

# CÁLCULO DE LA TENSIÓN DE CORTE A PARTIR DE LOS PERFILES DE VELOCIDAD EN UN RÍO DE GRAVAS

Celso García<sup>1</sup> y Ramon J. Batalla<sup>2</sup>

## Resumen

A partir de 6 perfiles de velocidad, realizados en una sección transversal de un río de gravas con caudal bajo, se ha calculado la tensión de corte aplicando la ley del muro. Las medidas de velocidad se representan en función del logaritmo de la altura a la que fueron realizadas. A partir de la ecuación de una recta de regresión se calculan los principales parámetros hidráulicos: velocidad de corte, tensión de corte y altura de la rugosidad. Los resultados demuestran que las medidas realizadas para cada perfil dentro de la capa logarítmica de la columna de agua (20 %) son las que permiten un cálculo correcto de la tensión de corte que realiza el flujo sobre las partículas. La tensión media de corte, calculada mediante la ecuación de du Boys, sobrestima en más de 5 veces el valor obtenido en la tensión de corte deducida a partir de las velocidades. Se recomienda, siempre que sea posible, utilizar las medidas de velocidad dentro de la capa logarítmica para el posterior cálculo de la tensión de corte, ya que estos valores reflejan la fuerza que realiza el flujo sobre las partículas del lecho de manera más precisa que los deducidos a partir de la ecuación de du Boys. **Palabras clave:** río, perfiles de velocidad, tensión de corte, parámetros hidráulicos.

## Introducción

En flujo uniforme, constante, la fuerza que realiza el agua debida a la aceleración de la gravedad es contrarrestada por la rugosidad del lecho fluvial. La resistencia media por unidad de área  $\tau$ , de la misma forma, la fuerza tangencial que realiza el flujo por unidad de área, denominada tensión media de corte  $\tau$ , se calcula como:

$$\tau = \rho g R S \quad (1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del flujo,  $g$  la aceleración de la gravedad,  $R$  el radio hidráulico y  $S$  la pendiente del agua.

Esta tensión de corte es fundamental en los estudios de transporte de sedimento y es la base, por ejemplo, de la conocida ecuación de Meyer-Peter y Muller (1948) para el cálculo del transporte de fondo.

Uno de los problemas que aparecen al aplicar la tensión media de corte es cómo diferenciar de la tensión media aquellas tensiones que actúan sobre las partículas, y sobre el lecho y los márgenes del cauce (Carson, 1987). En cauces estrechos e irregulares son conocidas las variaciones que se producen en la tensión de corte en una sección (Bathurst, 1979), y por lo tanto su cálculo mediante la ecuación 1 puede dar una sobrestimación considerable que debe ser corregida.

Una de las alternativas al cálculo de la tensión de corte mediante la ecuación 1 son las medidas de velocidad, calculando a partir de ellas la tensión de corte:

$$\tau = \rho(u_*)^2 \quad (2)$$

donde  $u_*$  es la velocidad de corte.

Las medidas de velocidad se toman a diferentes alturas en la vertical del flujo y para ello es im-

1. Dep. Ciències de la Terra, Universitat de les Illes Balears, Ctra de Valldemossa km 7.5, 07071 Palma de Mallorca

2. Dep. de Medi Ambient i Ciències del Sòl, Universitat de Lleida, Alcalde Rovira Roure 177, 25198 Lleida

Correspondencia con el primer autor: [celso.garcia@uib.es](mailto:celso.garcia@uib.es) Fax: 971 173 184 Teléfono: 971 172 793

Artículo recibido el 5 de marzo de 1999, recibido de forma revisada el 16 de noviembre de 1999, y aceptado para su publicación el 10 de febrero de 2000.

