

**Título: Maquetas virtuales dinámicas. Aplicación a la docencia e investigación sobre formas arquitectónicas**

**Autores**

Delgado Olmos, Ángel H. (1); Márquez García, M. Luisa (2) ; Olmo García, Juan C. (3)

(1)Universidad de Granada. España  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Departamento de Expresión Gráfica Arquitectónica  
y en la Ingeniería, E-mail: [ahdolmos@ugr.es](mailto:ahdolmos@ugr.es)

(2)Universidad de Granada. España  
E.T.S. de Arquitectura, Departamento de Matemática Aplicada, E-mail: [mmarquez@ugr.es](mailto:mmarquez@ugr.es)

(3), E-mail: [jolmog@ugr.es](mailto:jolmog@ugr.es)

Escuela de Arquitectura de la Universidad de Granada

*Área de conocimiento: Expresión Gráfica y Matemática Aplicada*

**Índice**

Resumen.....	2
Abstract.....	2
Introducción.....	3
Algoritmos generador de elementos poliédricos.....	3
Formulación paramétrica de las superficies.....	5
Tipología de superficies que responden a esta formulación.....	6
Implementación del algoritmo.....	6
Creación de maquetas dinámicas poliédricas.....	7
Conclusiones.....	12
Bibliografía.....	13

## Resumen

Las explicaciones de los temas de análisis de cuerpos así como de sus secciones e intersecciones entre sí suelen ser unos temas que resultan difíciles de asimilar por el alumnado.

Por otro lado la confección de problemas sobre estos temas también presenta sus dificultades al profesor en cuanto a encajar el problema adecuadamente en sus posiciones y medidas para hacerlo compatible con los límites del formato usado para su resolución.

En la presente ponencia se abordan estos temas mediante un tratamiento que involucra la confección de maquetas 3D que permitan al profesor desarrollar estos temas y hacer presentaciones con maquetas virtuales, susceptibles de movimientos, para mostrar las soluciones así como hacer los análisis que se estimen oportunos.

**Palabras clave:** maquetas, maquetas virtuales, docencia de Expresión Gráfica, investigación y análisis de formas.

## Abstract

The explanations of the topics of analysis of bodies as well as of their sections and intersections among if they are usually some topics that they are difficult to assimilate for the pupil.

On the other hand the making of problems on these topics also introduces its difficulties to the professor as for inserting the problem appropriately in its positions and measures to make it compatible with the limits of the format used for its resolution.

In the present report these topics are approached by means of a treatment that involves the making of scale models 3D that allow the professor to develop these topics and to make presentations with virtual scale models, susceptible of movements, to show the solutions as well as to make the analyses that are considered opportune.

**Words key:** scale models, virtual scale models, docencia of Graphic Expression, investigation and analysis in ways.

## 1. Introducción

El trabajo diario en la docencia de las asignaturas de Expresión Gráfica pone de manifiesto, al profesor, las dificultades que tienen los alumnos para ver en el espacio los problemas que se le plantean durante las clases. Esta capacidad de visión espacial va a ir siendo adquirida con el trabajo de estudio de las asignaturas de esta Área de Conocimiento.

El estudio de estos temas puede ayudarse de maquetas clásicas en las que el alumno ve materializado el problema que se le propone y puede servirle de referencia para ver si la solución que está obteniendo, vía los sistemas de representación, es la correcta.

Las maquetas clásicas, aunque suponen una ayuda para el estudio, su uso, también tiene sus limitaciones. Por un lado la confección de estos cuerpos, en cualquier material, conlleva un consumo de tiempo apreciable y hay que irlos reponiendo periódicamente por su deterioro con el uso. Además, la utilidad de su uso alcanza solo al alumno que la tiene en su mano o como mucho a los muy próximos a él. Por tanto se necesitan muchos ejemplares para abastecer a una clase con el número de alumnos que éstas tienen.

Una solución a estos problemas, que presentan las maquetas clásicas, puede ser la confección de maquetas virtuales o modelos 3D confeccionados en ordenador. Este tipo de maqueta permite, mediante el establecimiento del algoritmo matemático generador y su posterior implementación por ordenador, presentar la solución de cualquier problema creando un modelo 3D dinámico de la solución. La proyección en pantalla, en la clase, o dando a cada alumno una copia del modelo dinámico (susceptible de moverlo a voluntad para apreciar todos los detalles) solventa la accesibilidad al instrumento docente para todos los alumnos.

