

## Tilings, quasicrystals, and Hilbert's 18<sup>th</sup> problem

These notes consist of two parts:

*Part I.* The text of an Invited Hour Address given to the American Mathematical Society, Philadelphia, October 13, 1991, and  
*Part II.* Comments and References.

### Marjorie Senechal

Department of Mathematics  
 Smith College  
 Northampton, MA 01063

### Abstract

Hilbert's 18<sup>th</sup> problem consisted of three loosely related questions: Is the number of groups in  $E^n$  with (bounded) fundamental region finite? Does there exist a tiling on whose tiles no group acts transitively? What are the densest packings of congruent bodies in  $E^3$ ? These questions pointed mathematical crystallography in new directions and have been unreasonably effective: in our time quasicrystals pose mathematical problems in precisely the areas indicated by Hilbert. Indeed, many of the new problems are reformulations of Hilbert's. Considerable progress has been made in the last few years, but a key issue—how the parts of the problem are related to one another—is still not completely understood.

French translation:  
 Traduction française :  
 Jean-Luc Raymond

## Les pavages, les quasi-cristaux et le 18<sup>e</sup> problème de Hilbert

Ces notes sont constituées de deux parties :

*Partie I.* Le texte d'une conférence donnée dans le cadre d'une rencontre de l'American Mathematical Society à Philadelphie, le 13 octobre 1991, et  
*Partie II.* Commentaires et bibliographie.

### Résumé

Le 18<sup>e</sup> problème de Hilbert est constitué de trois questions vaguement liées : Le nombre de groupes à région fondamentale (bornée) dans  $E^n$  est-il fini ? Existe-t-il un pavage sur les pavés duquel aucun groupe n'agisse de façon transitive ? Quels sont les juxtapositions les plus denses de corps congruents dans  $E^3$  ? Ces questions ont orienté la cristallographie mathématique vers de nouvelles directions et ont été excessivement efficaces : de nos jours, les quasi-cristaux posent des problèmes mathématiques qui se situent précisément dans les champs indiqués par Hilbert. En effet, plusieurs des nouveaux problèmes sont des reformulations de ceux de Hilbert. On a fait de considérables progrès dans les dernières années, mais une question clé — comment les parties du problème sont liées entre elles — n'est pas encore complètement comprise.

**Part I: Lecture Notes****1. Introduction**

Crystals are a meeting ground for many mathematical ideas, a place where polytopes, lattices, discrete groups, tilings, and sphere packings come together to shed light on the structure of real objects.

Mathematical crystallography is a subject with a long history. It also has an interesting future—never more so than now. The discovery of quasicrystals has occasioned a reexamination of the foundations of the subject and is broadening its perspectives. Other fields of mathematics, in addition to those mentioned above, are also being brought into play, and the quasicrystal problem provides an interesting perspective from which to study their interactions.

In this talk I will try to sketch an overview of mathematical quasicrystallography, as I see it. The subject is still developing, so the picture I will attempt to sketch is necessarily tentative. Almost everything I will say should be qualified by “ifs, ands or buts”, but these qualifications must be relegated to the printed version of this talk (i.e., **Part II**).

The proper place for us to begin—and end—is with Hilbert's 18<sup>th</sup> problem. In formulating it, Hilbert was influenced by mathematical problems of nineteenth century crystallography: the concept of symmetry, the enumeration of groups of motions, the tiling of space.

**2. Hilbert's 18<sup>th</sup> Problem (abridged)**

Hilbert asked:

A. Is there in  $n$ -dimensional Euclidean space ... only a finite number of essentially different kinds of groups of motions with a fundamental region?

B. Whether polyhedra also exist which do not appear as fundamental regions of groups of motions, by means of which nevertheless by a suitable juxtaposition of congruent copies a complete filling up of all space is possible.

C. How can one arrange most densely in space an infinite number of equal solids of given form ... that is, how can one so fit them together that the ratio of the filled to the unfilled space may be as great as possible?

As the 18<sup>th</sup> is arguably the least celebrated of the 23 problems, a few comments on these questions and their current status may be helpful. Question A was prompted by the successful enumeration of the three dimensional crystallographic

**Partie I: Notes de conférence****1. Introduction**

Les cristaux constituent un domaine de rencontre pour plusieurs idées mathématiques, un endroit où les polytopes, les treillis, les groupes discrets, les pavages et les juxtapositions de sphères interfèrent pour jeter de la lumière sur la structure d'objets réels.

La cristallographie mathématique est un sujet possédant une longue histoire. Elle a également — et plus que jamais — un futur intéressant. La découverte des quasi-cristaux a provoqué un réexamen des fondements du sujet et a élargi ses perspectives. D'autres domaines des mathématiques, s'ajoutant à ceux mentionnés plus haut, interviennent également dans la problématique, et le problème des quasi-cristaux fournit une perspective intéressante pour étudier leurs interactions.

Dans cette conférence, je tenterai de dresser une vue d'ensemble de la quasi-cristallographie mathématique telle que je la perçois. Le sujet est encore en développement de telle sorte que l'image que j'essaierai de donner est nécessairement provisoire. Presque tout ce que je dirai pourrait être nuancé par des « si » ou des « mais », mais ces réserves doivent être reléguées à la version imprimée de cette conférence (c'est-à-dire, la **Partie II**).

Pour nous, l'endroit le plus approprié pour débuter — et terminer — est le 18<sup>e</sup> problème de Hilbert. En le formulant, Hilbert était influencé par les problèmes mathématiques de la cristallographie du dix-neuvième siècle : le concept de symétrie, l'énumération des groupes de déplacements, le pavage de l'espace.

**2. Le 18<sup>e</sup> problème de Hilbert (version abrégée)**

Hilbert demandait :

A. N'existe-t-il, dans l'espace euclidien à  $n$  dimensions, qu'un nombre fini d'espèces différentes de groupes de déplacements à région fondamentale ?

B. Existe-t-il aussi des polyèdres qui ne se présentent pas comme régions fondamentales de groupes de déplacements, et au moyen desquels cependant on peut, en juxtaposant convenablement les exemplaires congruents, arriver à remplir sans lacunes l'espace tout entier ?

C. Comment peut-on, avec la plus grande densité possible, remplir l'espace au moyen d'un nombre infini de corps de

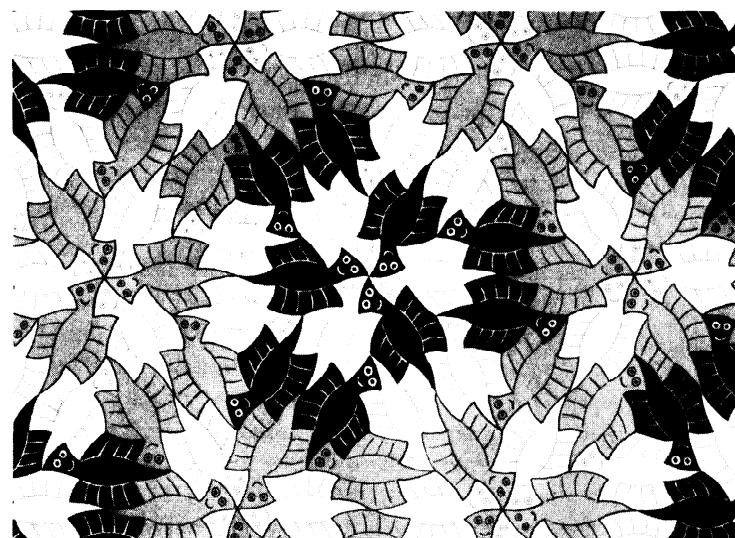
groups, a laborious task which had been completed in 1891 by E.S. Fedorov (a crystallographer) and A. Schoenflies (a mathematician). There are 219 isomorphism classes (in  $E^1$ , the number is 17). That the number of isomorphism classes in  $E^n$  is also finite was shown by Bieberbach and Frobenius between 1910 and 1912. In contemporary language, the groups in question are short exact sequences

$$0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow P \rightarrow 1$$

where  $T$  is isomorphic to  $Z^n$ ,  $P$  is isomorphic to a finite subgroup of  $O(n)$ , and the homomorphism  $P \rightarrow \text{Aut } T$  is one-one. An orbit of  $Z^n$  is called a *lattice*, and an orbit of  $G$  is a union of a finite number of congruent lattices. Crystallographers used to call these orbits "regular systems of points." The groups are sometimes called the *crystallographic groups* because their orbits are abstract models for crystal structure.

Question B asks whether there exists a tile such that no symmetry group acts transitively on any tiling in which it appears. It has been solved, or remains unsolved, depending on how you interpret it. All that Hilbert really asked for was a tile that is not a fundamental region for any group; this can happen even within a periodic tiling (a periodic tiling of  $E^n$  is one that is invariant under  $n$  linearly independent translations).

A three dimensional example of such a tile was found by Reinhardt in 1928; a two dimensional example was found by Heesch in 1935. Since then more examples have been found, some of them convex. In all cases, the tilings are periodic. Consider, for example, Escher's "Ghosts" (**Figure 1**).



This complicated-looking tiling is really just a modification of a tiling of the plane by equilateral triangles. Each triangle has two ghosts on each edge and three ghosts in its interior. There is no rigid motion that interchanges the interior ghosts with the edge ghosts, so the symmetry group of this tiling does not act transitively on it. Moreover, this tiling is unique: there is only this one way to fit the ghosts together. Thus "Ghosts" is a solution to Question B.

A more interesting and challenging variant of question B is: is there a tile which tiles only nonperiodically?

même forme assignée d'avance... autrement dit, on demande de répartir ces corps dans l'espace de façon que le rapport de l'espace rempli à l'espace vide soit le plus grand possible.

Comme on peut soutenir que le 18<sup>e</sup> est le moins célèbre des 23 problèmes, il serait utile de faire ici quelques commentaires sur ces questions et leur statut actuel. La question A a été suscitée par le succès de l'énumération des groupes cristallographiques tridimensionnels, une tâche laborieuse qui fut complétée en 1891 par E.S. Fedorov (un cristallographe) et A. Schoenflies (un mathématicien). Il existe 219 classes d'isomorphisme (dans  $E^2$ , le nombre est 17). C'est entre 1910 et 1912 que Bieberbach et Frobenius démontraient que le nombre de classes d'isomorphisme dans  $E^n$  est également fini. En employant le langage contemporain, les groupes en question sont presque les suites exactes

$$0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow P \rightarrow 1$$

où  $T$  est isomorphe à  $Z^n$ ,  $P$  est isomorphe à un sous-groupe fini de  $O(n)$ , et l'homomorphisme  $P \rightarrow \text{Aut } T$  est bijectif. Une orbite de  $Z^n$  est appelé un *treillis*, et une orbite de  $G$  est l'union d'un nombre fini de treillis congruents. Les cristallographes nomment ces orbites « systèmes réguliers de points ». Les groupes sont parfois nommés *groupes cristallographiques* car leurs orbites constituent des modèles abstraits de la structure cristalline.

La question B demande s'il existe un pavé qui soit tel qu'aucun groupe de symétrie n'agisse de façon transitive sur quelque pavage qui le contienne. Elle a été résolue, ou elle demeure sans réponse, selon l'interprétation qu'on en fait. Tout ce que Hilbert demandait en réalité c'était un pavé qui ne soit pas la région fondamentale d'un quelconque groupe; cela peut survenir même à l'intérieur d'un pavage périodique (un pavage périodique de  $E^n$  est un pavage qui est invariant sous  $n$  translations linéairement indépendantes).

Reinhardt a trouvé en 1928 un exemple tridimensionnel d'un tel pavé; Heesch donnait un exemple bidimensionnel en 1935. Depuis, plusieurs exemples ont été trouvés, dont certains sont convexes. Dans tous les cas, les pavés sont périodiques. Considérons, par exemple, les « Fantômes » d'Escher (**figure 1**).

Ce pavage à l'allure complexe n'est en réalité qu'une modification d'un pavage du plan par des triangles équilatéraux. Chaque triangle a deux fantômes sur chaque arête et trois fantômes dans son intérieur. Il n'existe pas de mouvement rigide qui interchange les fantômes intérieurs avec les fan-

No such tile has yet been found, though there are several pairs of tiles with this property. The Penrose tiles, which we will discuss later on, are the most famous example.

Question C is very broad. Indeed, as Charles Radin has pointed out, the densest possible packing of congruent bodies is a tiling. Thus Question C can be interpreted as asking which shapes tile space. This is also an unsolved problem. However, most attention has centered on finding dense packings of equal spheres. The sphere-packing problem has received a lot of publicity in the last year or so, ever since the announcement of a proof of the long-conjectured result that no packing in  $E^3$  can be denser than the cannonball packing. But in the context of crystals and quasicrystals packings of unequal spheres, and packings of polyhedra are also important and interesting.

### 3. Crystals and Quasicrystals

The original quasicrystals were alloys of magnesium and aluminum whose x-ray diffraction patterns showed icosahedral symmetry. You may remember the furor that erupted in 1985, just after their discovery. (See **Figure 2**.) Why were scientists plunged into uncertainty? Why did Linus Pauling square off against the physicists?

Solid state scientists were shocked because, according to long-established theories of crystal structure, no crystal could have five-fold rotational symmetry. The structure theory in question is the concept of a crystal as a periodic three dimensional array of congruent subvisible particles. Johann Kepler seems to have been the first to suggest this notion: in 1611 he attempted to model the shapes of snowflakes by dense packings of spheres. In the early nineteenth century, the particles were represented by bricks which could be stacked to build crystal polyhedral forms. Later, in a more sophisticated version of this model, the bricks were replaced by points. The point sets became the “regular systems of points” whose symmetry groups were studied by Fedorov and Schoenflies. The model was able to give a good account of crystal growth, crystal form, and crystal physics. By the early twentieth century, periodicity had become the defining feature of a crystal.

Periodicity greatly restricts the possibilities for symmetry. The symmetry group of a lattice is a crystallographic group of a special kind: it is a semidirect product of  $T$  and  $P$ .  $P$  is the stabilizer of the origin and the symmetry group of the Voronoï cells of these lattices. **Figure 3** shows that lattices

tômes des arêtes; ainsi, le groupe de symétrie de ce pavage n'agit pas sur lui de façon transitive. De plus, ce pavage est unique : il n'existe que cette façon d'agencer ensemble les fantômes. Ainsi, les « Fantômes » constituent une solution à la question B.

Une variante plus intéressante et plus stimulante de la question B est : existe-t-il un pavé qui ne pave que de façon non périodique ? On n'a pas encore découvert de tels pavés, même s'il existe plusieurs paires de pavés possédant cette propriété. Les pavés de Penrose, dont on discutera plus loin, en sont les exemples les plus connus.

La question C est très large. En effet, comme Charles Radin le soulignait, la juxtaposition la plus dense possible de corps congruents est un pavage. La question peut donc être interprétée comme la recherche des formes qui pavent l'espace. C'est également un problème non résolu. Toutefois, presque toute l'attention a été portée sur la recherche de juxtapositions denses de sphères égales. Le problème de la juxtaposition de sphères a été l'objet de beaucoup de publicité en cette dernière année, depuis l'annonce d'une démonstration du résultat longuement conjecturé à l'effet qu'aucune juxtaposition dans  $E^3$  ne peut être plus dense que la juxtaposition du boulet de canon. Mais dans le contexte des cristaux et des quasi-cristaux, les juxtapositions de sphères inégales et les juxtapositions de polyèdres sont aussi importantes et intéressantes.

### 3. Cristaux et quasi-cristaux

Les premiers quasi-cristaux furent les alliages de magnésium et d'aluminium dont les motifs de diffraction radioscopique montrent une symétrie icosaèdre. Vous pouvez vous souvenir de la fureur qui éclata en 1985, juste après leur découverte. (Voir **figure 2**.) Pourquoi les scientifiques furent-ils plongés dans l'incertitude ? Pourquoi Linus Pauling s'éleva-t-il contre les physiciens ?

Les scientifiques du domaine des solides furent stupéfaits car, selon des théories établies depuis longtemps à propos de la structure cristalline, aucun cristal ne pouvait posséder une symétrie de rotation d'ordre cinq. La théorie de la structure en question est basée sur la conception d'un cristal comme une matrice tridimensionnelle périodique de particules subdivisées congruentes. Johann Kepler semble avoir été le premier à suggérer cette notion : en 1611, il tenta de modéliser les formes des flocons de neige par des juxtapositions

can have two-fold, three-fold, four-fold and six-fold rotational symmetry.

In fact, there are no other possibilities. This is because a lattice is discrete (there is a minimum distance  $r$  between its points) and its points are equivalent (by translation). Let  $x$  and  $y$  be two lattice points with  $|x - y| = r$ . If  $n$ -fold rotations about the lattice points are to be symmetries of the lattice as a whole, then rotation about  $x$  must map  $y$  to  $y' \in L$ , where  $|y - y'| \geq r$ . This is possible only if  $n \leq 6$ . If  $n = 5$ , then  $|y - y'| > r$ , but rotation about  $y$  produces an image  $x'$  of  $x$  where  $|x' - y'| < r$  (**figure 4**).

This contradiction shows that rotational symmetries of order greater than six, and also five-fold rotational symmetry, are impossible in a two-dimensional lattice. The same argument is valid in  $E^3$ .

There is also an algebraic version of this argument. Since  $P$  has a faithful representation in  $\text{Aut } T = GL(n, \mathbb{Z})$ , its elements can be written as integer matrices. But if  $p \in P$  is a rotation about a point in the plane, it can also be written in the form

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

denses de sphères. Au début du dix-neuvième siècle, les particules furent représentées par des briques qui pouvaient être empilées pour construire les formes polyédriques des cristaux. Plus tard, dans une version plus raffinée de ce modèle, les briques furent remplacées par des points. Les ensembles de points devinrent les « systèmes réguliers de points » dont Fedorov et Schoenflies étudièrent les groupes de symétrie. Le modèle était capable de rendre compte de la croissance des cristaux, de la forme des cristaux et de la physique des cristaux. Dès le début du vingtième siècle, la périodicité devenait la caractéristique déterminante d'un cristal.

La périodicité restreint grandement les possibilités de symétrie. Le groupe de symétrie d'un treillis est un groupe cristallographique d'un type particulier : c'est un produit semi-direct de  $T$  et  $P$ .  $P$  est le stabilisateur de l'origine et le groupe de symétrie des cellules de Voronoï de ces treillis. La **figure 3** montre que les treillis peuvent posséder des symétries de rotation d'ordre deux, trois, quatre et six.

En fait, il n'existe pas d'autres possibilités. On l'explique par le fait qu'un treillis est discret (il y a une distance minimale  $r$  entre ses points) et ses points sont équivalents (par

**Figure 2**

Newspaper clippings.  
1985.  
Coupures de journaux,  
1985.

## Puzzling Crystals Plunge Scientists Into Uncertainty

By MALCOM W. BROWNE

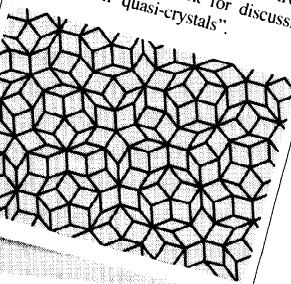
MOST solid things are made of crystals, and for nearly two centuries scientists assumed that every crystal must have an orderly structure, its constituent atoms fixed at pre-cepted rules. But the discovery of a new type of crystal that violates some of the accepted rules has touched off an explosion of conjecture and research that may lead to the founding of a new branch of science. According to one estimate, scientists around the world are now producing a paper a day relating to the discovery, and an end to this torrent of research is nowhere in sight.

Whether the discovery will have practical consequences remains to be seen. But as one investigator put it: "If this kind of crystal proves to have properties as peculiar as its structure, the stuff seems certain to find important uses. That's what one would expect in the field of condensed-matter physics."

**Skepticism Overwhelmed by Experimental Evidence**

Among the many past achievements of condensed-matter physics was the discovery of semiconducting crystals, which provided the

This mixture of theorizing and observation has now been put on a broad foundation by D. Levine and P.J. Steinhardt (*Phys. Rev. Lett.*, 53, 2477; 1984) in a summary of largely unpublished theoretical investigations. The objective is to provide a framework for discussing what they call "quasi-crystals".



## Towards fivefold symmetry?

Crystallography is in for a minor upheaval, with the recognition of forbidden icosahedral symmetry by both construction and experiment.

## Cold water on icosahedral symmetry

Linus Pauling has produced an alternative explanation of the observation that solid manganese-aluminium alloy may have 5-fold symmetry on the atomic scale. How can the two views be reconciled?

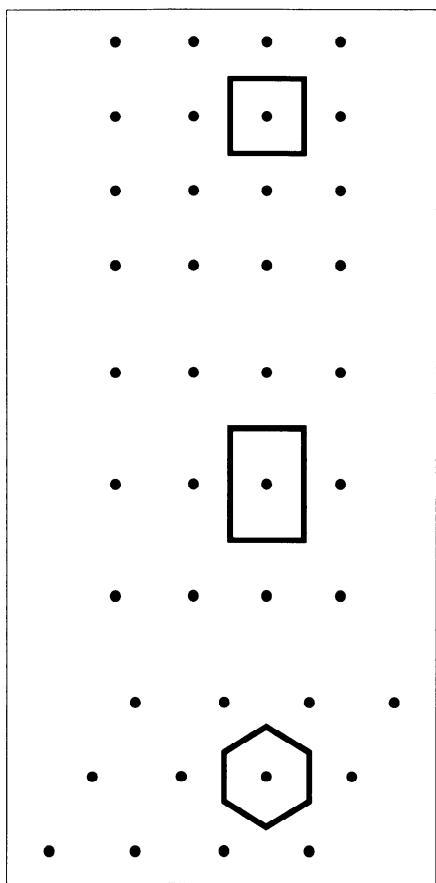


Figure 3

Then, since conjugate matrices have the same trace, we must have

$$2\cos\theta \in \mathbb{Z}.$$

This is only possible when

$$\theta = 0, \pi, \pi/2, 2\pi/3, 2\pi/6.$$

This result is known as the *crystallographic restriction*. Quasicrystals do not obey it.

There are many *myths about quasicrystals*, including:

- The structure problem has been solved: the Penrose tilings (of 3-space) are realistic structure models;
- Quasicrystals are inherently full of defects, much more so than ordinary crystals;
- Quasicrystals are a mysterious new form of matter.

None of these myths is true—though quasicrystals seem to have rather peculiar physical properties.

On the other hand, there are also some *facts about quasicrystals*:

- They are real, and today are seen as part of a much larger class of “aperiodic crystals”;
- Crystals with noncrystallographic symmetry have been found with many different chemical compositions; all are alloys;
- Their diffraction patterns show either icosahedral symmetry or 8,10 or 12-fold rotational symmetry (which are also “noncrystallographic”);
- Many geometric models have been proposed but none is generally accepted yet.

The International Union of Crystallography has established, *ad interim*, a Commission on Aperiodic Crystals to encourage and keep tabs on both experimental and theoretical developments world-wide. One of the commission's first accomplishments was to redefine the word “crystal”. Accordingly, a crystal is no longer any solid with a periodic structure, but *any solid with an essentially discrete diffraction diagram*.

This means, experimentally, that when X rays are passed through the crystal and are recorded on a photographic plate, we see a discrete pattern of bright spots. Symmetry does not enter into this new definition, nor does any *a priori* structure hypothesis.

#### 4. The quasicrystal problem

There are (at least) two “quasicrystals problems”: one is concerned with the structures and properties of real quasicrystals; the other is concerned with the mathematical foun-

translation). Soient  $x$  et  $y$  deux points d'un treillis pour lesquels  $|x - y| = r$ . Si des rotations d'ordre  $n$  par rapport aux points du treillis sont des symétries du treillis pris en entier, alors une rotation par rapport à  $x$  doit envoyer  $y$  sur  $y' \in L$ , où  $|y - y'| \geq r$ . Cela n'est possible que si  $n \leq 6$ . Si  $n = 5$ , alors  $|y - y'| > r$ , mais une rotation par rapport à  $y$  produit une image  $x'$  de  $x$  telle que  $|x' - y'| < r$  (**figure 4**).

Cette contradiction montre que les symétries de rotation d'ordre plus grand que six, de même que la symétrie de rotation d'ordre cinq, sont impossibles dans un treillis bidimensionnel. Le même argument est valide dans  $E^3$ .

Il existe aussi une version algébrique de cet argument. Puisque  $P$  possède une représentation fidèle dans  $\text{Aut}T = GL(n, \mathbb{Z})$ , ses éléments peuvent être exprimés comme des matrices entières. Mais si  $p \in P$  est une rotation par rapport à un point du plan, elle peut aussi être exprimée sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ainsi, puisque des matrices conjuguées possèdent la même trace, on doit avoir

$$2\cos\theta \in \mathbb{Z}.$$

Ceci n'est possible que lorsque

$$\theta = 0, \pi, \pi/2, 2\pi/3, 2\pi/6.$$

Ce résultat est connu sous le nom de *restriction cristallographique*. Les quasi-cristaux n'y obéissent pas.

Il existe plusieurs *mythes à propos des quasi-cristaux*. En voici quelques-uns :

- Le problème de structure a été résolu : les pavages de Penrose (de l'espace tridimensionnel) sont des modèles de structures réalistes ;
- Les quasi-cristaux sont, de façon inhérente, pleins d'imperfections, plus que ne peuvent l'être les cristaux ordinaires ;
- Les quasi-cristaux constituent une mystérieuse nouvelle forme de matière.

Aucun de ces mythes n'est vrai – bien que les quasi-cristaux semblent posséder des propriétés physiques plutôt étranges.

D'autre part, il y a également certains *faits concernant les quasi-cristaux* :

- Ils sont réels, et ils sont considérés aujourd'hui comme faisant partie d'une classe plus large, celle des « cristaux apériodiques » ;
- On a trouvé des cristaux possédant des symétries non cristallographiques avec plusieurs composés chimiques différents ; ce sont tous des alliages ;

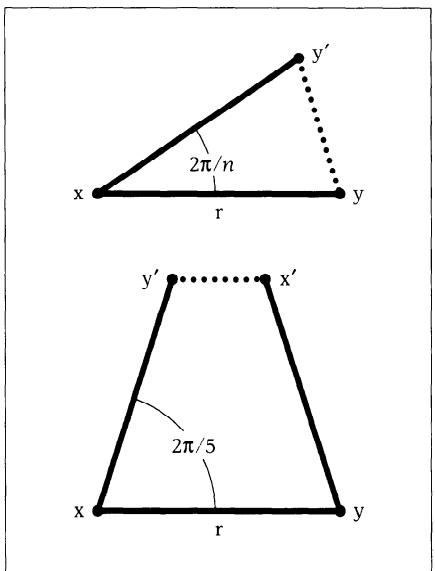


Figure 4

dations of the broader concept of "crystal". I will not attempt to discuss reality.

Instead, let us ask what properties an abstract crystal model should have, if it is no longer to be a regular system of points. Because the new definition involves diffraction images, these models must satisfy analytic as well as geometric and possibly algebraic conditions.

We can think of the crystal as a set  $S$  of points (representing atomic positions) which is discrete and relatively dense in  $E^n$  (relatively dense means that every ball whose radius exceeds a certain fixed positive number contains at least one point of  $S$  in its interior). We also need some additional conditions that will serve to distinguish crystals from amorphous structures. What are these conditions? That is the problem!

To formulate it more precisely, let us first translate the geometric setting into the language of physics. We associate to  $S$  a "density function" or measure which assigns unit masses to the points:

$$\rho(x) = \sum_{r \in S} \delta(x - r);$$

here  $\delta(x)$  is the Dirac delta. The diffraction pattern is described by the Fourier transform of  $\rho(x)$ :

$$\hat{\rho}(y) = \sum_{r \in S} \exp(-2\pi i r \cdot y).$$

The exponential functions in this sum are wave equations. When the waves are in phase these terms are all alike. For such values of  $y$ , the infinite sum is a Dirac delta and this will show up as a sharp bright spot in the diffraction diagram.

Thus we are looking for a set  $S^* \subset E^n$  and weights  $c_n$  such that

$$\hat{\rho}(y) = \sum_{k \in S^*} c_n \delta(y - k) + \psi(y). \quad (1)$$

The bright spots occur at the points of  $S^*$ . If  $\psi(y) \neq 0$  then there is a continuous "background".

When  $S$  satisfies (1), we will say that it satisfies the *diffraction condition*.

When  $S$  is a lattice, then so is  $S^*$ , and  $\psi(y) \equiv 0$ . Thus periodic crystals are still crystals under the new definition! When  $S$  is not a lattice, then the interpretation of the exponential sum is more complicated. Large classes of  $S$ 's that satisfy the diffraction condition are known, but there is still no complete characterization.

To translate from physics into mathematics, we need a

- Leurs motifs de diffraction présentent soit des symétries icosaèdres, soit des symétries de rotation d'ordre 8, 10 ou 12 (qui sont aussi « non cristallographiques »);
- Plusieurs modèles géométriques ont été proposés mais aucun n'est encore généralement accepté.

L'Union internationale de cristallographie a établi, *ad interim*, une Commission sur les cristaux apériodiques afin d'encourager et d'avoir à l'oeil à la fois les développements expérimentaux et les développements théoriques à travers le monde. L'une des premières réalisations de la commission fut la redéfinition du mot « cristal ». En conséquence, un cristal n'est plus un solide possédant une structure périodique, mais tout solide possédant un diagramme de diffraction essentiellement discret.

Cela signifie, de façon expérimentale, que lorsque le cristal est soumis aux rayons X, on observera un motif discret de taches claires sur la plaque photographique. Le concept de symétrie ne fait pas partie de cette nouvelle définition, de même qu'aucune hypothèse de structure *a priori*.

#### 4. Le problème des quasi-cristaux

Il existe (au moins) deux « problèmes de quasi-cristaux » : l'un porte sur les structures et les propriétés des quasi-cristaux réels; l'autre porte sur les fondements mathématiques du concept plus large de « cristal ». Je ne tenterai pas d'aborder la réalité.

Demandons-nous plutôt quelles sont les propriétés que doit posséder un modèle abstrait de cristal, si ce n'est plus un système régulier de points. Puisque la nouvelle définition implique les images de diffraction, ces modèles doivent satisfaire des conditions analytiques aussi bien que géométriques et possiblement algébriques.

On peut considérer le cristal comme un ensemble  $S$  de points (représentant les positions atomiques) qui est discret et relativement dense dans  $E^n$  (relativement dense signifie que toute boule dont le rayon excède un certain nombre positif fixé contient au moins un point de  $S$  en son intérieur). On a également besoin de certaines conditions supplémentaires qui serviront à distinguer les cristaux des structures amorphes. Quelles sont ces conditions ? Voilà le problème !

Pour le formuler plus précisément, traduisons tout d'abord le cadre géométrique en termes physiques. Nous associons à  $S$  une « fonction de densité » ou une mesure qui associe des masses aux points :

suitable class of generalized functions, and we need to evaluate or estimate the exponential sums. Both tasks are difficult.

The quasicrystal problem can be formulated as three tasks:

- (1) Characterize the point sets  $S$  which satisfy the diffraction condition.
- (2) Develop a suitable tiling model.
- (3) Determine which local properties of (2) are necessary and sufficient for (1).

Tilings have nothing to do with real quasicrystals but they are a useful tool for studying the geometry of nonperiodicity. We can go back and forth between point sets and tilings in various ways. So let us turn to tilings.

### 5. Tilings

A tiling of  $E^n$  is a partition of space into nonoverlapping cells called tiles.

**Definition.** A tiling  $T$  is a countable family of closed sets called tiles  $T = \{T_1, T_2, \dots\}$  such that  $\text{int } T_i \cap \text{int } T_j = \emptyset$  if  $i \neq j$  and  $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = E^n$ .

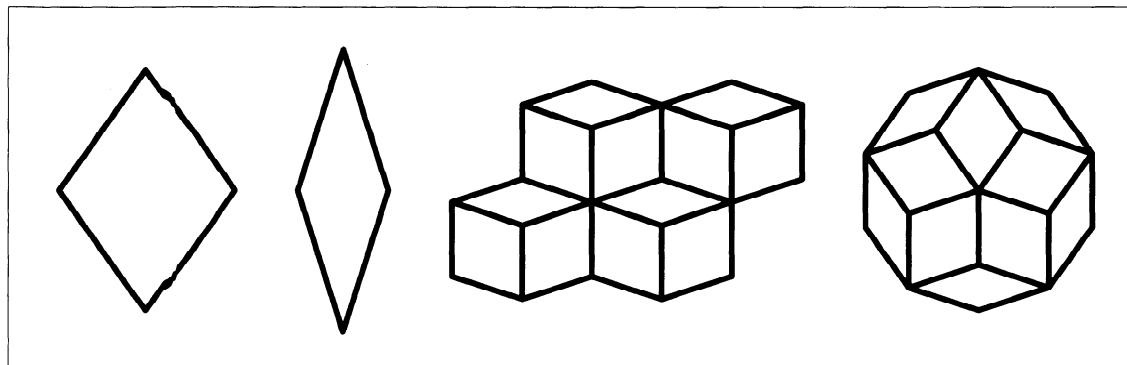
We will also assume that:

- each  $T_i$  is homeomorphic to an  $n$ -ball
- each  $T_i$  is congruent to one element of a finite family  $\mathcal{P}$  of shapes called prototiles.

A given prototile set  $\mathcal{P}$  may admit more than one tiling. Consider, for example, two rhombs of edge length one, whose small angles are  $2\pi/5$  and  $\pi/5$ , respectively. These tiles can tile the plane in many ways, some periodic and some nonperiodic (**figure 5**).

What should we look for in a tiling model? The word "nonperiodic" encompasses a broad spectrum of nonperiodicities, including tilings with stacking irregularities or spirals. Tilings

Figure 5



$$\rho(x) = \sum_{r \in S} \delta(x - r);$$

$\delta(x)$  représente ici le delta de Dirac. Le motif de diffraction est décrit par la transformée de Fourier de  $\rho(x)$ :

$$\hat{\rho}(y) = \sum_{r \in S} \exp(-2\pi i r \cdot y).$$

Les fonctions exponentielles de cette somme sont des équations d'onde. Lorsque les ondes sont en phase, leurs termes sont tous semblables. Pour de telles valeurs de  $y$ , la somme infinie est un delta de Dirac et ceci se manifestera par une nette tache claire dans le diagramme de diffraction.

Nous cherchons donc un ensemble  $S^* \subset E^n$  et des poids  $c_n$  tels que

$$\hat{\rho}(y) = \sum_{k \in S^*} c_n \delta(y - k) + \psi(y). \quad (1)$$

Les taches claires apparaissent aux points de  $S^*$ . Si  $\psi(y) \equiv 0$ , il existe alors un « arrière-plan » continu.

Lorsque  $S$  satisfait (1), on dira qu'il satisfait la *condition de diffraction*.

Lorsque  $S$  est un treillis,  $S^*$  l'est aussi, et  $\psi(y) \equiv 0$ . Les cristaux périodiques sont donc encore des cristaux selon la nouvelle définition ! Si  $S$  n'est pas un treillis, l'interprétation de la somme exponentielle est alors plus complexe. On connaît de larges classes de  $S$  qui satisfont la condition de diffraction, mais il n'existe toujours pas de caractérisation complète.

Pour effectuer la traduction du domaine de la physique vers les mathématiques, on a besoin d'une classe adéquate de fonctions généralisées, et on doit évaluer ou estimer les sommes exponentielles. Ces deux tâches sont difficiles.

On peut formuler le problème des quasi-cristaux en énonçant trois tâches :

- (1) Caractériser les ensembles  $S$  qui satisfont la condition de diffraction.
- (2) Développer un modèle adéquat de pavage.
- (3) Déterminer les propriétés locales de (2) qui soient nécessaires et suffisantes pour (1).

Les pavages n'ont rien à voir avec les quasi-cristaux réels mais ils constituent un outil intéressant pour l'étude de la géométrie de la non-périodicité. Il est possible de passer des ensembles aux pavages et des pavages aux ensembles de différentes façons. Abordons donc les pavages.

with anomalous regions of that sort are not what we are looking for. Like a periodic crystal, a quasicrystal is homogeneous in the sense that any piece of it is more or less like any other piece. Also, if we assume that material assembles itself in the quasicrystalline phase for reasons other than sheer chance, we should require that nonperiodicity be forced by the tiles themselves.

**Definition.** A set  $\mathcal{P}$  of prototiles is aperiodic if every tiling admitted by  $\mathcal{P}$  is nonperiodic.

In some cases, matching rules or more general rules for constructing local neighbourhoods can be imposed on  $\mathcal{P}$  so that  $\mathcal{P}$  becomes aperiodic. This is the case for the rhombs we have been looking at. **Figure 6a** represent Penrose's rules.

The rules are designed to forbid the kinds of juxtapositions that could result in a periodic tiling. Notice, for example, that the configuration on **Figure 6b** cannot be correctly marked with the Penrose decorations.

When the rules are followed, the tiling looks like **Figure 7**.

Homogeneity implies some sort of repetitiveness. A weak form of repetitiveness is the "local isomorphism property."

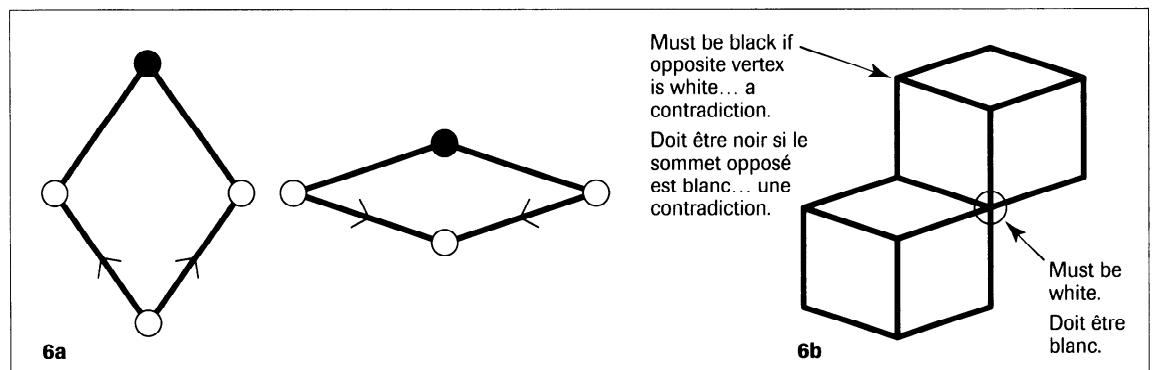
**Definition.** A tiling has the local isomorphism property if every local neighborhood of any finite radius is relatively dense in the tiling.

For example, the Penrose rules permit seven different arrangements of rhombs at a single vertex. You can easily convince yourself that all of them are relatively dense in the tiling. (This can, of course, be proved by more rigorous methods.)

Local isomorphism is not special—it is a general property.

**Theorem** (Radin and Wolff, 1991). Every set  $\mathcal{P}$  of prototiles admits a tiling with the local isomorphism property.

Figure 6



## 5. Pavages

Un pavage de  $E^n$  est une partition de l'espace en cellules disjointes nommées pavés.

**Définition.** Un pavage  $T$  est une famille dénombrable d'ensembles fermés nommés pavés  $T = \{T_1, T_2, \dots\}$  telle que  $\text{int } T_i \cap \text{int } T_j = \emptyset$  si  $i \neq j$  et  $\cup_{i=1}^{\infty} T_i = E^n$ .

Nous supposerons aussi que :

- chaque  $T_i$  est homéomorphe à une boule de dimension  $n$
- chaque  $T_i$  est congruent à un élément d'une famille finie  $\mathcal{P}$  de formes appelées protopavés.

Un ensemble donné  $\mathcal{P}$  de protopavés peut admettre plus d'un pavage. Considérons, par exemple, deux losanges de longueur d'arêtes égale à un, dont les angles aigus sont respectivement  $2\pi/5$  et  $\pi/5$ . Ces pièces peuvent pavier le plan de différentes façons, certaines étant périodiques et d'autres pas (**figure 5**).

Que devrions-nous chercher dans un modèle de pavage ? L'expression «non périodique» recouvre un large spectre de non-périodicité, incluant les pavages contenant des irrégularités d'empilements ou des spirales. Les pavages comportant de telles régions irrégulières ne font pas partie de ce que nous cherchons. Tel un cristal périodique, un quasi-cristal est homogène dans le sens où chacune de ses pièces est plus ou moins semblable aux autres pièces. Aussi, si l'on suppose que le matériau s'assemble en phase quasi-cristalline pour des raisons autres que le pur hasard, nous devrions exiger que la non-périodicité ait été imposée par les pavés eux-mêmes.

**Définition.** Un ensemble  $\mathcal{P}$  de protopavés est aperiodique si tout pavage admis par  $\mathcal{P}$  est non périodique.

Dans certains cas, des règles d'appariement ou des règles plus générales de construction de voisinages locaux peuvent être imposées à  $\mathcal{P}$  de telle sorte que  $\mathcal{P}$  devienne aperiodique. C'est le cas des losanges considérés plus haut. La **figure 6a** représente les règles de Penrose.

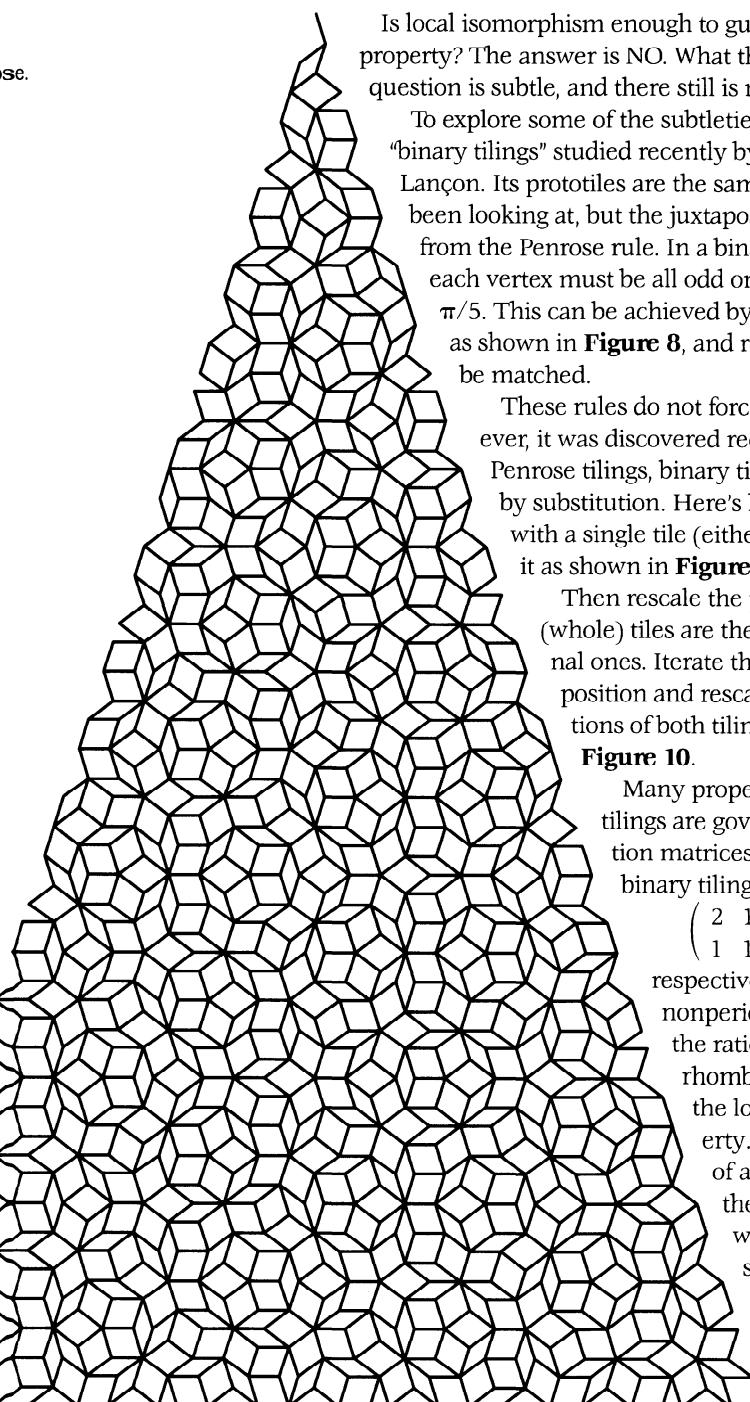
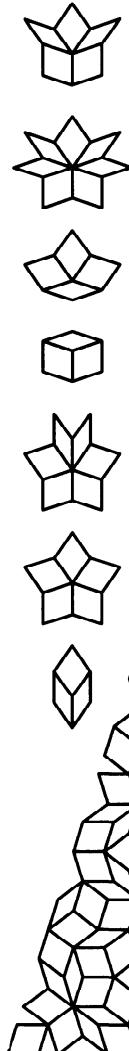
Les règles sont conçues pour interdire les types de juxtapositions qui généreraient un pavage périodique. Notons, par exemple, qu'on ne peut correctement étiqueter la configuration de la **figure 6b** selon les règles de Penrose.

Lorsque les règles sont observées, le pavage ressemble à la **figure 7**.

L'homogénéité entraîne un certain type de motif répétitif. Une forme faible de la répétitivité est la «propriété d'isomorphisme local».

**Figure 7**

Penrose tiling.  
Pavage de Penrose.



Is local isomorphism enough to guarantee the diffraction property? The answer is NO. What then is enough? The question is subtle, and there still is no general answer.

To explore some of the subtleties, let us consider the “binary tilings” studied recently by Godrèche and Lançon. Its prototiles are the same two rhombs we have been looking at, but the juxtaposition rule is different from the Penrose rule. In a binary tiling, the angles at each vertex must be all odd or all even multiples of  $\pi/5$ . This can be achieved by colouring the vertices, as shown in **Figure 8**, and requiring that colours be matched.

These rules do not force nonperiodicity. However, it was discovered recently that, like the Penrose tilings, binary tilings can be generated by substitution. Here’s how it works. Begin with a single tile (either one) and decompose it as shown in **Figure 9**.

Then rescale the pieces so that the (whole) tiles are the same size as the original ones. Iterate the procedure of decomposition and rescaling *ad infinitum*. Portions of both tilings are shown on **Figure 10**.

Many properties of substitution tilings are governed by their substitution matrices; for the Penrose and binary tilings these matrices are

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

respectively. Both tilings are nonperiodic (in the limit tiling, the ratio of large to small rhombs is  $\tau$ ) and both have the local isomorphism property. But the set of vertices of a Penrose tiling satisfies the diffraction condition, while the vertices of a substitution binary tiling do not.

Why not? There are two differences that seem to be crucial.

**Définition.** Un pavage possède la propriété d’isomorphisme local si tout voisinage local d’un quelconque rayon fini est relativement dense dans le pavage.

Les règles de Penrose permettent, par exemple, sept différents arrangements de losanges en un sommet. Vous pouvez facilement vous convaincre qu’ils sont tous relativement dense dans le pavage. (Il est possible, évidemment, de le démontrer en utilisant des méthodes plus rigoureuses.)

L’isomorphisme local n’est pas une propriété spéciale mais générale.

**Théorème** (Radin et Wolff, 1991). Tout ensemble  $\mathcal{P}$  de protopavés admet un pavage possédant la propriété d’isomorphisme local.

L’isomorphisme local est-il suffisant pour assurer la propriété de diffraction ? La réponse est NON. Alors, qu'est-ce qui est suffisant ? La question est subtile, et il n'y a toujours pas de réponse générale.

Pour explorer certaines des subtilités, considérons les « pavages binaires » étudiés récemment par Godrèche et Lançon. Leurs protopavés sont les mêmes deux losanges déjà considérés, mais la règle de juxtaposition est différente de la règle de Penrose. Dans un pavage binaire, les angles en chaque sommet doivent être des multiples tous impairs ou tous pairs de  $\pi/5$ . Cela peut être réalisé en coloriant les sommets de la façon illustrée à la **figure 8** et en exigeant l’appariement des couleurs.

Ces règles n’imposent pas la non-périodicité. Toutefois, il a été découvert récemment que, comme les pavages de Penrose, les pavages binaires peuvent être générés par substitution. Voici comment cela fonctionne. Débutons avec un simple pavé (n’importe lequel) et décomposons-le comme le montre l’illustration de la **figure 9**.

Redimensionnons les pièces de telle sorte que les pavés (entiers) soient de la même taille que les pavés originaux. On répète la procédure de décomposition et d’agrandissement *ad infinitum*. Des parties des deux pavages sont illustrées à la **figure 10**.

Plusieurs propriétés des pavages de substitution sont sous la gouverne de leurs matrices de substitution ; pour les pavages de Penrose et les pavages binaires, ces matrices sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

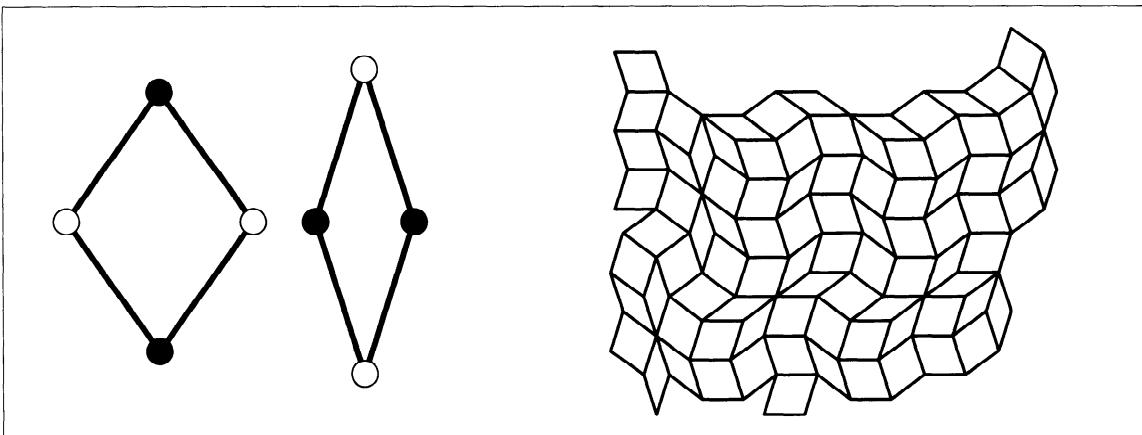
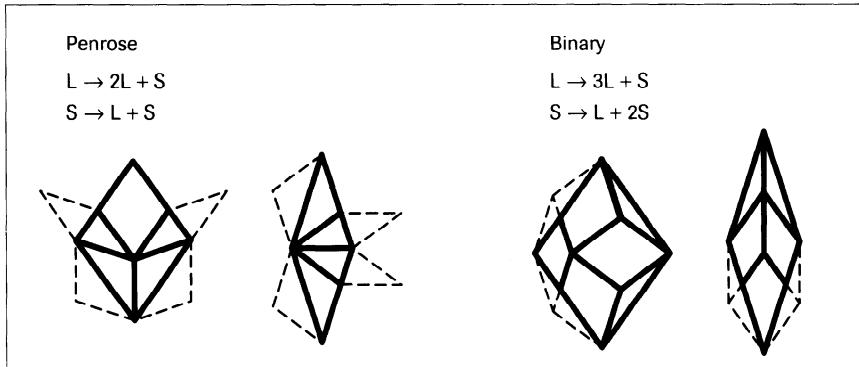


Figure 8 ▲

Figure 9 ►



■ 1. For any substitution tiling, we can define a "population vector"  $(u_n, v_n)$  whose components are the numbers of large and small rhombs in generation  $n$ . These components are easy to compute: define  $(u_0, v_0)$  to be the numbers of large and small rhombs in an initial configuration, and let  $M$  be the substitution matrix. Then  $(u_n, v_n) = (u_0, v_0)M^n$ . If we write  $(u_0, v_0)$  as a linear combination of eigenvectors of  $M$ , then we can easily study the behaviour of the population vector as  $M$  is iterated. The eigenvectors for both the Penrose and binary substitution tilings are proportional to  $(\tau, 1)$  and  $(-1, \tau)$  but the eigenvalues are different: in the Penrose case the eigenvalues are  $\tau^2$  and  $1/\tau^2$ ; in the binary case they are  $\sqrt{5}\tau$  and  $-\sqrt{5}/\tau$ . In the Penrose case, the population vector is attracted to the eigenvector belonging to  $\tau^2$  because the other eigenvalue is less than one in absolute value. In the binary case, however, the population vector diverges from the line containing  $(\tau, 1)$  because both eigenvalues are greater than one.

Les deux pavages sont non périodiques (dans le pavage limite, le rapport entre les nombres des grands et des petits losanges est  $\tau$ ) et ils possèdent tous deux la propriété d'isomorphisme local. Mais l'ensemble des sommets d'un pavage de Penrose satisfait la condition de diffraction, tandis que les sommets d'un pavage binaire de substitution ne la satisfont pas.

Pourquoi ? Deux différences semblent cruciales.

■ 1. Pour tout pavage de substitution, on peut définir un "vecteur de population"  $(u_n, v_n)$  dont les composantes sont les nombres de grands et de petits losanges dans la génération d'ordre  $n$ . Ces composantes sont faciles à calculer : on définit  $(u_0, v_0)$  comme étant les nombres de grands et de petits losanges dans une configuration initiale, et soit  $M$  la matrice de substitution. Alors  $(u_n, v_n) = (u_0, v_0)M^n$ . Si on exprime  $(u_0, v_0)$  comme une combinaison linéaire des vecteurs propres de  $M$ , alors on peut aisément étudier le comportement du vecteur de population lorsque  $M$  est itéré. Les vecteurs propres du pavage de Penrose et du pavage binaire de substitution sont proportionnels à  $(\tau, 1)$  et  $(-1, \tau)$  mais les valeurs propres sont différentes : pour le pavage de Penrose, les valeurs propres sont  $\tau^2$  et  $1/\tau^2$ ; dans le cas binaire, elles sont  $\sqrt{5}\tau$  et  $-\sqrt{5}/\tau$ . Dans le cas du pavage de Penrose, le vecteur de population est attiré vers le vecteur propre appartenant à  $\tau^2$  car l'autre valeur propre est inférieure à un en valeur absolue. Dans le cas binaire, toutefois, le vecteur de population diverge de la droite contenant  $(\tau, 1)$  car les deux valeurs propres sont supérieures à un.

Un nombre algébrique  $\theta > 1$  dont tous les conjugués algébriques sont inférieurs à un (en valeur absolue) est appelé nombre de Pisot-Vijayaraghavan. On peut aussi caractériser les nombres de P-V d'une autre façon : ce sont précisément les nombres algébriques  $\theta$  pour lesquels il existe un nombre réel  $t$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\theta^n\} = 0$ . ( $\{x\}$  est la partie fractionnelle de  $x$ .) Pour ces valeurs de  $t$ , on a également  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-2\pi i t \theta^n) = 1$ . Bombieri et Taylor ont exploité cette caractérisation duale pour démontrer que les substitutions de P-V possèdent la propriété de diffraction.

■ 2. Les protopavés des deux types de pavages sont des projections, sur un plan  $\Pi$ , des éléments bidimensionnels d'un hypercube de dimension cinq (figure 11).

L'hypercube est la cellule de Voronoï du treillis entier  $I_5$ . Les deux pavages peuvent être relevés en des surfaces de l'espace de dimension cinq ; ces surfaces sont des « courte-pointes » dont les blocs sont des carrés bilatères du pavage

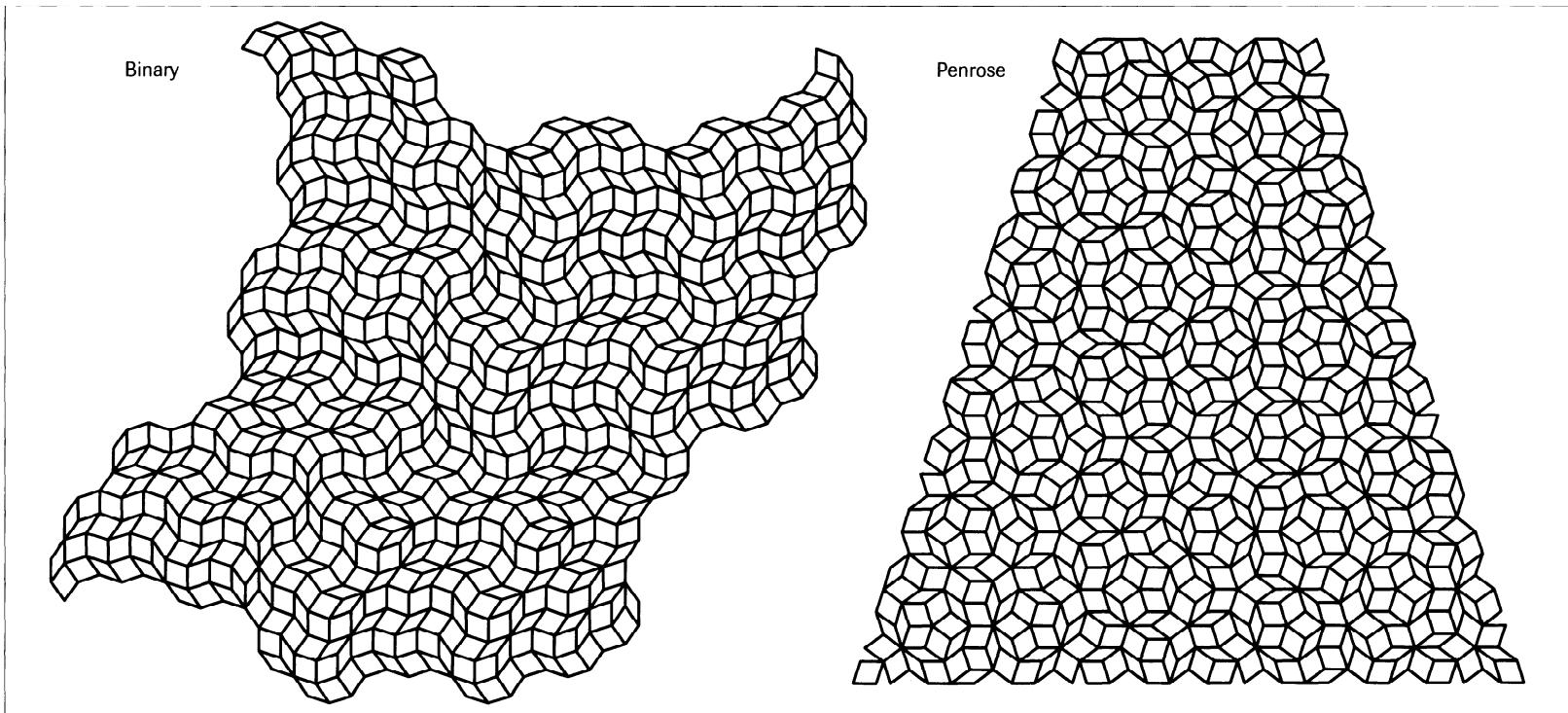


Figure 10

An algebraic number  $\theta > 1$  all of whose algebraic conjugates are less than one (in absolute value) is said to be Pisot-Vijayaraghavan number. P-V numbers can also be characterized another way: they are precisely the algebraic numbers  $\theta$  for which there exist real  $t$  such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{t\theta^n\} = 0$ . ( $\{x\}$  is the fractional part of  $x$ .) For these values of  $t$ , we also have  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-2\pi i t\theta^n) = 1$ . Bombieri and Taylor exploited this dual characterization to show that P-V substitutions have the diffraction property.

■ 2. The prototiles of both kinds of tilings are projections, onto a plane  $\Pi$ , of two-dimensional facets of a five-dimensional hypercube (**figure 11**).

The hypercube is the Voronoï cell of the integer lattice  $I_5$ . Both tilings can be lifted to surfaces in five-dimensional space; these surfaces are “quilts” whose blocks are square two-faces of the periodic tiling of  $I_5$  by these cells. Under orthogonal projection into  $\Pi^\perp$ , the Penrose quilt projects into a compact set  $K$ ; in fact,  $K$  is the projection, onto  $\Pi^\perp$ , of the Voronoï cell. The binary quilt, on the other hand, does not project into any compact set.

périodique de  $I_5$  par ces cellules. À l'aide d'une projection orthogonale sur  $\Pi^\perp$ , la courtepointe de Penrose se projette dans un ensemble compact  $K$ ; en fait,  $K$  est la projection, sur  $\Pi^\perp$ , de la cellule de Voronoï. La courtepointe binaire, d'autre part, ne se projette dans aucun ensemble compact.

Toutes ces caractéristiques—diffraction, attraction vers certains espaces propres, et projection dans un ensemble compact—sont intimement liées ; sous certaines conditions, elles peuvent être équivalentes. On connaît plusieurs liens entre elles, mais le tableau général n'est pas encore suffisamment clair.

## 6. Retour au 18<sup>e</sup> problème de Hilbert

Les domaines les plus actifs de la recherche en quasi-cristallographie mathématique sont encore

- la détermination des propriétés de diffraction des pavages de substitution
- la caractérisation des pavages dont les ensembles de protopavés permettent des règles d'appariement ou des règles locales plus générales qui imposent la non-périodicité

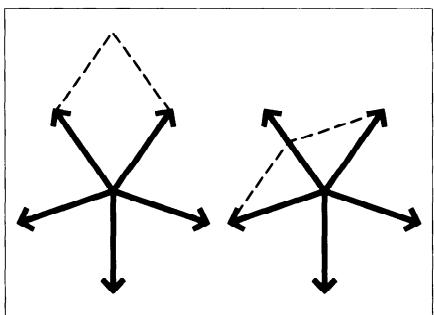


Figure 11

All of these features—diffraction, attraction to certain eigenspaces, and projection into a compact set—are closely related; they may be equivalent under some conditions. Many connections among them are known, but the general picture is still not sufficiently clear.

## 6. Return to Hilbert's 18<sup>th</sup> Problem

The most active areas of research in mathematical quasicrystallography continue to be

- determining the diffraction properties of substitution tilings
- characterizing those tilings whose prototile sets admit matching or more general local rules that force non-periodicity
- generalizing and refining the projection method and its many variants
- providing a rigorous basis for all of the above.

The “projection method” has been the starting point for most work on quasicrystal geometry. It is the reverse of the lifting described above. In the simplest version, we start with any lattice  $L$  in  $E^n$ , choose any irrational subspace  $\Pi$  (that is, a subspace which contains no lattice point other than the origin), and let  $K$  be the orthogonal projection of the Voronoi cell of the lattice into  $\Pi^\perp$ . Then we project  $x \in L$  onto  $\Pi$  if and only if  $x$  also projects into  $K$  in  $\Pi^\perp$ . The set of points in  $\Pi$  obtained in this way is always the set of vertices of a nonperiodic tiling. The diffraction property follows automatically from this construction.

In this way we can construct an uncountable infinity of nonperiodic tilings, though relatively few of them can be equipped with matching rules.

Is the  $n$ -dimensional (projection) framework a framework for the study of quasicrystal patterns, or is it the framework? At first sight, projection seems highly artificial. Certainly real quasicrystals do not grow this way! However, it may be that the high dimensional formalism in some way encodes all the other properties that we are looking for.

Hilbert's 18<sup>th</sup> Problem provided a stimulus for the study of  $n$ -dimensional lattices and groups, and for the study of aperiodic tilings. Now it appears that the two subjects are closely related. It is remarkable that this problem, formulated in response to nineteenth century problems in crystallography, also provides important insights into some of today's most challenging questions.

- la généralisation et le raffinement de la méthode de projection et de ses diverses variantes
- la recherche d'une base rigoureuse pour tout ce qui précède.

La « méthode de projection » a été le point de départ de la plupart des travaux sur la géométrie des quasi-cristaux. Il s'agit de l'inverse du relèvement décrit plus haut. Dans la version la plus simple, on débute avec un quelconque treillis  $L$  dans  $E^n$ , on choisit un sous-espace irrationnel  $\Pi$  (un sous-espace qui ne contient aucun point du treillis sauf l'origine), et on nomme  $K$  la projection orthogonale de la cellule de Voronoï du treillis dans  $\Pi^\perp$ . On projette alors  $x \in L$  sur  $\Pi$  si et seulement si  $x$  se projette aussi dans  $K$  dans  $\Pi^\perp$ . L'ensemble des points de  $\Pi$  obtenus de cette façon est toujours l'ensemble des sommets d'un pavage non périodique. La propriété de diffraction est une conséquence automatique de cette construction.

On peut construire de cette façon une infinité non dénombrable de pavages non périodique, bien que relativement peu d'entre eux puissent être affublés de règles d'appariement.

Est-ce que la charpente  $n$ -dimensionnelle (sa projection) est une charpente utile pour l'étude des motifs des quasi-cristaux, ou est-ce la charpente ? À première vue, la projection semble hautement artificielle. Les quasi-cristaux réels ne croissent certainement pas de cette manière ! Toutefois, il est possible que le formalisme des dimensions supérieures contiennent en quelque sorte toutes les autres propriétés que nous recherchons.

Le 18<sup>e</sup> problème de Hilbert fournit un stimulus pour l'étude des treillis  $n$ -dimensionnels et des groupes, et pour l'étude des pavages apériodiques. Il apparaît maintenant que les deux sujets sont intimement reliés. Il est remarquable que ce problème, formulé en réponse à des problèmes de cristallographie du dix-neuvième siècle, fournit aussi des éclairages importants sur certaines des questions contemporaines soulevant les plus grands défis.

**Part II: Commentary and References**

*Warning:* I have not made any serious effort to weave the following remarks into a coherent whole.

**Section 1**

This lecture was primarily concerned with advances in tiling theory stimulated by the discovery of quasicrystals. This is only one of many stimuli. Over the past decade or so, tiling theory has gradually emerged from crystallography journals, the "Mathematical Games" section of *Scientific American*, and the world of Escher enthusiasts to assume a respected place in contemporary mathematical thought. This welcome development is due to several factors: to a mathematical climate in which there is renewed interest in geometry—including its visual content, to a growing awareness that tiling problems arise in many areas of mathematics, to the efforts of Grünbaum, Shephard and others to unify the theory and put it on a solid theoretical basis, and to the high quality of recent research on some very challenging tiling problems. The talks presented in the Special Session on Tilings at this meeting indicate the breadth and depth of the subject, and also its increasing cohesiveness. However, the theory of tilings, especially aperiodic tilings, is still in its early stages of development. For an introduction to the subject, see Grünbaum and Shephard [24,25].

Some of the relations between tilings and other parts of mathematics are indicated in [1,13,52,40].

**Section 2**

The full text of Hilbert's 18<sup>th</sup> problem [27] is:

"If we enquire for those groups of motions in the plane for which a fundamental region exists, we obtain various answers, according as the plane considered is Riemann's, (elliptic), Euclid's, or Lobachevsky's (hyperbolic). In the case of the elliptic plane there is a *finite* number of essentially different kinds of fundamental regions, and a *finite* number of congruent regions suffices for a complete covering of the whole plane; the group consists indeed of a *finite* number of motions only. In the case of the hyperbolic plane there is an *infinite* number of essentially different kinds of fundamental regions, namely, the well-known Poincaré polygons. For the complete covering of the plane an *infinite* number of congruent regions is necessary. The case of Euclid's plane stands between these;

<sup>1</sup> [Note du traducteur:] Il s'agit ici de la traduction originale effectuée par M.L. Laugel, parue dans le « Compte rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiques tenu à Paris du 6 au 12 août 1900 » publié par Gauthier-Villars en 1902.

**Partie II: Commentaires et bibliographie**

*Avertissement:* Je n'ai pas fourni un effort considérable pour organiser les remarques suivantes en un tout cohérent.

**Section 1**

Cette conférence avait pour sujet premier l'avancement en théorie des pavages sous la stimulation de la découverte des quasi-cristaux. Il ne s'agit que de l'un des stimuli. Au cours de la dernière décennie, la théorie des pavages est graduellement sortie des revues de cristallographie, de la rubrique des « Jeux mathématiques » dans *Scientific American (Pour la science)*, et du cercle des passionnés du monde d'Escher pour s'attribuer une place respectée au sein de la pensée mathématique contemporaine. Ce développement opportun est attribuable à plusieurs facteurs: un climat mathématique qui présente un intérêt renouvelé pour la géométrie— incluant son contenu visuel ; une conscience croissante du fait que les problèmes de pavages surviennent dans plusieurs domaines des mathématiques ; les efforts de Grünbaum, Shephard et d'autres pour unifier la théorie et la placer sur des bases théoriques solides ; et la grande qualité de la recherche récente à propos de certains problèmes de pavages soulevant des défis. Les présentations faites lors de la Session spéciale sur les pavages à cette rencontre indiquent l'ampleur et la profondeur du sujet ; cela permet également une plus grande cohésion. Toutefois, la théorie des pavages, et particulièrement celle des pavages apériodiques, en est encore à ses premiers stades de développement. À titre d'introduction au sujet, on peut consulter les travaux de Grünbaum et Shephard [24,25].

On trouvera dans [1,13,52,40] quelques unes des relations entre les pavages et d'autres parties des mathématiques.

**Section 2**

Voici le texte original<sup>1</sup> du 18<sup>e</sup> problème de Hilbert [27].

« Dans les questions où il s'agit de ces groupes de déplacements dans le plan, pour lesquels il existe une région fondamentale, on sait que la réponse est très différente suivant que l'on considère le plan (elliptique) de Riemann, le plan (parabolique) d'Euclide, ou le plan (hyperbolique) de Lobatchevskij. Dans le cas du plan elliptique, le nombre des régions fondamentales d'une espèce essentiellement différente est *fini*, et il suffit d'un nombre *fini* d'exemplaires de régions congruentes pour recouvrir sans lacunes le plan tout

for in this case there is only a finite number of essentially different kinds of groups of motions with fundamental regions, but for a complete covering of the whole plane an *infinite* number of congruent regions is necessary.

"Exactly the corresponding facts are found in space of three dimensions. The fact of the finiteness of the groups of motions in elliptic space is an immediate consequence of a fundamental theorem of C. Jordan, whereby the number of essentially different kinds of finite groups of linear substitutions in  $n$  variables does not surpass a certain finite limit dependent upon  $n$ . The groups of motions with fundamental regions in hyperbolic space have been investigated by Fricke and Klein in the lectures on the theory of automorphic functions, and finally Fedorov, Schoenflies, and lately Rohn have given the proof that there are, in Euclidean space, only a *finite* number of essentially different kinds of groups of motions with a fundamental region. Now while the results and methods of proof applicable to elliptic and hyperbolic space hold directly for  $n$ -dimensional space also, the generalization of the theorem for Euclidean space seems to offer decided difficulties. The investigation of the following question is therefore desirable: *Is there in  $n$ -dimensional Euclidean space also only a finite number of essentially different kinds of groups of motions with a fundamental region?*

"A fundamental region of each group of motions, together with the congruent regions arising from the group, evidently fills up space completely. The question arises: *Whether polyhedra also exist which do not appear as fundamental regions of groups of motions, by means of which nevertheless by a suitable juxtaposition of congruent copies a complete filling up of all space is possible.* I point out the following question, related to the preceding one, and important to number theory and perhaps sometimes useful to physics and chemistry: How can one arrange most densely in space an infinite number of equal solids of given form, e.g., spheres with given radii or regular tetrahedra with given edges (or in prescribed positions), that is, how can one so fit them together that the ratio of the filled to the unfilled space may be as great as possible?"

Both Fedorov and Schoenflies wrote monographs about their work on enumeration [18, 43]. Although this is often cited as a remarkable example of simultaneous discovery, the two men were well aware of each others' work, and actually encouraged one another and compared results. See [10].

The 4,783 isomorphism classes of four dimensional crys-

entier : le groupe est constitué par un nombre fini de déplacements. Dans le cas du plan hyperbolique, le nombre de régions fondamentales d'une espèce essentiellement différente est *infini* : ce sont les célèbres polygones de M. Poincaré ; pour recouvrir sans lacunes le plan tout entier, il faut un nombre *infini* d'exemplaires de régions congruentes. C'est le plan parabolique euclidien qui forme le cas intermédiaire ; en effet, dans ce cas il n'existe qu'un nombre *fini* d'espèces essentiellement différentes de groupes de déplacements à région fondamentale, tandis que pour recouvrir sans lacunes le plan tout entier il faut un nombre *infini* d'exemplaires de régions congruentes.

« Des faits complètement analogues ont lieu dans l'espace à trois dimensions. Le fait que le nombre des groupes de déplacements dans l'espace elliptique est *fini* est une conséquence immédiate d'un théorème de M. C. Jordan, en vertu duquel le nombre des espèces essentiellement distinctes de groupes *finis* de substitutions linéaires à  $n$  variables ne peut dépasser une certaine limite finie dépendant de  $n$ . Les groupes de déplacements à région fondamentale dans l'espace hyperbolique ont été étudiés par MM. Klein et Fricke dans les *Les leçons sur la théorie des fonctions automorphes* ; enfin MM. Feodorow, Schoenflies, et dernièrement M. Rohn ont démontré que, dans l'espace parabolique d'Euclide, il n'y a qu'un nombre fini d'espèces essentiellement différentes de groupes de déplacements à région fondamentale. Or, tandis que les résultats et les méthodes de démonstrations relatives aux espaces elliptiques et hyperboliques s'étendent immédiatement aux espaces à  $n$  dimensions, il semble, au contraire, que la généralisation du théorème relatif à l'espace euclidien présente des difficultés considérables ; il serait donc à désirer que l'on se proposât cette recherche : *Reconnaitre si, dans l'espace euclidien à  $n$  dimensions, il n'existe qu'un nombre fini d'espèces différentes de groupes de déplacements à région fondamentale.*

« Une région fondamentale de chaque groupe de déplacements, jointe aux régions congruentes provenant du groupe, fournit évidemment un recouvrement sans lacunes de l'espace tout entier. Alors se pose la question suivante : *Existe-t-il aussi des polyèdres qui ne se présentent pas comme régions fondamentales de groupes de déplacement, et au moyen desquels cependant on peut, en juxtaposant convenablement les exemplaires congruents, arriver à remplir sans lacunes l'espace tout entier ?* Je citerai aussi une question qui se relie à la précédente ; question importante pour la Théorie des nombres et peut-être utile

tallographic groups were actually enumerated by a team of mathematicians and crystallographers ([7]) in response to the needs of crystallographers working on the structure analysis of modulated crystals. Their higher dimensional interpretation was later adapted to the study of quasicrystals.

For a mathematical characterization of the classification systems used in crystallography, see [37].

The third part of Hilbert's problem has received renewed attention recently, due to the announcement by W.-Y. Hsiang of a proof that no packing of equal spheres in  $E^3$  can be denser than the cannonball packing. Since this result had long been anticipated (cf. C.A. Rogers' famous remark, "all physicists know and many mathematicians believe" that no denser packing exists) the result in itself, if true, will not shed unexpected light on crystal structure problems. Preprints are not yet available, so further comments are inappropriate.

For a discussion of packing models for quasicrystals, see [28] and [51].

### Section 3

For an illuminating survey of the controversy surrounding quasicrystals after their discovery, see [32].

The history of the development of the building block model of crystal structure is outlined in [45, 46].

The Voronoï cell  $V(\vec{u})$  of a point  $u$  of a lattice  $\mathcal{L}$  is the set of points in  $E^n$  which are closer to  $u$  than to any other point of  $\mathcal{L}$ :

$$V(\vec{u}) = \{x \in E^n \mid |x - u| \leq |x - v| \text{ pour tout } v \in \mathcal{L}\}.$$

A famous conjecture states that every polytope that tiles  $E^n$  by translation is an affine image of the Voronoï cell of a lattice; it has been proved only for certain classes of polytopes (see [44]).

For an extensive discussion of Voronoï cells of  $n$ -dimensional lattices and the analogue of the crystallographic restriction for those lattices, see [48].

So far, no practical use for quasicrystals has been found, except as a non-stick coating! But quasicrystal frying pans are not yet available commercially.

The new definition of "crystal" appears in the "Terms of Reference" of the Commission on Aperiodic Crystals.

### Section 4

A set  $S$  is discrete if there is a positive real number  $r$  such that  $x, y \in S \rightarrow |x - y| \geq r$ .  $S$  is relatively dense if there is a positive real number  $R$  such that every  $n$ -ball of radius  $R$  contains at least one point of  $S$ . Discrete, relatively dense point sets

aussi en Physique et en Chimie : c'est la question de savoir comment on pourrait, avec la plus grande densité possible, remplir l'espace au moyen d'un nombre infini de corps de même forme assignée d'avance, par exemple au moyen de sphères d'un rayon donné ou de tétraèdres d'arêtes données (on pourrait aussi assigner d'avance la position des arêtes) ; autrement dit, on demande de répartir ces corps dans l'espace de façon que le rapport de l'espace rempli à l'espace vide soit le plus grand possible. »

Fedorov et Schoenflies ont tous deux écrit des ouvrages concernant leurs travaux sur l'énumération [18, 43]. Même si cela est souvent cité comme un exemple remarquable de découverte simultanée, les deux hommes étaient chacun bien conscients des travaux de l'autre, et s'encourageaient effectivement l'un l'autre et comparaient leurs résultats. Voir [10].

Les 4 783 classes d'isomorphisme des groupes cristallographiques à quatre dimensions étaient de fait énumérées par une équipe de mathématiciens et de cristallographes ([7]) en réponse aux besoins des cristallographes travaillant à l'analyse de structure des cristaux modulés. Leur interprétation en dimension supérieure fut plus tard adaptée à l'étude des quasi-cristaux.

Pour une caractérisation mathématique des systèmes de classification utilisés en cristallographie, on peut consulter [37].

La troisième partie du problème de Hilbert a reçu récemment une attention renouvelée attribuable à l'annonce que faisait W.-Y. Hsiang d'une démonstration qu'aucune juxtaposition de sphères égales dans  $E^3$  ne peut être plus dense que la juxtaposition du boulet de canon. Puisque ce résultat était anticipé depuis longtemps (cf. la célèbre remarque de C.A. Rogers à l'effet que « tous les physiciens savent et plusieurs mathématiciens croient » qu'il n'existe pas de juxtaposition plus dense), le résultat en lui-même, s'il est vrai, ne jettera pas une lumière inattendue sur les problèmes de la structure cristalline. Les prépublications n'étant pas encore disponibles, aller plus avant dans les commentaires serait malvenu.

On trouvera dans [28] et [51], une discussion des modèles de juxtaposition pour les quasi-cristaux.

### Section 3

L'article de LaBrecque [32] présente une vue d'ensemble éclairante de la controverse entourant les quasi-cristaux après leur découverte.

Les grandes lignes de l'histoire du développement du mo-

("( $r,R$ )-systems") were used by B.N. Delone (Delaunay) and his school in their abstract model of crystal structure geometry.

For a discussion of diffraction physics, see [14].

When  $S$  is a lattice,  $S^*$  is the dual lattice. The case when  $S$  is a union of finitely many congruent lattices is also handled easily. Furthermore, a crystal which is not strictly periodic may still fall within the "periodic family". This is the case when  $S$  has an *average lattice*, i.e. if there exists a lattice  $L$  and a real number  $C$  greater than zero (but in practice not very much greater than zero), such that

$$\vec{x} \in S \rightarrow \exists \vec{y} \in L \text{ such that } |\vec{x} - \vec{y}| \leq C.$$

Then under reasonable assumptions about the fluctuation of  $S$  about  $L$ ,  $S^*$  is again the dual lattice although  $\psi(\vec{s})$  may no longer be identically zero. Until the discovery of quasicrystals, few people had realized that a point set with no average lattice could still have the diffraction property.

The general problem of determining which sums  $\sum_{r,s} \exp(-2\pi ir \cdot s)$  can be written in the form (1) is very difficult. The sum represents a generalized Dirichlet series on its abscissa of convergence, and we need to understand its behaviour on that line. As G.H. Hardy once remarked, this problem is "delicate". The diffraction condition can also be studied in the context of generalized functions, and this can be done in various ways (see [9,39]).

Tiling and more general models have been studied by Danzer; see, e.g., [16].

Only a few of the many mathematical aspects of quasicrystals can be mentioned here. For a broader discussion, see [46].

The distinction between tilings and real quasicrystals was first emphasized by Bak [3].

## Section 5

For an extended discussion of the Penrose tilings, matching rules, and local isomorphism, see [25].

The theorem of Radin and Wolff is proved in [41].

The binary tilings were introduced by Lançon and Billard [33]. The work discussed in this lecture is described in [23].

The computation of the diffraction pattern for the Penrose tilings is explained in [17,29]. The computation for the binary tiling is based on multifractal analysis [22].

For more about P-V numbers and their role in tiling theory, see [12,36,6,21].

The construction of the Penrose tilings of the plane by

modèle de bloc de construction pour la structure cristalline se trouvent dans [45,46].

La cellule de Voronoï  $V(\vec{u})$  d'un point  $u$  d'un treillis  $L$  est l'ensemble des points de  $E^n$  qui sont plus près de  $u$  que de tout autre point de  $L$ :

$$V(\vec{u}) = \{x \in E^n \mid |x - u| \leq |x - v| \text{ pour tout } v \in L\}.$$

Une conjecture célèbre affirme que tout polytope qui pave  $E^n$  par translation est une image affine de la cellule de Voronoï d'un treillis; cela n'a été démontré que pour certaines classes de polytopes (voir [44]).

On trouvera une discussion approfondie des cellules de Voronoï de treillis  $n$ -dimensionnels, et l'analogie de la restriction cristallographique pour ces treillis dans [48].

Jusqu'à maintenant, aucune utilisation pratique des quasi-cristaux n'a été découverte, à l'exception d'une couche anti-adhésive! Mais on ne trouve pas encore sur le marché des poèles quasi-cristallines.

La nouvelle définition de « cristal » est apparue dans les « Termes de référence » de la Commission sur les cristaux apériodiques.

## Section 4

Un ensemble  $S$  est discret s'il existe un nombre réel positif  $r$  tel que  $x, y \in S \rightarrow |x - y| \geq r$ .  $S$  est relativement dense s'il existe un nombre réel positif  $R$  tel que toute boule de dimension  $n$  de rayon  $R$  contient au moins un point de  $S$ . Des ensembles de points discrets et relativement denses (« ( $r,R$ )-systèmes ») furent utilisés par B.N. Delone (Delaunay) et son école pour leur modèle abstrait de la géométrie de la structure cristalline.

On peut consulter [14] pour une discussion sur la physique de la diffraction.

Lorsque  $S$  est un treillis,  $S^*$  est le treillis dual. On peut aussi traiter facilement du cas où  $S$  est une union d'un nombre fini de treillis congruents. De plus, un cristal qui n'est pas strictement périodique peut tout de même faire partie de la « famille périodique ». C'est le cas lorsque  $S$  possède un *treillis moyen*, c'est-à-dire s'il existe un treillis  $L$  et un nombre réel  $C$  supérieur à zéro (mais en pratique pas tellement plus grand que zéro) tels que

$$\vec{x} \in S \rightarrow \exists \vec{y} \in L \text{ tel que } |\vec{x} - \vec{y}| \leq C.$$

Alors, sous des hypothèses raisonnables concernant la fluctuation de  $S$  autour de  $L$ ,  $S^*$  est encore le treillis dual même si  $\psi(\vec{s})$  ne peut plus être identiquement nul. Avant la découverte des quasi-cristaux, peu de gens avaient réalisé

projection from  $E^5$  is due to deBruijn [9]. The projection method has been generalized and modified in various ways. For an account of the most modern version, see [30].

## Section 6

The discovery of quasicrystals prompted the enumeration of those crystallographic groups in  $E^6$  with subspace invariant under icosahedral symmetry. See [11,35].

Characterization of local rules for tilings were presented in the Special Session on Tilings by Joshua Socolar (see [50]) and Leonid Levitov. Since Levitov's results (obtained jointly with André Katz) are not yet available in preprint form, I include their abstract here:

"Matching rules exist for a quasiperiodic tiling if it can be defined by specifying possible local neighbourhoods, i.e., all local patterns of some bounded size. We study the existence of matching rules for tilings of the (2-D) plane and (3-D) space generated by grids. We identify and describe some topological content of the problem, as a tool which allows to prove the existence of matching rules. We consider the vector space  $E = E^{\parallel} \oplus E^{\perp}$  as a fibration  $E \xrightarrow{\pi} E^{\parallel}$  ( $\pi_{\perp}$  is the projector along  $E^{\perp}$ :  $\pi_{\perp}(E^{\perp}) = 0$ ,  $\pi_{\perp}(E^{\parallel}) = E^{\parallel}$ ). In  $E$  we define a "forbidden set"  $\Gamma$  which is the union over a lattice in  $E$  of a family of lattice (affine) subspaces of  $E$  non-transverse with both  $E^{\perp}$  and  $E^{\parallel}$ . We then consider sections  $S$  of the fibration which do not intersect  $\Gamma$  and compute the homotopy classes of these sections. The list of these classes contains important information about the matching rules for the corresponding tilings (any family of grids generates its own  $E$  and  $\Gamma$ ). We prove the Theorem.

**Theorem.** *Matching rules exist if and only if any admissible  $S$  is homotopic to a constant.*

With this theorem, we obtain matching rules for the generalized Penrose tilings and for tilings with octagonal, dodecagonal and icosahedral symmetries."

The "grid method" and the "projection method" for generating nonperiodic tilings were introduced by deBruijn [8]. The two methods produce the same tilings (see [20]).

"The theory of aperiodic tilings is in the zoology stage", as N.G. deBruijn recently remarked. But although the little zoo of aperiodic tilings is remarkably diverse, it seems to be possible to associate all of the known examples with projected tilings by one means or another. In some cases this requires dissecting and reassembling the tiles.

qu'un ensemble de points sans treillis moyen peut tout de même posséder la propriété de diffraction.

Le problème général qui consiste à déterminer quelles sont les sommes  $\sum_{res} \exp(-2\pi ir \cdot s)$  qui peuvent être exprimées sous la forme (1) est très difficile. La somme représente une série de Dirichlet généralisée sur son abscisse de convergence, et il est nécessaire de connaître son comportement sur cette droite. Comme le faisait remarquer G.H. Hardy, ce problème est « délicat ». La condition de diffraction peut aussi être étudiée dans le contexte des fonctions généralisées, et cela peut être fait de différentes façons (voir [9,39]).

Les modèles de pavage et des modèles plus généraux ont été étudié par Danzer ; voir, par exemple, [16].

On n'a pu souligner ici que quelques-uns des nombreux aspects mathématiques des quasi-cristaux. On trouvera une présentation plus large dans [46].

C'est Bak qui le premier souligna la distinction entre les pavage et les quasi-cristaux réels [3].

## Section 5

L'ouvrage de Grünbaum et Shephard [25] aborde de façon extensive les pavages de Penrose, les règles d'appariement et l'isomorphisme local.

Le théorème de Radin et Wolff est démontré dans [41].

Les pavages binaires ont été présentés par Lançon et Billard [33]. Les travaux dont il est question dans cette conférence sont décrits dans [23].

Le calcul du motif de diffraction pour les pavages de Penrose est expliqué dans [17,29]. Le calcul concernant le pavage binaire est fondé sur l'analyse multifractale [22].

Pour en savoir plus sur les nombres de P-V et leur rôle dans la théorie des pavages, on peut consulter [12,36,6,21].

La construction des pavages de Penrose du plan par projection à partir de  $E^5$  est attribuable à deBruijn [9]. La méthode de projection avait été généralisée et modifiée de différentes façons. Pour une explication de la version la plus actuelle, voir [30].

## Section 6

La découverte des quasi-cristaux a provoqué l'énumération des groupes cristallographiques dans  $E^6$  qui possèdent un sous-espace invariant sous une symétrie icosaèdre. Voir [11,35].

La caractérisation des règles locales pour les pavages a été présentée à la session spéciale sur les pavages par Joshua

## References / Références

- [1] Arnol'd, V.I. (1988). "Remarks on quasicrystalline symmetries." *Physica D*, vol. 33, 21–25.
- [2] Baake, M., Schlottmann, M. and Jarvis, P. "Quasiperiodic tilings with tenfold symmetry and equivalence with respect to local derivability." Preprint.
- [3] Bak, P. (1986). "Icosahedral crystals: where are the atoms?" *Physical Review Letters*, vol. 56, no. 8, 861–864.
- [4] Bieberbach, L. (1910). "Über die Bewegungsgruppen der  $n$ -dimensionalen Euklidischen Räume mit einem endlichen Fundamentalbereich." *Göttinger Nachrichten*, 75–84.
- [5] Bieberbach, L. (1912). "Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume." *Math. Ann.*, 72, 400–412.
- [6] Bombieri, E., and Taylor, J. (1987). "Quasicrystals, tilings, and algebraic number theory: some preliminary connections." *Contemporary Mathematics*, vol. 64, 241–264.
- [7] Brown, H., Bülow, R., Neubüser, J., Wondratschek, H., and Zassenhaus, H. (1978). *Crystallographic Groups of Four Dimensional Space*. Wiley, New York.
- [8] deBruijn, N.G. (1981). "Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane." *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, vol. 84 (= Indagationes Mathematicae, vol. 43), 38–66.
- [9] deBruijn, N.G. (1986). "Quasicrystals and their Fourier transform." *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, vol. 89 (= Indagationes Mathematicae, vol. 48), 123–152.
- [10] Burckhardt, J.J. (1971). "Der Briefwechsel von E.S. Fedorow und A. Schoenflies, 1889–1908." *Archive for History of Exact Sciences*, 7, 91–141.
- [11] Cartier, P. (1987). *C. R. Acad. Sci. Paris*, 304, Série II, 789.
- [12] Cassells, J.W.S. (1965). "Diophantine Approximation." *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics*, no. 45, Cambridge University Press, Cambridge, 169 p.
- [13] Conway, J.H. and Sloane, N.J.A. (1988). *Sphere Packings, Lattices, and Groups*. Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg, 663 p.
- [14] Cowley, J.M. (1986). *Diffraction Physics*. North-Holland, Amsterdam, 2<sup>nd</sup> edition 1981 (1986), 430 p.

For a closer acquaintance with the residents of the aperiodic zoo, see [25,15,49].

"Local derivability" has been studied recently by P. Kramer and his school in Tübingen (see, e.g., [2]). Several interesting examples are discussed in [38].

The concept of symmetry for quasicrystals needs to be carefully defined. Except for exceptional cases, neither quasicrystals nor aperiodic tilings have any symmetry at all. However, when their Fourier transforms have the symmetry of some finite subgroup of  $O(n)$ , we may say that the quasicrystal or tiling has this symmetry too. Quasicrystal symmetry is discussed in [Katz, 1992]. A curious relation between the symmetries of real quasicrystals and aperiodic tilings was first explored by Levitov [30]. Is there perhaps a quasicrystallographic restriction?

## Acknowledgements

I am grateful to Claude Godrèche for information about, and beautiful pictures of, the binary tiling. I would also like to thank Phyllis Cassidy, Robert Currier, Louis Michel, Charles Radin, and Doris Schattschneider for reading or listening to earlier versions of the lecture.

Soclar (voir [50]) et Leonid Levitov. Puisque les résultats de Levitov (obtenus conjointement avec André Katz) ne sont pas encore disponibles sous forme de prépublication, j'en inclus ici le résumé :

"Un pavage quasi-périodique admet des règles d'appariement s'il peut être défini en spécifiant les voisinages locaux possibles, c'est-à-dire, tous les motifs locaux d'une certaine taille bornée. Nous étudions l'existence de règles d'appariement pour les pavages du plan (bidimensionnel) et de l'espace (tridimensionnel) engendré par des grilles. Nous identifions et décrivons un certain contenu topologique du problème comme un outil permettant la démonstration de l'existence de règles d'appariement. Nous considérons l'espace vectoriel  $E = E^{\parallel} \oplus E^{\perp}$  comme une fibration  $E \xrightarrow{\pi_{\perp}} E^{\parallel}$  ( $\pi_{\perp}$  est la projetante le long de  $E^{\perp}$ :  $\pi_{\perp}(E^{\perp}) = 0$ ,  $\pi_{\perp}(E^{\parallel}) = E^{\parallel}$ ). Dans  $E$ , on définit un « ensemble interdit »  $\Gamma$  qui est l'union sur un treillis dans  $E$  d'une famille de sous-espaces (affines) du treillis de  $E$  qui ne coupent ni  $E^{\perp}$  ni  $E^{\parallel}$ . On considère alors les sections  $S$  de la fibration qui n'ont pas d'intersection avec  $\Gamma$ , et on calcule les classes d'homotopie de ces sections. La liste de ces classes contient d'importantes informations à propos des règles d'appariement des pavages correspondants (toute famille de grilles engendre ses propres  $E$  et  $\Gamma$ ). Nous démontrons le théorème suivant.

**Théorème.** Des règles d'appariement existent si et seulement si tout  $S$  admissible est homotope à une constante.

À l'aide de ce théorème, nous obtenons des règles d'appariement pour les pavages de Penrose généralisés et pour les pavages possédant des symétries octogonales, clodécagonale et icosaèdre. »

La « méthode des grilles » et la « méthode de projection » pour engendrer des pavages non périodiques ont été introduites par deBruijn [8]. Les deux méthodes produisent les mêmes pavages (voir [20]).

« La théorie des pavages apériodiques est à un stade de zoologie », comme le faisait remarquer récemment N.G. deBruijn. Mais même si le petit zoo des pavages apériodiques est remarquablement diversifié, il semble être possible d'associer tous les exemples connus aux pavages projetés d'une façon ou d'une autre. Cela requiert dans certains cas de disséquer et de rassembler les pavés.

Pour faire plus ample connaissance avec les résidents du zoo apériodique, on peut consulter [25,15,49].

- [15] Danzer, L. (1989). "Three dimensional analogues of the planar Penrose tilings and quasicrystals." *Discrete Mathematics*, 76, 1–7.
- [16] Danzer, L. (1991). "Quasiperiodicity: local and global aspects." Preprint, Universität Bielefeld, ZIF-Nr. 6.
- [17] Elser, V. (1986). "The diffraction pattern of projected structures." *Acta Cryst.*, A42, 36–43.
- [18] Fedorov, E.S. (1891). "Symmetry of regular systems of figures" (in Russian). *Notices of the Imperial St. Petersburn Mineralogical Society*, vol. 28, 1–146. English translation by David and Katharine Harker, ACA Monograph no. 7.
- [19] Frobenius, G. (1911). "Über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen." *Sitz. Konigl. Preuss. Akad. Wissenschaften*, Berlin, 654–666.
- [20] Gähler, F. and Rhyner, J. (1986). "Equivalence of the generalized grid and projection methods for the construction of quasiperiodic tilings." *J. Phys. A.: Math. Gen.*, vol. 19, 267–277.
- [21] Godrèche, C. (1991). "Non Pisot tilings and singular scattering." *Phase Transitions*, vol. 32, 45–79.
- [22] Godrèche, C. and Luck, J.-M. (1990). "Multifractal analysis in reciprocal space and the nature of the Fourier transform of self-similar structures." *J. Phys.*, A 23, 3769–3797.
- [23] Godrèche, C. and Lançon, F. (YEAR). "A simple example of a non-Pisot tiling with five-fold symmetry." Preprint.
- [24] Grünbaum, B. and Shephard, G.C. (1980). "Tiling with congruent tiles." *Bulletin of the American Mathematical Society*, N.S., vol. 3, 951–973.
- [25] Grünbaum, B. and Shephard, G.C. (1987). *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman, New York, 700 p.
- [26] Heesch, H. (1935). "Aufbau der Ebene aus kongruenten Bereichen." *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, New Ser. 1, 115–117.
- [27] Hilbert, D. (1900). "Mathematische Probleme." *Göttinger Nachrichten*, 253–297.
- [28] Jaric, M. and Gratias, D., eds. (1989). *Extended Icosahedral Structures*. Vol. 3 of the series *Aperiodicity and Order*, Academic Press, San Diego, 224 p.
- [29] Katz, A. and Duneau, M. (1986). "Quasiperiodic patterns and icosahedral symmetry." *J. Physique*, 47, 181–196.
- [30] Katz, A. (1992). "A short introduction to quasicrystallography." In *From Number Theory to Physics*, P. Moussa and M. Waldschmidt, eds., Springer Verlag.
- [31] Kershner, R. (1968). "On paving the plane." *American Mathematical Monthly*, 75, 839–844.
- [32] LaBrecque, M. (1987/88). "Opening the door to forbidden symmetries." *Mosaic*, vol. 18, no. 4, Winter 1987/88, 2–23.
- [33] Lançon, F. and Billard, L. (1988). "Two-dimensional system with a quasicrystalline ground state." *J. Phys. France*, vol. 49, 249–256.
- [34] Levitov, L. (1988). "Why only quadratic irrationalities are observed in quasicrystals?" *Europhysics Letters*, vol. 6, no. 6, 517–522.
- [35] Levitov, L. and Rhyner, J. (1988). *J. Phys. France*, vol. 49, 1835.
- [36] Meyer, Y. (1972). *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*. North-Holland, