear oscillator. *J. Sound Vibrat.* **12**, 285 (1970).
7. S. H. Crandall, K. L. Chandiramani y R. G. Cook, Some first passage problems in random vibrations. *J. Appl. Mech.* **33**, 532 (1966).
8. D. C. Dowson y A. Wragg, Maximum entropy distributions having prescribed first and second moments. *Trans. on Information Theory, IEEE*, **19**, 689 (1973).
9. J. E. Goldberg, J. L. Bogdanoff y D. R. Sharpe, The response of a simple non-linear system to random disturbance of the earthquake type. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **54**, 263 (1964).
10. J. C. Heinrich, P. S. Huyakorn, O. C. Zienkiewicz y A. R. Mitchell, An "Upwind" finite element scheme for two-dimensional convective-transport equation. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **11**, 131, (1977).
11. C. Knuth y E. Donald, *The Art of Computer Programming*, Vol. 2, Addison Wesley, Reading, Mass. (1969).
12. H. N. Pi, S. T. Ariaratnam y W. C. Lennox, First-passage time for snap-through of a shell-type structure. *J. Sound Vibrat.* **14**, 375 (1971).
13. J. B. Roberts, First passage probability for non-linear oscillators. *J. Engng. Mech. Div. Am. Soc. Civ. Engrs.* **102**, 851 (1976).
14. J. B. Roberts, First-passage time for oscillators with non-linear damping. *J. Appl. Mech.* **45**, 175, (1978).
15. J. B. Roberts, First passage time for oscillators with non-linear restoring forces. *J. Sound Vibrat.* **56**, 71 (1978).
16. J. B. Roberts y S. N. Yosuri, An experimental study of first-passage failure of a randomly excited structure. *J. Appl. Mech.* **45**, 917 (1978).
17. V. Seshadri, B. J. West y K. Lindenberg, Analytic theory of extrema, II: Application to non-linear oscillators. *J. Sound Vibrat.* **68**, 553 (1980).
18. P-T. D. Spanos, Survival probability of non-linear oscillators subjected to broad-band random disturbances. *Int. J. Non-Linear Mech.* **17**, 303 (1982).
19. R. H. Toland y C. Y. Yang, Random walk model for first passage probability. *J. Engng. Mech. Div. Am. Soc. Civ. Engrs.* **97**, 791 (1971).
20. J.-N. Yang y M. Shinozuka, First passage time problem. *J. Acoust. Soc. Am.* **47**, 393 (1970).