portante conocer su estructura. La estructura del flujo de agua que circula por un canal puede dividirse en diferentes capas. La primera capa, en contacto con el lecho, es de tamaño reducido, a menudo de unos pocos milímetros; se denomina subcapa laminar y en ríos naturales es destruida o inexistente. Por encima de esta capa encontramos la capa logarítmica que como su nombre indica puede ser descrita mediante funciones logarítmicas. Esta capa es muy importante ya que las medidas realizadas en ella permiten el cálculo de la tensión de corte que actúa sobre el lecho. No hay un consenso generalizado sobre su extensión, aunque se adopta la convención del 20 % de la profundidad del flujo (Bathurst, 1982; Nezu y Nakagawa, 1993). Otros estudios le dan una mayor extensión (50% en Ferguson et al. 1989; Ferguson y Ashworth, 1992; Wilcock, 1996).

El perfil de velocidad en esta capa es descrito utilizando la ecuación de von Karman-Prandtl, también conocida como la ley del muro. Según esta ecuación la velocidad del flujo es una función logarítmica de la distancia relativa desde el lecho y se expresa como:

$$u_z = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z}{D}\right) + 8,5 \quad (3)$$

donde  $u_z$  es la velocidad media a la distancia  $z$  desde el lecho,  $k$  es la constante de von Karman (aproximadamente 0,4),  $u_*$  es la velocidad de corte y  $D$  es el diámetro de la partícula. La constante empírica se basa en los experimentos de Nikuradse (1933) en una tubería con arena uniforme y por lo tanto varía en función de los tamaños de las partículas.

En ríos naturales el lecho está formado por diferentes elementos rugosos que cambian de tamaño y forma, por lo tanto es conveniente introducir la altura de la rugosidad ( $z_0$ ) en la ecuación y así se elimina la necesidad de seleccionar una constante de Nikuradse cada vez que se quiera aplicar. La ecuación queda de la siguiente forma:

$$u_z = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (4)$$

En ríos de gravas,  $z_0$  tiene un valor de  $0,1D_{84}$  o  $0,2D_{50}$  deducido a partir de estudios empíricos (Leopold et al. 1964; Bray, 1979; Hey, 1979).

Este artículo tiene como objetivo calcular la tensión de arrastre a partir de perfiles de velocidad

tomados sobre el fondo de un río de gravas investigando: 1) las ventajas e inconvenientes de aplicar este método en río natural y con caudal bajo, 2) los efectos en la tensión de arrastre a partir del uso de diferentes profundidades, y 3) las diferencias que resultan de comparar la tensión de arrastre a partir de la ley del muro y utilizando la ecuación 1.

## Metodología

Los perfiles de velocidad fueron realizados en el río Segre a 4 km aguas arriba de su paso por la Seu d'Urgell (Lleida). Durante los dos días de trabajo de campo no se produjeron variaciones en el caudal base circulante, manteniéndose constante sobre los  $460 \text{ l s}^{-1}$ . Para el trabajo en concreto se seleccionó una sección representativa del cauce del río donde el flujo de agua tuviera suficiente velocidad para movilizar las hélices del molinete. La sección seleccionada se localizó en un área de transición entre un rápido y una poza, utilizando términos geomorfológicos. La caracterización granulométrica de la superficie del lecho se realizó a partir de una muestra de 420 cantos recogidos según el método de Wolman (1955). El resultado dio un tamaño medio ( $D_{50}$ ) del lecho de 42 mm y un  $D_{84}$  de 80 mm.

La velocidad del flujo fue medida con un molinete hidráulico de 50 mm (OTT C-2 n°112284) montado en una varilla de 9 mm. El número de vueltas del molinete se transforma en velocidad a partir de las ecuaciones derivadas de la calibración del molinete por el fabricante. En total se realizaron 6 perfiles verticales de velocidad con 6 puntos de medida en cada uno. En cada perfil las medidas de velocidad se tomaron a una distancia del lecho de 5, 8, 11, 14, 17 y 22 centímetros. Cada medida de velocidad en un punto corresponde a un periodo de 30 segundos. La medida se repetía una segunda vez para comprobar las posibles variaciones o errores y, en algunos casos, por tercera vez si era necesario.