Por otro lado el coste de estas maquetas es cero en cuanto a medios materiales empleados.

También todo este proceso puede servir al profesor para elaborar material docente para sus clases ya que permite ensayar, con distintos valores de los datos, y lograr con tanteos mucho más rápidos y simples soluciones adecuadas a sus deseos y que éstas queden dentro de los límites del papel usado como formato de trabajo.

## 2. Algoritmo generador de elementos poliédricos

Si se pretende diseñar una línea recta que pase por dos puntos  $P_0$  y  $P_1$  (Figura 1)

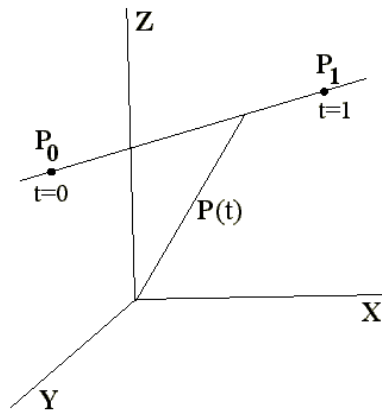


Figura 1. Curva que pasa por dos puntos dados

Su ecuación vectorial se puede expresar como:

$$\mathbf{P}(t) = f_0(t)\mathbf{P}_0 + f_1(t)\mathbf{P}_1 \quad (1)$$

donde  $\mathbf{P}_0$  y  $\mathbf{P}_1$  y son los vectores de posición de los puntos de paso y  $f_0(t)$  y  $f_1(t)$  dos funciones que tienen que verificar:

$$f_0(0) = 1; \quad f_0(1) = 0; \quad f_1(0) = 0; \quad f_1(1) = 1 \quad (2)$$

para que la recta diseñada pase por  $\mathbf{P}_0$  y  $\mathbf{P}_1$ .

Estas funciones son polinomios de Lagrange que calculados serían:

$$f_0(t) = (1-t); \quad f_1(t) = t \quad (3)$$

Llevando estos valores a (1) quedaría, que la ecuación de la recta, sería:

$$\mathbf{P}(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \quad (4)$$

que, en efecto, pasa por los puntos  $\mathbf{P}_0$  y  $\mathbf{P}_1$  como se pretendía.

La expresión (4) puede ponerse en forma matricial como:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Si se efectúa el producto tensorial de la expresión (5) por sí misma se llegaría a:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Que es la ecuación vectorial (puesta en forma matricial) de la superficie (Figura 2) que pasa por los puntos  $\mathbf{P}_{00}$ ,  $\mathbf{P}_{01}$ ,  $\mathbf{P}_{10}$ , y  $\mathbf{P}_{11}$ .

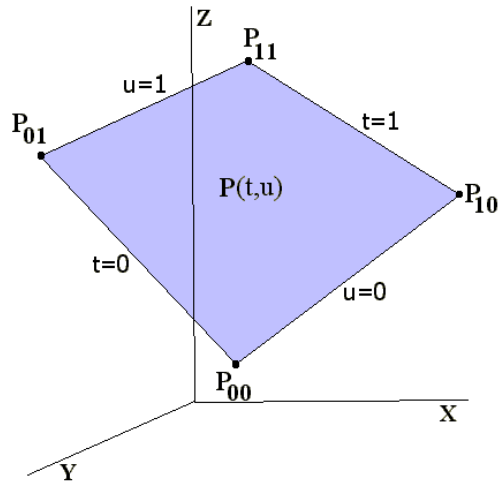


Figura 2. Superficie poligonal que pasa por cuatro puntos dados

En efecto, se cumple que:

$$\mathbf{P}(t_i, u_j) = \mathbf{P}_{ij} \quad \forall i = \{0,1\}, \quad \forall j = \{0,1\} \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} t_i = i \\ t_j = j \end{cases} \quad (7)$$

Luego la superficie  $\mathbf{P}(t,u)$  pasa por los cuatro puntos  $\mathbf{P}_{00}$ ,  $\mathbf{P}_{01}$ ,  $\mathbf{P}_{10}$ , y  $\mathbf{P}_{11}$

#### 4. Formulación paramétrica de la superficies

Si en la expresión (6) se hacen las operaciones allí expresadas y se desglosa en sus componentes los vectores que en ella aparecen, se llega a las ecuaciones paramétricas de la superficie (cuadrilátero plano o alabeado) que pasa por la red de cuatro puntos dados  $\mathbf{P}_{00}$ ,  $\mathbf{P}_{01}$ ,  $\mathbf{P}_{10}$ , y  $\mathbf{P}_{11}$ .

