

Estudio de inestabilidad inicial de paneles con el elemento BST

Antonio Agüero y José Ramón Atienza

Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Valencia
Campus Vera s/n, 46020 Valencia, España
Tel.: 34-96-387 7675
e-mail: anagra@mes.upv.es

Eugenio Oñate

Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en Ingeniería
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Cataluña
Campus Norte, Edificio C 1
08034 Barcelona, España
Tel.: 34-93-205 70 16; Fax: 34-93-405 60 37
e-mail: onate@cimne.upc.es

Resumen

En el presente artículo se estudia la precisión del elemento BST en análisis de inestabilidad inicial, con objeto de predecir la carga de colapso de paneles metálicos esbeltos. Los resultados obtenidos se comparan con soluciones exactas y las de otro elemento tradicional, el BCIZ.

Este elemento se presenta como una herramienta de gran utilidad para el diseño de paneles metálicos esbeltos. En estos se debe tener en consideración el comportamiento no lineal geométrico y mecánico, las tensiones residuales e imperfecciones geométricas. Para la determinación práctica de la carga colapso de paneles metálicos la mayoría de las normas recomiendan emplear un análisis de inestabilidad inicial y la fórmula de Winter. Este análisis de cargas críticas se puede abordar haciendo uso de tabulaciones, el método de la banda finita o el método de los elementos finitos. Se ha seleccionado este último por permitir ajustarse a distintas condiciones de contorno y tipos de carga.

Palabras clave: *placa, elementos finitos, BST, carga crítica, modo de pandeo, carga de colapso.*

INITIAL INSTABILITY ANALYSIS OF PLATES USING THE ROTATION-FREE ELEMENT (BST)

Summary

This paper presents the critical load analysis with the basic shell triangle (BST). The results are compared with the exact solutions and with the BCIZ element. This finite element is a useful tool for the design of steel plates. To obtain the collapse load the current design codes take into account the nonlinear geometric and material behaviour, the geometric imperfections and residual stress, using the effective width of the plate given by Winter, to do so a critical load analysis must be performed.

Keywords: *plate, finite element, BST, critical load, buckling mode, collapse load.*

INTRODUCCIÓN

Las piezas metálicas de pared delgada y sección abierta pueden presentar tres tipos de modo de pandeo: local, por distorsión y global (flexión, torsión o flexo-torsión). En la práctica para la determinación de las cargas críticas por inestabilidad local y distorsión se establecen hipótesis simplificadoras para tener en cuenta la interacción entre las placas que conforman la sección. La interacción ha sido estudiada por diversos autores^{4,7,11} Las normas de metálicas Española (EA-95) y Europea (EC-3) actuales desprecian de hecho la interacción entre elementos y no hacen mención al pandeo por distorsión.

Con objeto de poder determinar estas cargas críticas de forma general se suele emplear el método de la banda finita⁹ y el de los elementos finitos¹⁰ este último resulta ser mucho más adecuado por ajustarse de forma más eficaz a cualquier tipo de condición de contorno y carga.

En el presente artículo se determina la precisión del elemento sin rotaciones BST⁵ para realizar análisis de cargas críticas y modos de pandeo en paneles metálicos esbeltos.

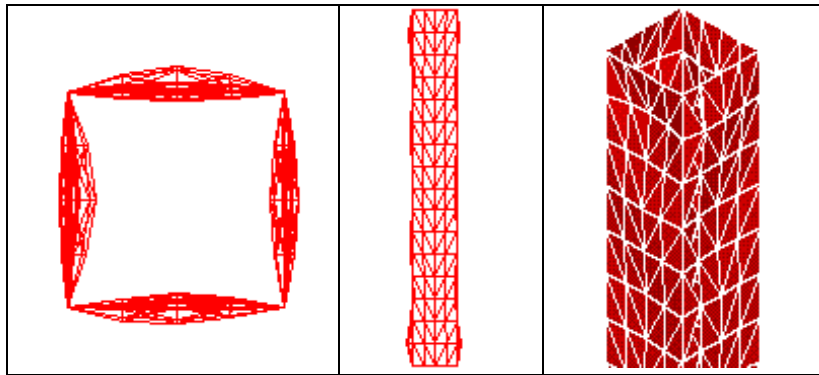


Figura 1. Pandeo local. Perfil tubular, sección cuadrada

Las normativas vigentes establecen esbelteces de los paneles a partir de las cuales resulta necesario comprobar el fenómeno de abolladura. El EC-3 denomina a este tipo de secciones, que pueden sufrir fenómenos de inestabilidad local “Clase 4”. En el EC-3 se determina la carga de colapso de paneles haciendo uso del ancho eficaz (Figura 2), el ancho de la placa que capta de forma efectiva la carga, mediante la expresión de Winter $b_{\text{eff}} = \frac{b}{\lambda} \left(1 - \frac{0,22}{\lambda}\right)$ si $\bar{\lambda} > 0,67$. $\bar{\lambda}$ es la esbeltez reducida del panel y viene dada por $\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\sigma_{cr}}}$.