## Resultados

Para cada perfil de velocidad se obtiene una gráfica en la que se muestra cómo la velocidad del flujo aumenta a medida que se sube en la columna de agua (figura 1). En ella se pueden diferenciar dos tramos bien distintos: a) el primero corresponde a los tres puntos inferiores, que presentan una relación lineal con un aumento gradual de  $0,08 \text{ m s}^{-1}$  en la velocidad, y b) los tres puntos superiores, donde la velocidad del flujo aumenta rápidamente a los 14 cm de altura para después continuar el incremento pero con un valor inferior.

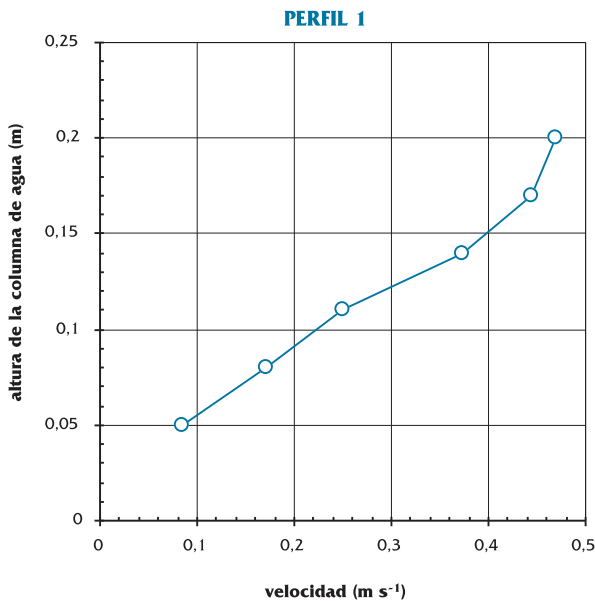


Figura 1. Variación de la velocidad del flujo de agua a diferentes alturas en la columna de agua del perfil 1.

El cálculo de la velocidad crítica y de la tensión de corte es rápido a partir de las medidas de velocidad en la capa logarítmica. Antes de adoptar este criterio, es decir, utilizar solamente las medidas realizadas dentro del 20 % de la profundidad del flujo, se ha optado por utilizar las 6 medidas de velocidad que, en los 4 primeros perfiles, corresponden a un 50 % de la profundidad del flujo.

Para el cálculo de la velocidad crítica ( $u_*$ ), de la tensión de corte ( $\tau$ ), y de la altura de la rugosidad ( $z_0$ ), las velocidades se representan en función del logaritmo de la profundidad  $z$ , a la cual han estado tomadas las medidas, y se aplica una regresión por mínimos cuadrados (figura 2). Se ha utilizado la velocidad como variable dependiente y el logaritmo de  $z$  como variable independiente a partir de las recomendaciones de Bergeron y Abrahams (1992), quienes demuestran que el error cometido utilizando la velocidad como variable independiente es mucho mayor.

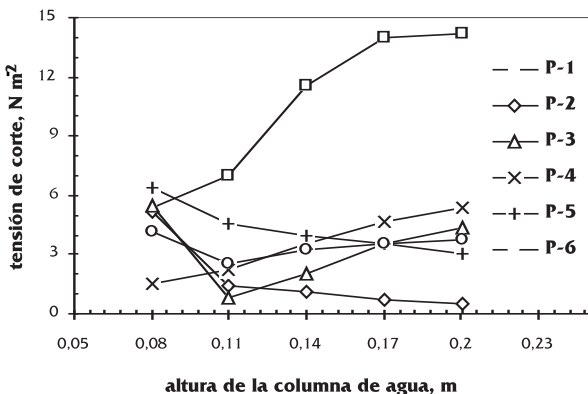


Figura 2. Velocidad del flujo de agua en función del logaritmo de la altura a la que ha sido medida la velocidad.