$$\left. \begin{aligned} x &= acx_{00} + bcx_{10} + adx_{01} + bdx_{11} \\ y &= acy_{00} + bcy_{10} + ady_{01} + bdy_{11} \\ z &= acz_{00} + bcz_{10} + adz_{01} + bdz_{11} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

donde:

$$a = t - 1; \quad b = t; \quad c = -u + 1; \quad d = u \quad (9)$$

y los vectores que aparecían se han desglosado en sus componentes según:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(t,u) &= (x, y, z); \\ \mathbf{P}_{00} &= (x_{00}, y_{00}, z_{00}); \\ \mathbf{P}_{01} &= (x_{01}, y_{01}, z_{01}); \\ \mathbf{P}_{10} &= (x_{10}, y_{10}, z_{10}); \\ \mathbf{P}_{11} &= (x_{11}, y_{11}, z_{11}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

## 5. Tipología de superficies que responden a esta formulación

Si en la superficie a diseñar los cuatro puntos  $\mathbf{P}_{00}$ ,  $\mathbf{P}_{01}$ ,  $\mathbf{P}_{10}$ , y  $\mathbf{P}_{11}$ . no son coplanarios la superficie que se obtiene es el cuadrilátero alabeado.

Si los puntos son coplanarios se obtiene el cuadrilátero plano que los tiene por vértices.

Si en la expresión (6) se contrae un borde del cuadrilátero, por ejemplo, el correspondiente a  $u=1$  o lo que es lo mismo el punto  $\mathbf{P}_{01} = \mathbf{P}_{11}$ , entonces, la expresión (6) quedaría como sigue:

$$\mathbf{P}(t,u) = (t \ 1)^T \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

que es la ecuación de la superficie triangular (Figura 3) que tiene los puntos  $\mathbf{P}_{00}$ ,  $\mathbf{P}_{10}$ , y  $\mathbf{P}_{11}$ . por vértices ya que se cumple:

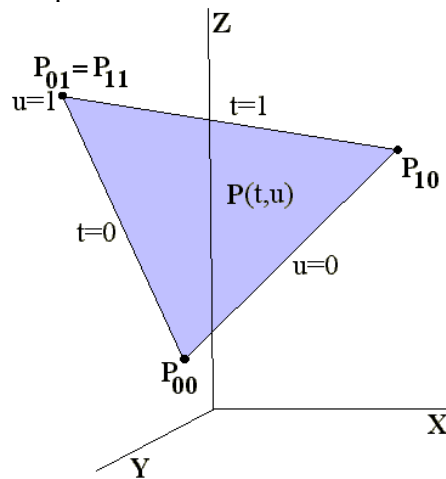


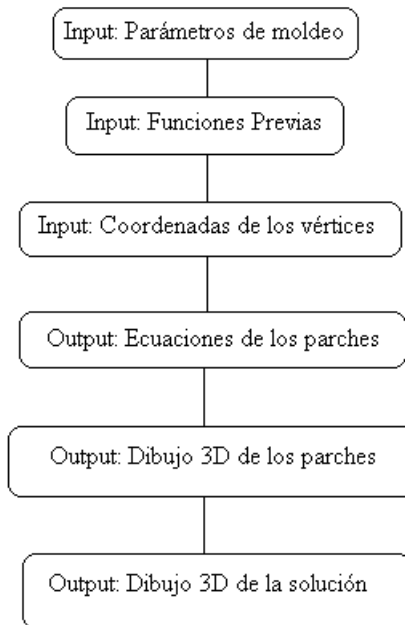
Figura 3. Superficie triangular que pasa por tres puntos dados

$$\mathbf{P}(0,0) = \mathbf{P}_{00}; \quad \mathbf{P}(1,0) = \mathbf{P}_{10}; \quad \mathbf{P}(1,1) = \mathbf{P}_{11}$$

Por tanto estas tres superficies: cuadrilátero plano, cuadrilátero alabeado y triángulo son casos particulares de estas superficies que responden a una formulación del tipo de la obtenida en (6).

## 6. Implementación del algoritmo

El proceso para diseñar este tipo de superficies responde a un organigrama como el que aparece seguidamente, en el que partiendo de las funciones previas (a, b, c, d) y de las coordenadas cartesianas de los puntos vértices de la superficie a diseñar, se obtienen las ecuaciones de la superficie (su definición analítica) y su dibujo (definición formal en modelo 3D).