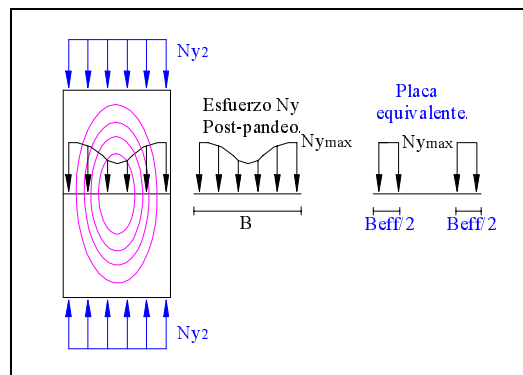


Figura 2. Concepto de ancho eficaz

CÁLCULO LINEAL BST Y BCIZ

A continuación se presenta el planteamiento energético para el estudio del cálculo lineal en paneles, particularizando los desarrollos para los elementos BPT y BCIZ. Las matrices de rigidez necesarias se obtienen con el Maple V.

Potencial total

El potencial total suma del interno (Energía de deformación) más el externo es $V = U_i + U_e$.

Para el estudio del equilibrio y la estabilidad se obtiene el incremento de potencial

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!}\delta^2 V + \frac{1}{3!}\delta^3 V + \dots = t\delta V(d, d_p) + \frac{1}{2!}t^2\delta^2 V(d, d_p) + \frac{1}{3!}t^3\delta^3 V(d, d_p) + \dots$$

El potencial interno en la geometría de equilibrio viene dado por

$$U_i = \iiint \frac{1}{2}\sigma\varepsilon dV = U_{im} + U_{if}$$

que en función de los esfuerzos será⁸

$$U_{im} = \frac{1}{2hE} \iint [Nx^2 + Ny^2 - 2\mu NxNy + 2(1 + \mu)Nxy^2] dx dy$$

$$U_{if} = \frac{6}{Eh^3} \iint [Mxx^2 + Myy^2 - 2\mu MxxMyy + 2(1 + \mu)Mxy^2] dx dy$$

y sustituyendo los esfuerzos por sus expresiones en función de las derivadas de los movimientos, se obtiene

$$U_{im} = \frac{D_m}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1 - \mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy, \quad D_m = \frac{Eh}{1 - \mu^2}$$

$$U_{if} = \frac{D_f}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad D_f = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$$

El potencial externo de las cargas distribuidas sobre la superficie viene dado por

$$U_e = - \iint (p_x u + p_y v + p_z w) dx dy$$

Comportamiento de membrana

Se han desarrollado muchos elementos triangulares para describir el comportamiento de membrana de elementos superficiales planos, entre ellos cabe destacar los siguientes: CST (Constant strain triangle) y el LST (Linear strain triangle).

Elemento CST

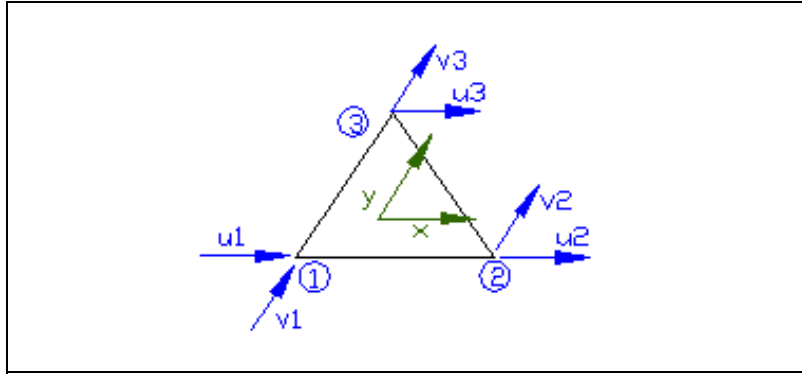


Figura 3. Grados de libertad asociados al comportamiento de membrana (los ejes x, y, z forman un triédro ortonormal dextrógiro)

Interpolando el campo de movimientos en el interior de cada elemento en función de los movimientos de los nodos $\mathbf{d} = \mathbf{N}\mathbf{a}^e$, es decir

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

donde $\xi_k \in [0, 1]$, para $k = 1, 2$ y 3 , son las coordenadas naturales, definidas por

$$\xi_k = \frac{1}{2\Delta}(a_k + b_k x + c_k y)$$

siendo

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2; \quad b_1 = y_2 - y_3; \quad c_1 = x_3 - x_2 \quad y \quad \Delta = \frac{(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{2}$$

Desarrollando la expresión de la variación del potencial en cada elemento, queda

$$\delta V_{\text{membrana}} = \frac{D_m}{2} \iint [2u'^x u_p'^x + 2v'^y v_p'^y + 2\mu(u'^x v_p'^y + v'^y u_p'^x) + (1 - \mu)(u'^y + v'^x)(u_p'^y + v_p'^x)] dx dy - \iint (p_x u_p + p_y v_p) dx dy$$

$$\delta V_{\text{membrana}}^e = \mathbf{a}_p^{eT} \mathbf{K}_{\text{membrana}}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{a}_p^{eT} \mathbf{f}_{\text{membrana}}^e$$

siendo \mathbf{a}_p^e el vector de desplazamientos nodales perturbado y \mathbf{f}^e el vector de fuerzas exteriores equivalentes actuantes sobre el elemento.