A partir de la ecuación de la recta de regresión ( $y = bx + a$ ) la pendiente  $b$  y la constante  $a$  nos sirven para calcular la  $u_*$ ,  $\tau$ , y  $z_0$  de la siguiente manera:

$$u_* = b k \quad (5)$$

$$\tau = \rho(u_*)^2 = \rho(b k)^2 = 160 b^2 \quad (6)$$

$$z_0 = e^{(-a/b)} \quad (7)$$

La ventaja de este método es que los errores estándar de los coeficientes de regresión ( $a$  y  $b$ ) pueden ser utilizados para calcular los errores estándar y los intervalos de confianza para los valores de velocidad de corte y altura de la rugosidad.

La tabla 1 muestra los resultados obtenidos a partir de la ecuación de la recta de regresión. De los 6 perfiles de velocidad, el perfil n° 1 tiene los valores más altos en la velocidad de corte y, por consiguiente, en la tensión de corte ( $14,2 \text{ N m}^{-2}$ ). Le siguen los perfiles 3, 4, 5 y 6, con valores entre  $9,08$  y  $3,02 \text{ N m}^{-2}$ . Todos ellos con un coeficiente de determinación elevado y errores muy bajos en el cálculo de la velocidad de corte. Solamente el perfil n° 2 presenta un coeficiente de determinación bajo (de  $0,61$ ) y un error muy elevado en el cálculo de la velocidad de corte.

Cabe preguntarse si estos valores tan dispares en la tensión de corte de una misma sección, aunque estadísticamente significativos, exceptuando el perfil n° 2, son el resultado del cálculo de la velocidad de corte utilizando el 50 % de la profundidad del flujo y, por lo tanto, incluyendo valores que se encuentran fuera de la denominada capa logarítmica. Para ello, se ha realizado el cálculo anterior pero usando las medidas de velocidad tomadas dentro del 20 % de la columna de agua (tabla 2). Uno de los principales inconvenientes es el número de medidas utilizadas al aplicar este criterio en profundidades de 30 a 60 cm, donde el 20 % representa entre 6 y 12 cm, respectivamente. En definitiva, tan solo el perfil 4 incluye 3 puntos de medida, el resto ha sido calculado con 2 puntos.

Al analizar la tabla 2 en detalle, se observa cómo los resultados se homogenizan para los 6 perfiles. Los valores que se obtienen, por ejemplo para la tensión de corte, son bastante similares, con pequeñas variaciones sobre los  $5 \text{ N m}^{-2}$ . Tan solo el perfil 4 presenta unos valores inferiores. Es cierto que los valores no tienen por qué coincidir en los 6 perfiles, pero tampoco por qué presentar grandes variaciones, ya que fueron tomados con un caudal

Tabla 1. Resultados obtenidos a partir de la regresión por mínimos cuadrados de las medidas de velocidad en función del logaritmo de la profundidad a la cual han sido tomadas. Para los 6 perfiles se han utilizado las 6 medidas a diferentes alturas, que representan el 50% de la columna de agua. Los parámetros hidráulicos (velocidad de corte, tensión de corte y altura de la rugosidad) han sido calculados a través de las ecuaciones (5), (6) y (7).

	Constante a	Pendiente b	Velocidad de corte ( $u_*$ ), $ms^{-1}$	Tensión de arrastre ( $\tau$ ), $Nm^{-2}$	Altura de la rugosidad ( $z_0$ )	Coefficiente de determi- nación ( $r^2$ )	Error en el cálculo de $u_*$ (1)	Error en el cálculo de $z_0$ (2)
PERFIL 1	0,947	0,297	0,119	14,2	0,042	0,97	0,03	0,03
PERFIL 2	0,615	0,054	0,022	0,47	0	0,61	0,64	33,04
PERFIL 3	0,637	0,165	0,095	9,08	0,038	0,88	0,14	0,15
PERFIL 4	0,646	0,183	0,073	5,36	0,029	0,96	0,04	0,06
PERFIL 5	0,584	0,137	0,055	3,02	0,014	0,94	0,06	0,13
PERFIL 6	0,608	0,149	0,06	3,57	0,017	0,97	0,03	0,05