## 7. Creación de maquetas dinámicas poliédricas

Si se emplea el algoritmo expuesto en los anteriores apartados se puede definir a través de él, cualquier poliedro y hacer con ellos operaciones de sección e intersección como los ejemplos que se verán a continuación.

La figura 4 muestra la maqueta solución a un problema de intersección de dos triángulos de vértices dados. Se ha resuelto el problema a partir del algoritmo antes descrito y se han asignado las coordenadas concretas de los vértices que dice el enunciado.

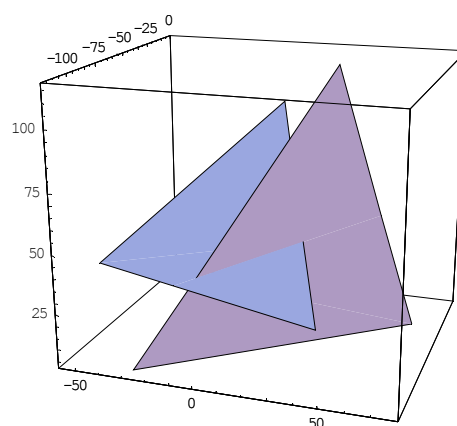


Figura 4. Perspectiva de la solución una vez obtenido la maqueta

Si se quiere ver cuales serían las plantas y alzado, en una solución en sistema diédrico del problema, solo habría que colocar el punto de vista desde el que se va a ver la maqueta en la posición acorde con la vista que queremos generar (Figura 5)

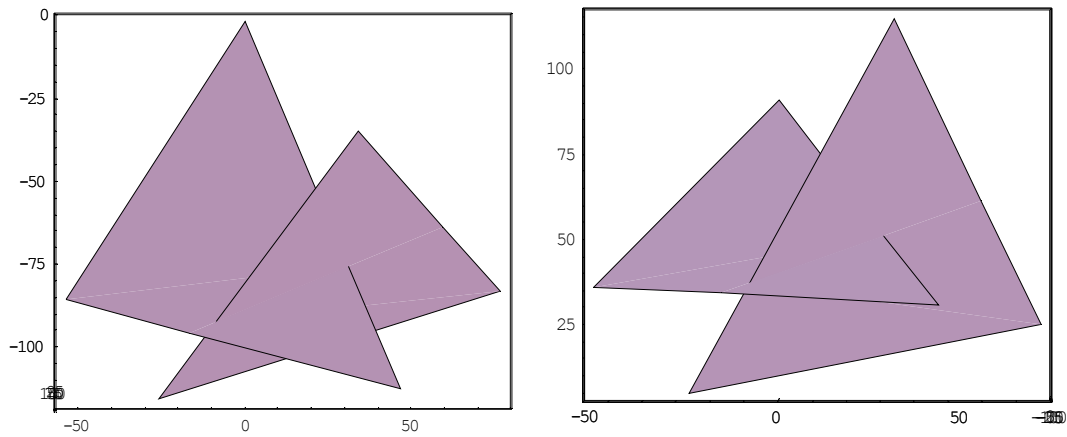


Figura 5. Planta y alzado de la solución obtenidas a partir de la maqueta tomando como punto de vista el correspondiente a estas proyecciones

Las figuras 6 y 7 muestran una intersección, tipo atravesamiento, de un prisma con una pirámide en la que una de las curvas es plana mientras que la otra resulta ser una poligonal alabeada. La exhibición dinámica de la maqueta, que no permite esta representación en papel, permitiría apreciar todos los matices que se quieran mostrar de la intersección de ambos cuerpos.

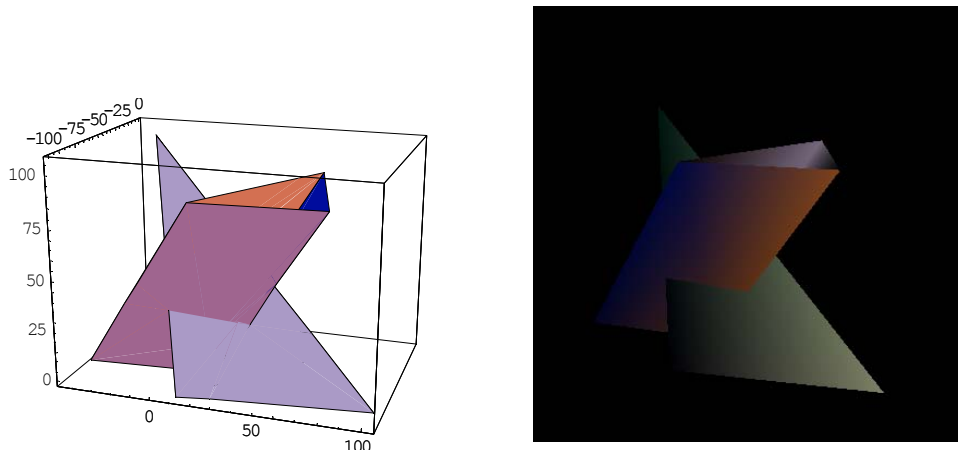


Figura 6. Perspectivas, con distintas texturas, de la intersección de prisma y pirámide

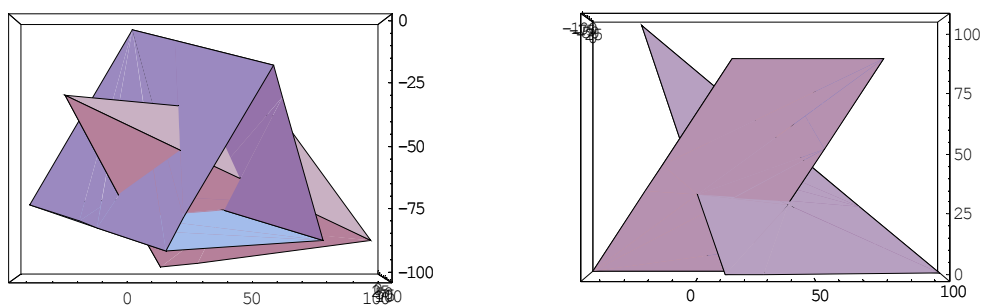


Figura 7. Planta y alzado de la intersección de prisma y pirámide anterior



En las figuras 8 y 9 se desarrolla la intersección, tipo atravesamiento, entre dos prismas con dos poligonales una plana y otra alabeada como resultado de ella. Las limitaciones que impone la versión escrita de la maqueta condicionan la exposición de los resultados obtenidos.

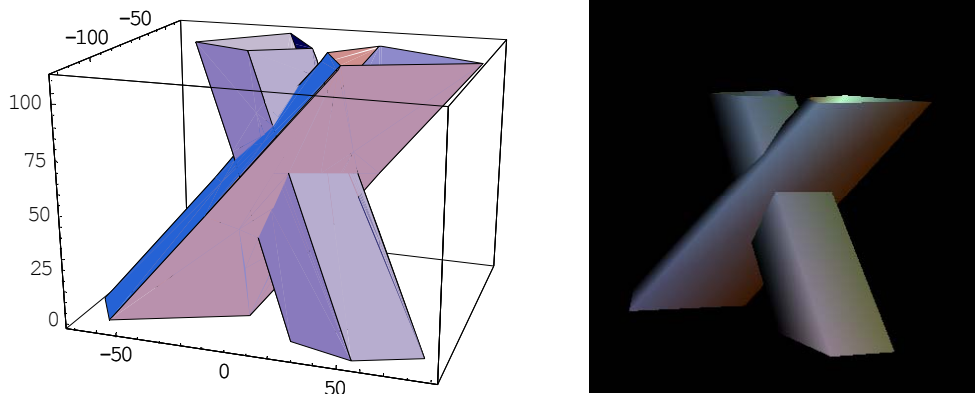


Figura 8. Perspectivas con distintas texturas de la intersección de prismas

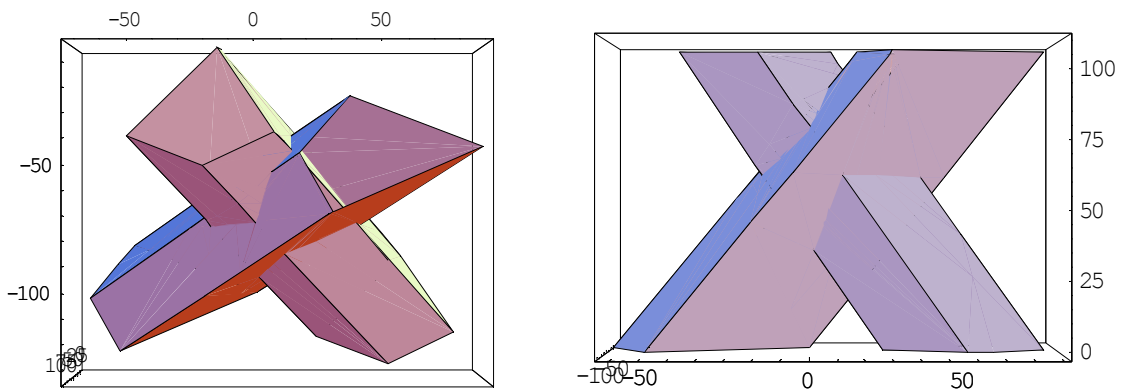


Figura 9. Planta y alzado de la intersección de prismas anterior

Análogamente se ha operado con los dos cuerpos curvos ( cilindros) siguientes tal como se tiene en las figura 10 y 11 que nos muestran el atravesamiento de dos cilindros y sus curvas de entrada y salida.

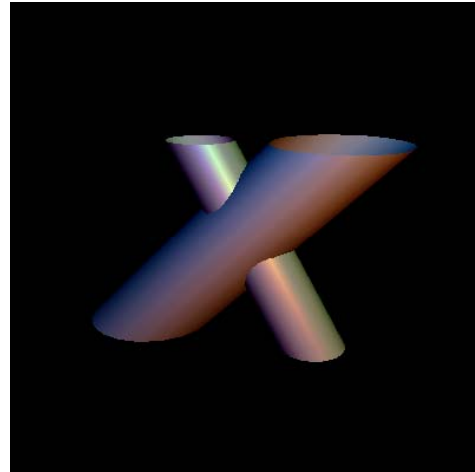
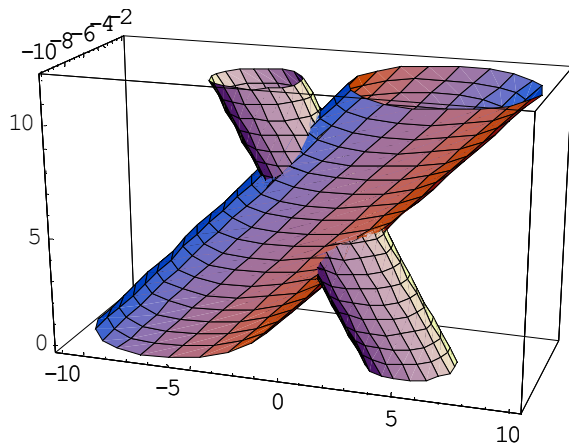


Figura 10. Perspectivas, con distintas texturas, del atravesamiento de cilindros

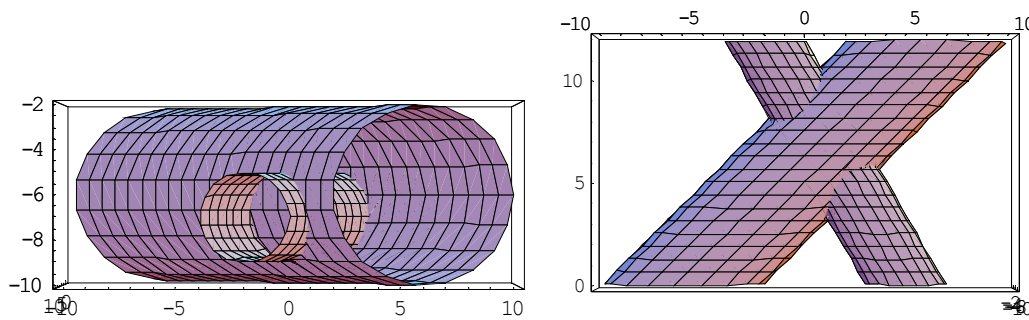


Figura 11. Planta y alzado del atravesamiento de cilindros anterior donde se aprecian las curvas alabeadas de entrada y salida

El problema de mordedura entre conos es el desarrollado en las figuras 12 y 13 donde se aprecia la única curva de intersección entre ambos cuerpos.

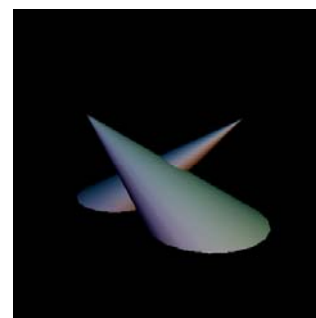
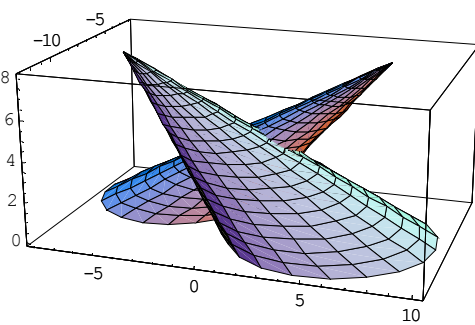


Figura 12. Perspectivas, con distintas texturas, de mordedura de conos

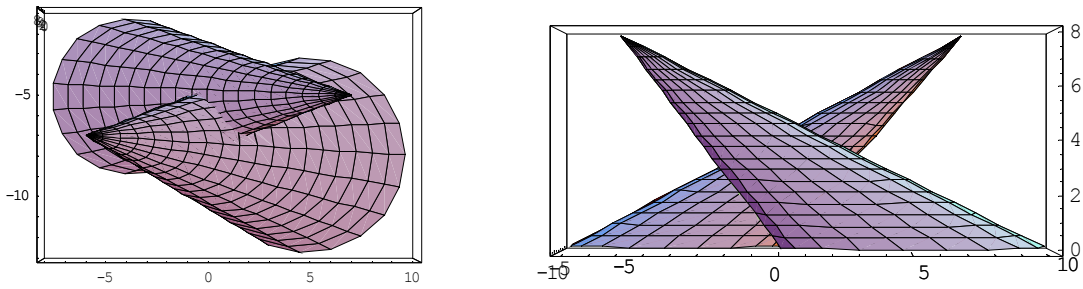


Figura 13. Planta y alzado de la mordedura de conos anterior

Un caso de atravesamiento entre conos se muestra en las perspectivas que se recogen en la figura 14 donde se aprecian, sobre todo al girar la maqueta virtual, en el caso de trabajar con la versión en ordenador (no la escrita, que es la que dispone el lector de la ponencia) las dos curvas generadas al intersectarse los dos cuerpos.

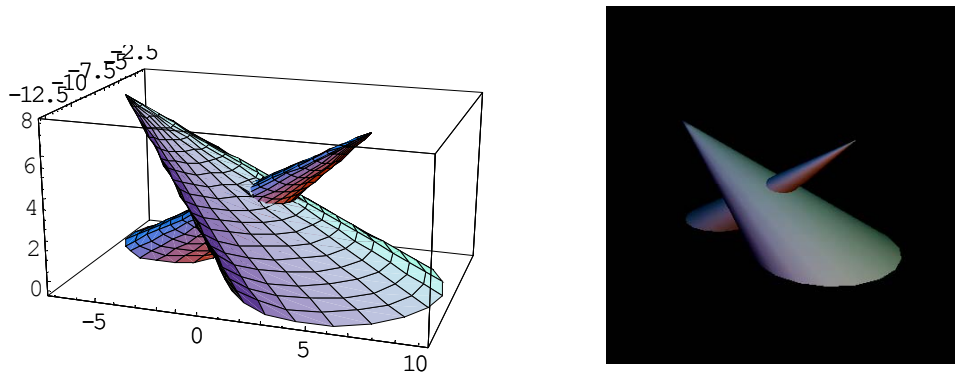


Figura 14. Perspectivas, con distintas texturas, de atravesamiento de conos

Siguiendo con el ejemplo de intersección de conos se presenta en la figura 15 el caso de atravesamiento tangencial de dos conos donde se ve como las dos curvas de intersección entre los cuerpos, tienen un punto común.

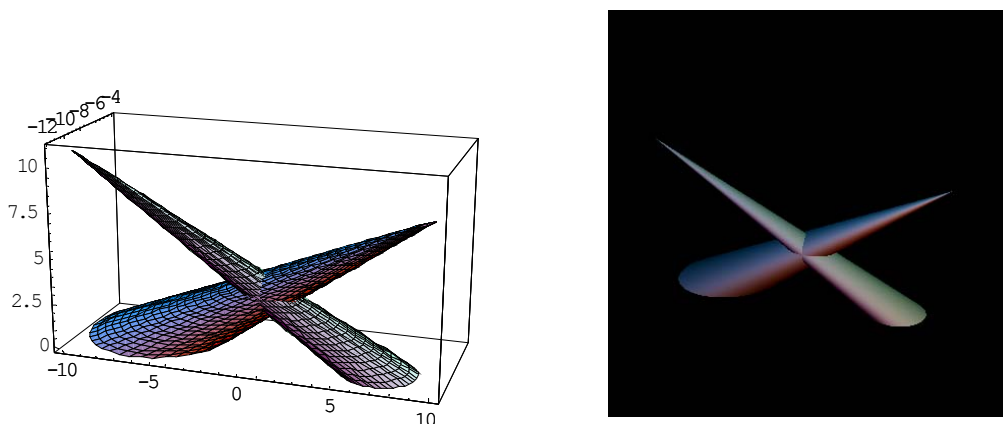


Figura 15. Perspectivas, con distintas texturas, de atravesamiento tangencial de conos donde se aprecia como las dos curvas de la intersección tienen un punto común

## **8. Conclusiones**

La metodología desarrollada en la presente ponencia permite confeccionar maquetas virtuales que admiten una presentación dinámica de estas. Con ello se permite hacer movimientos de la maqueta para observarla desde cualquier punto de vista y mostrar los aspectos que se deseen. También es posible hacer una presentación con distintas iluminaciones y texturas del objeto representado.

La ponencia recoge el algoritmo de generación de formas poliédricas para ser introducido al ordenador así como la implementación de estos cálculos en orden a lograr programas admisibles por el ordenador.

Las limitaciones que impone una presentación impresa en papel dificultan la visión de la funcionalidad que presenta esta maqueta virtual dinámica frente a otro tipo de presentaciones.

La metodología expuesta es un medio muy eficaz para el profesor en aras de diseñar exposiciones sobre las materias objeto de las asignaturas de Expresión Gráfica. También le resulta muy útil para diseñar problemas para las clases prácticas y exámenes ya que, una vez diseñado un programa, con la mera variación de los datos concretos se tendrán múltiples casos particulares. La observación de la maqueta permitirá analizar múltiples soluciones en pocos minutos e incluso ver si estas entran dentro de los límites del formato de dibujo que se quiera usar.

Al ser proyectables en pantalla y susceptibles de copiarse en medios baratos resultan estas maquetas virtuales dinámicas mucho más operativas y económicas que las maquetas clásicas.

## **Bibliografía.**

[1] Delgado Olmos, A. ; *“Modelado de superficies polinomiales y su aplicación a la técnica”*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada 1995.

[2] Delgado Olmos, A. ; *“Diseño de superficies de acuerdo. Propuestas de solución”*, Bilbao (España) IX Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica, Departamento de Expresión Gráfica y Proyectos de Ingeniería UPV/EHU 1997. D.P.:BI-788-97.

[3] Delgado Olmos, A. ; Cobos Gutiérrez, C. *“Diseño de superficies de borde fijo”*, Pamplona (España) VI Congreso Internacional de Expresión Gráfica Arquitectónica, T.G. Ediciones S.L. Navarra .1996. ISBN: 84-921319-718-5.

[4] Delgado Olmos, A. ; *“La formalización gráfico-analítica del proyecto. Un proceso armonizador”*, Actas del VII Congreso Internacional de Expresión Gráfica Arquitectónica. Arkitektura Sail UPV. San Sebastián 1998. ISBN:84-8373-073-5

[5] Delgado Olmos, A. ; *“Diseño y análisis de Formas Arquitectónicas Singulares. Nuevas metodologías de diseño”*, Actas del VIII Congreso Internacional de Expresión Gráfica Arquitectónica. Barcelona 2000. ISBN: 84-76539-7438-3.

[6] Blachman, N.; *“Mathematica. Un enfoque práctico”* Ariel Informatica, Barcelona.1993. ISBN:84-344-0478-8.

[7] Bohm, W.; *“Geometrics Concepts for Geometric Design* A.K. Peters , Wellesley, Massachusetts.1994.

[8] Farin, G.; *“Curves and surfaces for computer aided geometric design”* Academic Press, INC.1988.

[9] Gasca, M. ; *“Cálculo Numérico”*, UNED 1990.

[10] Cordero Valle, J.M.; Cortes Parejo, J.; *“Curvas y Superficies para Modelado Geométrico”*. RA-MA Editorial, Madrid 2002.

[11] Cordero, L.A.; Fernández, M.; Gray, A.; *“Geometría Diferencial de Curvas y Superficies con Mathematica”*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.