Comportamiento de flexión

Se han desarrollado muchos elementos triangulares para describir el comportamiento de flexión de elementos superficiales planos. Entre ellos cabe destacar los siguientes: BCIZ (Bazeley, Cheung, Irons y Zienkiewicz), DKT (discrete Kirchoff triangle), $TQ_w Q_\theta L_\gamma$ (des -

plazamientos w con interpolación cuadrática, giros con interpolación cuadrática y deformación angular con interpolación lineal), $TL_w Q_\theta L_\gamma$, Morley triangle, BPT (basic plate triangle). A continuación se desarrollan los dos elementos que se van a comparar el BCIZ y el BPT.

Elemento BCIZ

El elemento BCIZ es triangular con tres grados de libertad por nodo: el desplazamiento perpendicular al plano del elemento y los giros de ejes x, y $\{w_i, \theta_{x_i}, \theta_{y_i}\}$. En total hay nueve grados de libertad en cada elemento.

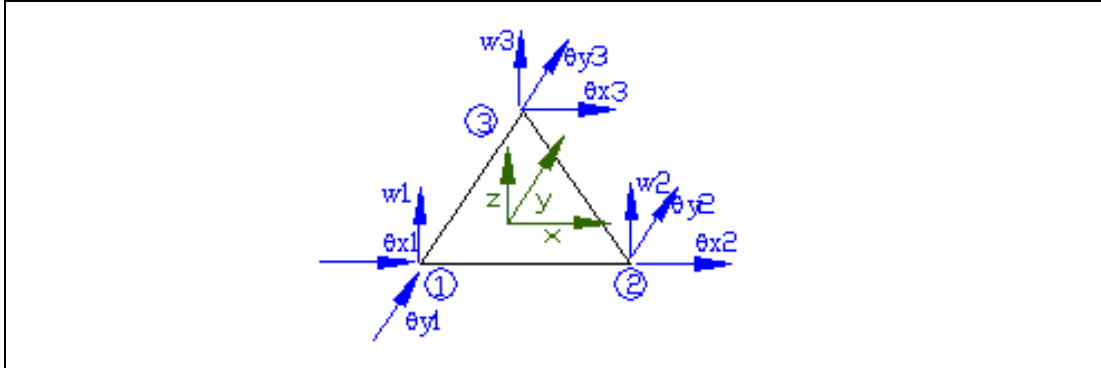


Figura 4. Grados de libertad asociados al comportamiento de flexión en el elemento BCIZ (los ejes x, y, z forman un triedro ortonormal dextrógiro)

El campo de movimientos para este elemento es $d = \mathbf{N}a^e \rightarrow$

$$w = \{\phi_{11}; \phi_{21}; \phi_{31}; \phi_{12}; \phi_{22}; \phi_{32}; \phi_{13}; \phi_{23}; \phi_{33}\} \{w_1; w_2; w_3; \theta_{x_1}; \theta_{x_2}; \theta_{x_3}; \theta_{y_1}; \theta_{y_2}; \theta_{y_3}\}^T$$

Las funciones de interpolación, utilizando las coordenadas naturales son

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \xi_1 + \xi_1^2 \xi_2 + \xi_1^2 \xi_3 - \xi_1 \xi_2^2 - \xi_1 \xi_3^2 \\ \phi_{12} &= b_3 \left(\xi_1^2 \xi_2 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) - b_2 \left(\xi_3^2 \xi_1^2 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) \\ \phi_{13} &= c_3 \left(\xi_1^2 \xi_2 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) - c_2 \left(\xi_3 \xi_1^2 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right) \end{aligned}$$

El resto se obtienen por permutaciones cíclicas de los subíndices. Desarrollando la expresión de la variación del potencial en cada elemento queda

$$\begin{aligned} \delta V_{\text{flex}} &= \frac{D_f}{2} \iint [2w'^{xx} w_p'^{xx} + 2w'^{yy} w_p'^{yy} + 2\mu(w'^{xx} w_p'^{yy} + w'^{yy} w_p'^{xx}) + 4(1 - \mu)w'^{xy} + w_p'^{xy}] dx dy - \\ &- \iint p_z w_p dx dy \end{aligned}$$

$$\delta V_{\text{flexion}}^e = \mathbf{a}_p^{eT} \mathbf{K}_{\text{flexion}}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{a}_p^{eT} \mathbf{f}_{\text{flexion}}^e$$