1. Error ( $u_*$ ) =  $[(1/r^2)-1]$

2. Error ( $z_0$ ) =  $\left[ e^{\left(\frac{u}{b}\right)(1-r^2)} - 1 \right]$

Tabla 2. Resultados obtenidos a partir de la regresión por mínimos cuadrados de las medidas de velocidad en función del logaritmo de la profundidad a la cual han sido tomadas. Para los 6 perfiles se han utilizado sólo las medidas realizadas dentro de la capa logarítmica del flujo de agua, es decir, en el fondo del 20% de la columna de agua.

	Velocidad de corte ( $ms^{-1}$ )	Tensión de arrastre ( $Nm^{-2}$ )	Altura de la rugosidad (m)	Columna de agua (%)
PERFIL 1	0,073	5,36	0,032	20
PERFIL 2	0,072	5,16	0,005	23
PERFIL 3	0,074	5,51	0,029	20
PERFIL 4	0,048	2,28	0,019	22
PERFIL 5	0,080	6,43	0,023	17
PERFIL 6	0,065	4,18	0,018	16

bajo y constante, en una misma sección, y a unas profundidades similares. Aunque, en una sección de un río de gravas, la superficie del lecho (rugosidad) produce modificaciones en la tensión de corte que puede ser importante.

### Discusión

Los resultados obtenidos muestran claramente las variaciones que se producen en los valores de tensión de corte si se utiliza el 50 % de la columna de agua o si, por el contrario, se usan las medidas de velocidad tomadas en la capa logarítmica de la columna de agua (20 % desde la base). Las diferencias entre los 6 perfiles son notables para el primer cálculo (Tabla 1), y se homogeneizan en el segundo (Tabla 2).

Para centrar la discusión sobre cual son los resultados que describen, de una manera más correcta, la fuerza que realiza localmente el flujo sobre el lecho del río, se ha representado en la figura 3 la oscilación en la tensión de corte a medida que subimos en la columna de agua. Los cálculos se han realizado a partir de la regresión y utilizando las ecuaciones 5 y 6. El primer punto incluye dos medidas (altura de 0,08 m), el segundo tres, y así sucesivamente hasta el último valor, que incluye las seis.

Solamente los perfiles 1 y 4 presentan un aumento continuo en la tensión de corte con la altura. En el caso del perfil 1 el aumento es superior al del perfil 4. Los perfiles 2 y 5 tienen un descenso paulatino en la tensión de corte, mientras que los perfiles 3 y 6 presentan un primer descenso, para después aumentar de valor.

En la figura 3 destaca, sobre todo, una altura que marca un punto clave en la mayoría de los perfiles: los 8 cm. Esta altura incluye las medidas realizadas dentro de la denominada capa logarítmica. En 4 perfiles representa un máximo en el valor de la tensión de corte y, por lo tanto, corrobora los trabajos realizados en canales experimentales, donde se demuestra que a partir de las medidas tomadas dentro de esa capa se obtienen tres parámetros hidráulicos: velocidad crítica, tensión de corte y rugosidad.

Otro factor que destaca al analizar la figura 3 es la extensión de la capa logarítmica. Esta no se reduce exclusivamente al 20 % de la columna de agua para todos los perfiles, y puede incluir un porcentaje superior, como sería el caso de los perfiles 1 y 4. La respuesta está en la rugosidad local del fondo donde se coloca la varilla con el molinete. Cuando el material del fondo es más grueso produce una mayor rugosidad que afecta al flujo de superficie li-

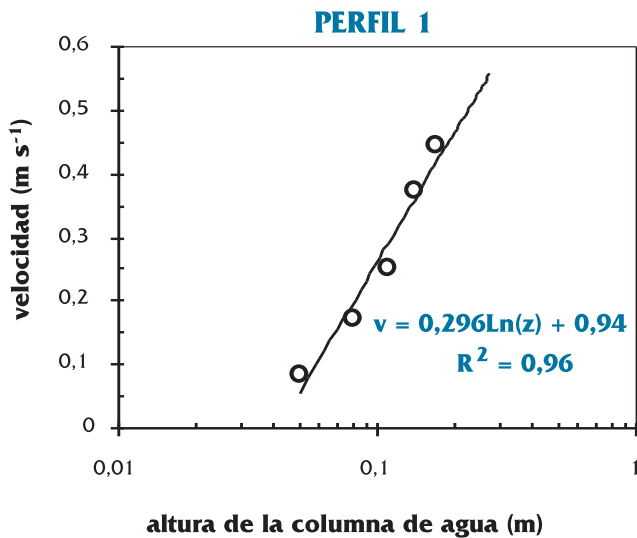


Figura 3. Variación de la tensión de corte en función de la altura en la columna de agua para los 6 perfiles de velocidad.

bre. En cambio, como ocurrió con los perfiles 1 y 4, si la varilla se coloca sobre un área de menor rugosidad, con tamaños más finos, las distorsiones sobre el flujo son menores y podría facilitar la extensión en altura de la capa logarítmica.

Uno de los aspectos más importantes es comparar la tensión de corte obtenida a partir de los perfiles de velocidad con la calculada a partir de la ecuación (1). La tensión de corte, deducida de los 6 perfiles de velocidad, tiene un valor medio de  $4,8 \text{ N m}^{-2}$ . Valor que representa la tensión media de corte que realiza el flujo sobre las partículas en los 6 puntos de la sección. Para calcular la tensión media de corte sobre la sección se necesita el radio hidráulico de la sección (0,28 m), y la pendiente del lecho (1%). Una vez conocidos estos valores, y a través de la ecuación (1), se obtiene una tensión media de corte de  $27,4 \text{ N m}^{-2}$ .

Las diferencias son importantes al comparar los dos valores. La tensión media de corte, utilizando la ecuación de du Boys, es 5 veces el valor obtenido a partir de los perfiles. Incluso usando la mitad de la profundidad del flujo, en los perfiles de velocidad, el valor más elevado en la tensión de corte corresponde al perfil 1 con  $14,2 \text{ N m}^{-2}$  (Tabla 1). La explicación física de este resultado radica en la composición de la tensión media de corte. La ecuación (1) representa la tensión que ejerce el flujo sobre las partículas más la tensión sobre el lecho y los márgenes del cauce. En cambio, la tensión derivada de los perfiles de velocidad representa la fuerza que ejerce la columna de agua sobre las partículas.

## Conclusiones

Los resultados demuestran que las medidas de velocidad tomadas dentro de la capa logarítmica (20 % en la base de la columna de agua) permiten calcular de manera fiable la fuerza que realiza el flujo sobre las partículas del lecho. Sólo en dos perfiles (1 y 4) la capa logarítmica podría extenderse a una mayor proporción de la columna de agua, como consecuencia de la rugosidad local del fondo donde se coloca la varilla con el molinete. Esta información experimental presenta problemas metodológicos, en cuanto a toma de medidas, al realizar los perfiles de velocidad en flujos de agua con profundidades entre 30 y 60 cm, ya que no permiten un número elevado de medidas dentro de la capa logarítmica.

Dentro de las posibilidades de un trabajo de investigación se recomienda la realización de perfiles de velocidad para el cálculo de la tensión de corte y su posterior comparación con la ecuación 1 que permitiría una calibración y estimación de las tensiones que realiza el flujo sobre las partículas, y sobre el lecho y los márgenes del cauce. Para los estudios sobre inicio del movimiento de las partículas del fondo de un lecho de gravas, la tensión de corte, calculada a partir de los perfiles de velocidad, es un indicador más real de la fuerza que realiza el flujo sobre las partículas que la tensión media de corte calculada con la ecuación (1). Además, los perfiles de velocidad permiten realizar una cartografía de las variaciones en la tensión de corte a lo largo de una sección del río.

## Agradecimientos

Los cursos de verano de la Universitat de Lleida permitieron la realización del trabajo de campo y su posterior plasmación en este artículo. Agradecemos el material de campo facilitado por el GRAM (Grup de Recerca Ambiental Mediterrània) y el "apoyo moral" de Maria Sala y Moshe Inbar. Los comentarios realizados por dos evaluadores anónimos fueron de gran utilidad.

## Lista de símbolos

- D** diámetro de la partícula
- g** aceleración de la gravedad
- R** radio hidráulico
- S** pendiente del agua
- z** distancia desde el lecho
- z<sub>0</sub>** altura de la rugosidad
- ρ** densidad del flujo de agua
- k** constante de von Karman (aproximadamente 0,4)

- $u_z$  velocidad media a la distancia  $z$  desde el lecho
- $u_*$  velocidad de corte
- $t$  tensión de corte

## Referencias

- Bathurst, J. C. (1979) Distribution of boundary shear stress in rivers, en Rhodes, D. D. y Williams, G. P. (eds.) Adjustments of the fluvial system, Kendall/Hunt Publishing, Iowa, 95-116.
- Bathurst, J. C. (1982) Theoretical aspects of flow resistance, en Hey, R. D., Bathurst, J. C. y Thorne, C. R. (eds) Gravel-Bed Rivers, Wiley, Chichester, 83-105.
- Bergeron, N. E. y Abrahams, A. D. (1992) Estimating shear velocity and roughness length from velocity profiles, Water Resources Research, 28 (8), 2155-2158.
- Bray, D. I. (1979) Estimating average velocity in gravel-bed rivers, Journal Hydraulic Division, ASCE, 105, 1103-1122.
- Carson, M. A. (1987) Measures of flow intensity as predictors of bed load. Journal of Hydraulic Engineering, 113 (11), 1402-1421.
- Ferguson, R. y Ashworth, P. J. (1992) Spatial patterns of bedload transport and channel change in braided and near-braided rivers, en Billi, P., Hey, R. D., Thorne, C. R. y Tacconi, P. (eds) Dynamics of Gravel-bed Rivers, Wiley, Chichester, 477-496.
- Ferguson, R., Prestegard, K. L. y Ashworth, P. J. (1989) Influence of sand on hydraulics and gravel transport in a braided gravel bed river, Water Resources Research, 25, 635-643.
- Hey, R. D. (1979) Flow resistance in gravel-bed rivers, Journal Hydraulic Division, ASCE, 105, 365-379.
- Leopold, L. B., Wolman, M. G. y Miller, J. P. (1964) Fluvial Processes in Geomorphology, W.H. Freeman y Company, San Francisco.
- Meyer-Peter, E. y Müller, R. (1948) Formulae for bedload transport. Proceedings of 3rd Congress, International Association of Hydraulic Research, Sweden, 39-64.
- Nezu, I. y Nakagawa, H. (1993) Turbulence in Open-Channel Flows, IAHR Monograph Series, A. A. Balkema, Rotterdam.
- Nikuradse, J. (1933) Stromungsgesetze in rauhen Rohren, VDI Forschungsheft 361.
- Wilcock, P. (1996) Estimating local bed shear stress from velocity observations, Water Resources Research, 32 (11), 3361-3366.
- Wolman, M. G. (1955) A method for sampling coarse riverbed material, Transactions of the American Geophysical Union, 35, 951-956.