La matriz de rigidez del elemento se suele expresar como

$$\mathbf{K}^e = \iiint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$$

Elemento BPT

Este elemento tiene un grado de libertad por nodo, en total 3 grados de libertad por elemento $\{w_1, w_2, w_3\}$. El campo de movimientos, utilizando las coordenadas naturales, es

$$w = \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 + \xi_3 w_3$$

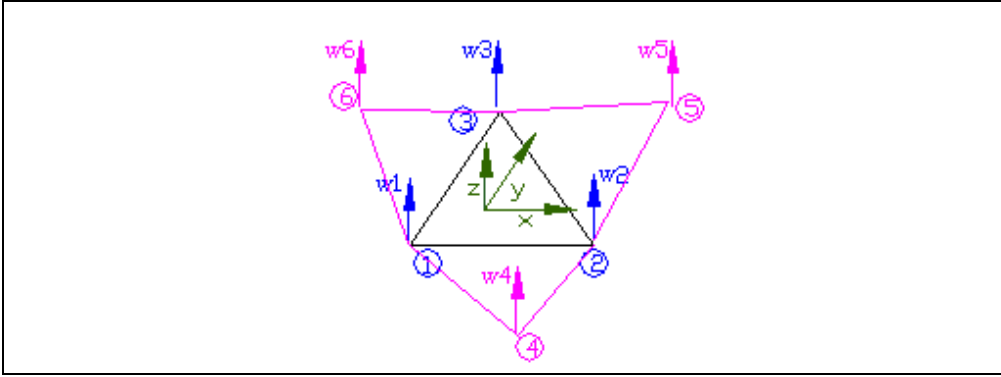


Figura 5. Grados de libertad asociados al comportamiento de flexión en el elemento BPT (los ejes x, y, z forman un triedro ortonormal dextrógiro)

El campo de curvaturas \mathbf{k} del elemento es $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{L}w$, siendo $\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}] = [-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}] = \mathbf{L}w$, que se puede expresar de forma débil como

$$\iint_A \mathbf{W}^T [\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{L}w] dA = 0$$

siendo W_i unas funciones de peso.

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 \end{bmatrix}$$

que toman los valores 1 ó 0 en función de que el punto pertenezca al elemento, o esté fuera del mismo. Integrando la expresión débil por partes se obtiene

$$\iint_{A_s} \boldsymbol{\kappa} dA = \int_{\Gamma_s} \mathbf{T} \nabla w d\Gamma$$

siendo $T = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix}$ y $\nabla w = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{matrix} \right\}$ y Γ el contorno del elemento, resultando

$$\boldsymbol{\kappa}^e = \frac{1}{A^e} \int_{\Gamma^e} \begin{bmatrix} -n_x & 0 \\ 0 & -n_y \\ -n_y & -n_x \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{matrix} \right\} d\Gamma = \mathbf{B}^e \mathbf{a}^e$$

Como ∇w en el contorno tiene un valor distinto para cada uno de los elementos que concurren, se utiliza como valor de ∇w a la media de los elementos que comparten el mismo contorno.

Con referencia a la Figura 5, el elemento e_1 , de nodos $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, tiene los elementos adyacentes $e_2 \{1, 4, 2\}$, $e_3 \{2, 5, 3\}$ y $e_4 \{3, 6, 1\}$.

Como cada lado pertenece a dos elementos y estos presentaran giros distintos, se promedian los giros de cada elemento:

En el lado $i - j$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\}_{i \rightarrow j} = 0,5 \left[\frac{1}{2\Delta_{e_1}} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}_{e_1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\Delta_{e_2}} \begin{pmatrix} b_4 & b_2 & b_1 \\ c_4 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}_{e_2} \begin{pmatrix} w_4 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} \right]$$

En el lado $j - k$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\}_{j \rightarrow k} = 0,5 \left[\frac{1}{2\Delta_{e_1}} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}_{e_1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\Delta_{e_3}} \begin{pmatrix} b_5 & b_3 & b_2 \\ c_5 & c_3 & c_2 \end{pmatrix}_{e_3} \begin{pmatrix} w_5 \\ w_3 \\ w_2 \end{pmatrix} \right]$$

En el lado $k - i$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\}_{k \rightarrow i} = 0,5 \left[\frac{1}{2\Delta_{e_1}} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}_{e_1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\Delta_{e_4}} \begin{pmatrix} b_6 & b_1 & b_3 \\ c_6 & c_1 & c_3 \end{pmatrix}_{e_4} \begin{pmatrix} w_6 \\ w_1 \\ w_3 \end{pmatrix} \right]$$

Por otra parte, las normales a los lados del elemento son

$$\mathbf{T}_{12} = \frac{1}{L_{12}} \begin{pmatrix} -(y_2 - y_1) & 0 \\ 0 & (x_2 - x_1) \\ (x_2 - x_1) & -(y_2 - y_1) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_{23} = \frac{1}{L_{23}} \begin{pmatrix} -(y_3 - y_2) & 0 \\ 0 & (x_3 - x_2) \\ (x_3 - x_2) & -(y_3 - y_2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{31} = \frac{1}{L_{31}} \begin{pmatrix} -(y_1 - y_3) & 0 \\ 0 & (x_1 - x_3) \\ (x_1 - x_3) & -(y_3 - y_1) \end{pmatrix}$$

Finalmente se obtiene el vector curvaturas como

$$\kappa^e = \frac{0,5L_{12}}{\Delta_{e_1}} \mathbf{T}_{12} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\}_{i \rightarrow j} + \frac{0,5L_{23}}{\Delta_{e_1}} \mathbf{T}_{23} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\}_{j \rightarrow k} + \frac{0,5L_{31}}{\Delta_{e_1}} \mathbf{T}_{31} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\}_{k \rightarrow i}$$

Si se trata de un elemento extremo, es decir, que no comparta algún lado con ningún elemento, el giro en ese lado vendrá definido completamente por el giro del elemento cuya curvatura estamos calculando. En cuanto a las condiciones de contorno y más información sobre el elemento BPT se puede encontrar en las referencias 5 y 6.

Una vez determinada la variación del potencial debida al comportamiento de flexión y al comportamiento de membrana, se obtiene la suma de ambos para cada elemento

$$\delta V^e = \delta V_{\text{membrana}}^e + \delta V_{\text{flexion}}^e = \mathbf{a}_p^{eT} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{flexion}}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta V_{\text{membrana}}^e \end{bmatrix} \mathbf{a}^e - \mathbf{a}_p^{eT} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_{\text{flexion}}^e \\ \mathbf{f}_{\text{membrana}}^e \end{array} \right\}$$

ANÁLISIS DE INESTABILIDAD INICIAL BST Y BCIZ

En este apartado el elemento superficial plano está solicitado por unos esfuerzos de membrana primarios N_{x_0} , N_{y_0} , N_{xy_0} que han generado unos movimientos (u, v, w) cuyo efecto se desprecia. Se determinan las ecuaciones que rigen el equilibrio asociada a unas cargas adicionales (p_x, p_y, p_z) y la estabilidad. Se supone que las cargas (p_x, p_y, p_z) y los movimientos (u, v, w) son magnitudes muy pequeñas, mientras que los esfuerzos primarios son magnitudes finitas.

En estas condiciones, el potencial interno y el externo debido a las cargas (p_x, p_y, p_z) se escribe igual que en el apartado anterior, mientras que sólo se anotan los términos cuadráticos del potencial externo asociado a los esfuerzos primarios.

$$U_a = \frac{1}{2} \iint \left[N_{x_0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy_0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + N_{y_0} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

La existencia de los esfuerzos primarios N_{x_0} , N_{y_0} , N_{xy_0} modifica la expresión del incremento de potencial al pasar de la geometría de equilibrio a la perturbada $d + \delta d$, en los términos

$$\begin{aligned} \Delta U_a &= \frac{t}{2} \iint (2N_{x_0} w'^x w'_p{}^x + 2N_{xy_0} (w'_p{}^x w'^y + w'^x w'_p{}^y) + 2N_{y_0} w'^y w'_p{}^y) dx dy + \\ &+ \frac{t^2}{2} \iint (N_{x_0} w'^x{}^2 + 2N_{xy_0} w'_p{}^x w'_p{}^y + N_{y_0} w'^y{}^2) dx dy \\ \delta U_a &= \iint (N_{x_0} w'^x w'_p{}^x + N_{xy_0} (w'_p{}^x w'^y + w'^x w'_p{}^y) + N_{y_0} w'^y w'_p{}^y) dx dy \end{aligned}$$

Las ecuaciones de equilibrio se obtienen imponiendo la condición $\delta V = 0$ e integrando por partes, resulta las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno. Las ecuaciones son

$$\begin{aligned} D_m \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] &= -p_x \\ D_m \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] &= -p_y \\ D_f \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \left(N_{x_0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{y_0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy_0} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) &= p_z \end{aligned}$$

Las dos primeras ecuaciones coinciden con la de equilibrio lineal de las lajas y la tercera ecuación es la que define el equilibrio inicial de las placas delgadas solicitadas por esfuerzos primarios de membrana N_{x_0} , N_{y_0} , N_{xy_0} fue deducida por Bryan¹¹.

Para el análisis del equilibrio inicial por elementos finitos se determinará δV en cada elemento

$$\delta V^e = \mathbf{a}_p^{eT} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{flexion}}^e + \mathbf{K}_{\text{geometrica}}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\text{membrana}}^e \end{bmatrix} \mathbf{a}^e - \mathbf{a}_p^{eT} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\text{flexion}}^e \\ \mathbf{f}_{\text{membrana}}^e \end{Bmatrix}$$

y se impone la condición de equilibrio global $\delta V = \sum^e \delta V^e = 0$

Para estudiar la estabilidad del equilibrio, se emplea la segunda variación del potencial $\delta^2 V$, que viene dada por los términos cuadráticos en t del incremento de potencial ΔV

$$\begin{aligned}\delta^2 V &= D_m \iint \left[u_p'^{x2} + v_p'^{y2} + 2\mu v_p'^y u_p'^x + \frac{(1-\mu)}{2} (u_p'^y + v_p'^x)^2 \right] dx dy + \\ &+ D_f \iint [w_p'^{xx2} + w_p'^{yy2} + 2\mu w_p'^{yy} w_p'^{xx} + 2(1-\mu)w_p'^{xy2}] dx dy + \\ &+ \iint (N_{x_0} w_p'^{x2} + 2N_{xy_0} w_p'^x w_p'^y + N_{y_0} w_p'^{y2}) dx dy\end{aligned}$$

Aplicando el criterio de Trefftz $\delta[\delta^2 V] = 0$, para lo que anotamos la segunda variación del potencial total de la forma

$$\frac{1}{2}\delta^2 V = \iint F(x, u_p, v_p, w_p, u_p', u_p'', v_p', v_p'', w_p', w_p'', w_p''') dx dy$$

y escribiendo directamente las ecuaciones de Euler, se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} = 0 \rightarrow D_m \left[\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_p}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\mu)}{2} \left(\frac{\partial^2 v_p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} \right) \right] = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v_y} = 0 \rightarrow D_m \left[\frac{\partial^2 v_p}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_p}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\mu)}{2} \left(\frac{\partial^2 u_p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2} \right) \right] = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow D_f \left(\frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_p}{\partial y^4} \right) + \left(N_{x_0} \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} + N_{y_0} \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} + 2N_{xy_0} \frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} \right) &= 0\end{aligned}$$

Para estudiar la inestabilidad inicial con elementos finitos se debe determinar la segunda variación del potencial $\delta^2 V^e$ de cada elemento. Se puede escribir como

$$\delta^2 V = \delta^2 V_{\text{membrana}}^e + \delta^2 V_{\text{flexion}}^e + \delta^2 V_{\text{geometrica}}^e$$

siendo

$$\delta^2 V_{\text{membrana}}^e = D_m \iint \left[u_p'^{x2} + v_p'^{y2} + 2\mu v_p'^y u_p'^x + \frac{(1-\mu)}{2} (u_p'^y + v_p'^x)^2 \right] dx dy = \mathbf{a}_p^{eT} \mathbf{K}_{\text{membrana}}^e \mathbf{a}_p^e$$

$$\delta^2 V_{\text{flexion}}^e = D_f \iint [w_p'^{xx2} + w_p'^{yy2} + 2\mu w_p'^{yy} w_p'^{xx} + 2(1-\mu)w_p'^{xy2}] dx dy = \mathbf{a}_p^{eT} \mathbf{K}_{\text{flexion}}^e \mathbf{a}_p^e$$

$$\delta^2 V_{\text{geometrica}}^e = \iint (N_{x_0} w_p'^{x2} + 2N_{xy_0} w_p'^x w_p'^y + N_{y_0} w_p'^{y2}) dx dy = \mathbf{a}_p^{eT} \mathbf{K}_{\text{geometrica}}^e \mathbf{a}_p^e$$

La matriz $\mathbf{K}_{\text{geometrica}}$ para el elemento BCIZ

$$K_G = \iint \left(N_{x_0} \begin{Bmatrix} \frac{d\phi_{11}}{dx} \\ \vdots \\ \frac{d\phi_{33}}{dx} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{d\phi_{11}}{dx} \quad \dots \quad \frac{d\phi_{33}}{dx} \right\} + N_{y_0} \begin{Bmatrix} \frac{d\phi_{11}}{dy} \\ \vdots \\ \frac{d\phi_{33}}{dy} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{d\phi_{11}}{dy} \quad \dots \quad \frac{d\phi_{33}}{dy} \right\} + \right. \\ \left. + 2N_{xy_0} \begin{Bmatrix} \frac{d\phi_{11}}{dx} \\ \vdots \\ \frac{d\phi_{33}}{dx} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{d\phi_{11}}{dy} \quad \dots \quad \frac{d\phi_{33}}{dy} \right\} \right) dS$$

y para el elemento BPT

$$K_G = \int \left(N_{x_0} \begin{Bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \\ \frac{dN_3}{dx} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \quad \frac{dN_3}{dx} \right\} + N_{y_0} \begin{Bmatrix} \frac{dN_1}{dy} \\ \frac{dN_2}{dy} \\ \frac{dN_3}{dy} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{dN_1}{dy} \quad \frac{dN_2}{dy} \quad \frac{dN_3}{dy} \right\} + \right. \\ \left. + 2N_{xy_0} \begin{Bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \\ \frac{dN_3}{dx} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{dN_1}{dy} \quad \frac{dN_2}{dy} \quad \frac{dN_3}{dy} \right\} \right) dS \\ K_G = \int \left(N_{x_0} \begin{Bmatrix} \frac{b_1}{2A} \\ \frac{b_2}{2A} \\ \frac{b_3}{2A} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{b_1}{2A} \quad \frac{b_2}{2A} \quad \frac{b_3}{2A} \right\} + N_{y_0} \begin{Bmatrix} \frac{c_1}{2A} \\ \frac{c_2}{2A} \\ \frac{c_3}{2A} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{c_1}{2A} \quad \frac{c_2}{2A} \quad \frac{c_3}{2A} \right\} + \right. \\ \left. + 2N_{xy_0} \begin{Bmatrix} \frac{b_1}{2A} \\ \frac{b_2}{2A} \\ \frac{b_3}{2A} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{c_1}{2A} \quad \frac{c_2}{2A} \quad \frac{c_3}{2A} \right\} \right) dS$$

La segunda variación del potencial en cada elemento se puede expresar como

$$\delta^2 V^e = \mathbf{a}_p^{eT} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{flexion}}^e + \mathbf{K}_{\text{geometrica}}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\text{membrana}}^e \end{bmatrix} \mathbf{a}_p^e$$

y la de la estructura será la suma de la de sus elementos

$$\delta^2 V = \sum^e \delta^2 V^e$$

Se producirá la inestabilidad, aplicando criterio de Trefftz, cuando $\delta(\delta^2 V) = 0$, lo que equivale a que

$$\delta^2 V = \sum^e \mathbf{a}_p^{eT} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{flexion}}^e + \mathbf{K}_{\text{geometrica}}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\text{membrana}}^e \end{bmatrix} \mathbf{a}_p^e = 0$$

para alguna perturbación.

COMPARACIÓN BST VS BCIZ

A continuación se presentan tres ejemplos en los que se estudian los modos de pandeo y cargas críticas de paneles. El comportamiento de membrana se modeliza con el elemento CST y el comportamiento de flexión con los elementos BPT y BCIZ. El elemento BPT presenta la ventaja, de que sólo maneja como grados de libertad a los desplazamientos transversales de los nodos, observándose que proporciona una estimación muy buena de las cargas críticas y de los modos de pandeo.

Ejemplo 1. Cargas críticas de una placa cuadrada solicitada por esfuerzos primarios de membrana

Ejemplo 1.1

En la Figura 6 se representa una placa de acero $600 \times 600 \times 8$ (mm) solicitada por un esfuerzo primario de compresión. La carga crítica es $\frac{N_{x_{cr}}}{t} = \sigma_{cr} = 4 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{t}{b} \right]^2$. En la tabla adjunta se compara la solución analítica con la que proporciona el programa CRIT trabajando con diversos elementos y mallas (Figura 7).

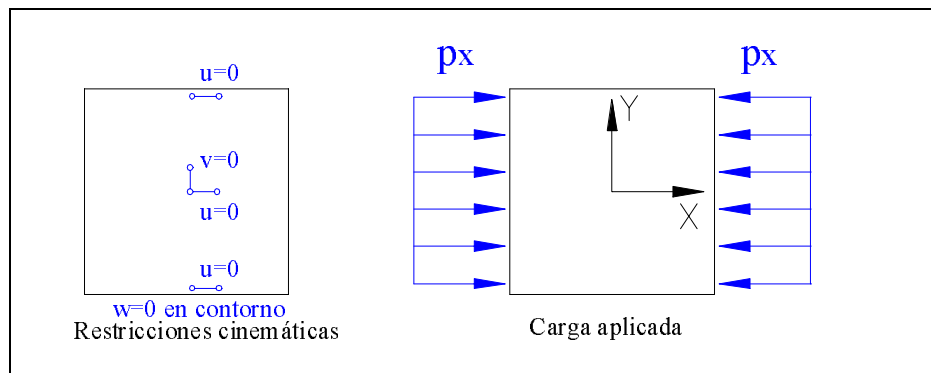


Figura 6. Definición geométrica del Ejemplo 1.1

Elemento y malla	Tensión de compresión σ $600 \times 600 \times 8$ (mm)		NGDL
	kp/cm ²	Error	
BPT 10×10	1239	8 %	81
BPT 15×15	1268	6 %	196
BPT 20×20	1290	4 %	320
BCIZ 10×10	1317	2,4 %	323
Analítica	1349	0 %	–

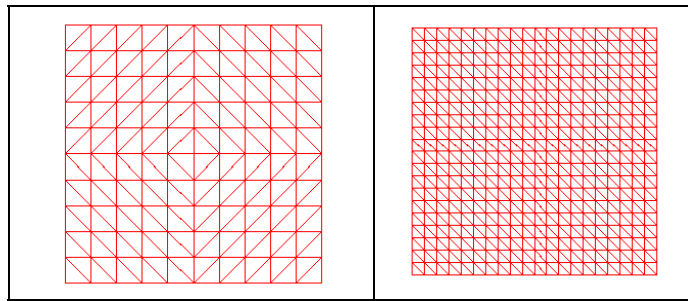


Figura 7. Malla 10×10 ; malla 20×20

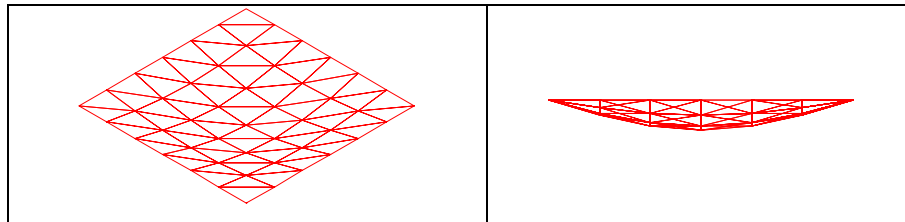


Figura 8. El primer modo de pandeo $\mu_{cr_1} = 1290 \text{ kp/cm}^2$

Ejemplo 1.2

En la Figura 9 se representa una placa de acero de $600 \times 600 \times 4$ (mm) solicitada por un esfuerzo primario de corte. La carga crítica es $\frac{N_{xy,cr}}{t} = \sigma_{cr} = 9,34 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{t}{b}\right]^2$. En la tabla adjunta se compara la solución analítica con la que proporciona el programa CRIT trabajando con diversos elementos y mallas. En la Figura 10 se representa el primer modo de pandeo con el elemento BPT.

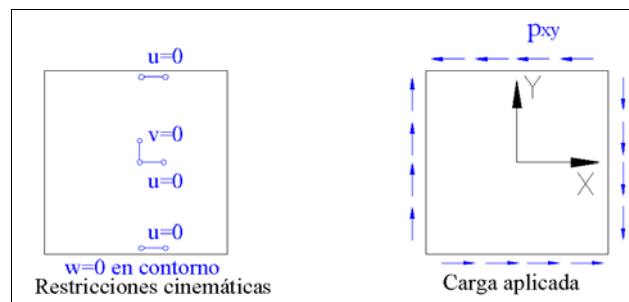


Figura 9. Definición geométrica del Ejemplo 1

Elemento y malla	Tensión de compresión τ $600 \times 600 \times 4$ (mm)		NGDL
	kp/cm ²	Error	
BPT 10×10	808	2,66 %	81
BPT 15×15	787	0 %	196
BPT 20×20	780,5	-0,8 %	320
BCIZ 10×10	750	-4,7 %	323
Analítica	787	0 %	–

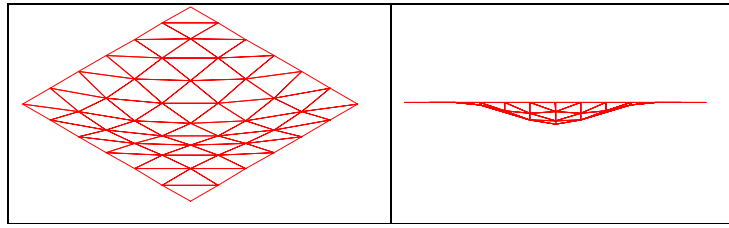


Figura 10. Primera carga crítica

CONCLUSIONES

Se ha presentado la aplicación del elemento sin rotaciones BST para realizar análisis de inestabilidad inicial con el propósito de obtener la carga de colapso de paneles metálicos.

De los resultados obtenidos se puede concluir que presenta un comportamiento excelente a nivel cualitativo ante esfuerzos de compresión y corte incluso empleando mallas con pocos grados de libertad y mejorando claramente los resultados obtenidos con el elemento BCIZ. A nivel cuantitativo se observa que frente a cargas de compresión el error cometido en la carga crítica con 300 grados de libertad es del orden del 2 % casi la mitad del que se obtiene con el BCIZ para el mismo número de gdl. Frente a cargas de corte el comportamiento resulta ser incluso mejor, ya que para 200 gdl se alcanza un error muy próximo al 0 %, mientras que con el BCIZ el error resulta ser casi de un 5 %.

De los resultados obtenidos se puede concluir que este elemento deberá ser tenido en cuenta a la hora de realizar estudios inestabilidad inicial. Estos estudios serán exigidos en un futuro próximo por los eurocódigos para determinar de forma precisa la carga de colapso de los elementos de clase 4, teniendo en cuenta la interacción entre los elementos que forman la sección y el pandeo por distorsión.

En futuros trabajos se obtendrá la precisión de este elemento para determinar las cargas de colapso de paneles esbeltos, teniendo en cuenta imperfecciones geométricas, tensiones residuales y el comportamiento tanto no lineal geométrico como no lineal mecánico.

REFERENCIAS

- 1 A. Agüero, “Método aproximado para estimar el estado límite último en entramados metálicos esbeltos”, Tesis doctoral, Valencia, (2003).
- 2 G.P. Bazeley, Y.K. Cheung, B.M. Irons y O.C. Zienkiewicz, “Triangular elements in plate bending-conforming and nonconforming solutions”, *Proceedings 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80*, Air Force Institute of Technology, Dayton, Ohio, pp. 547–584, (1966).
- 3 Eurocódigo-3, “Proyecto de estructuras de acero”, Parte 1-1: “Reglas generales y reglas para edificación”, (1996).
- 4 Kroll *et al.*, “Charts for the calculation of the critical stress for local instability of columns with I, Z, channel and rectangular tube sections”, *NACA Wartime Rep.*, N° L-429. (1943).
- 5 E. Oñate *et al.*, “Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node: a simple three node triangle”, *Engineering computations*, Vol. **10**, pp. 543–561, (1993).
- 6 E. Oñate y F. Zárata, “Rotation-free plate and shell triangles”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **47**, pp. 557–603, (2000).

- 7 B.W. Schafer, "Local, distortional, and Euler buckling of thin walled columns", *Journal of structural engineering*, Vol. **128**, N° 3, (2002).
- 8 Timoshenko y Gere, "*Theory of elastic stability*", Mc Graw Hill, Nueva York, (1961).
- 9 Y.K. Cheung y L.G. Tam, "*Finite Strip Method*", Chemical Rubber, Boca Raton, Fla., (1998).
- 10 O.C. Zienkiewicz, "*El método de los elementos finitos*", Reverté, S.A, Barcelona, (2000).
- 11 G.H. Bryan, "On the stability of a plate under thrust in its own plane, with applications to the 'Buckling' of the sides of a ship", *Proc. London Math. Soc.*, Vol. **22**, p. 54, (19811).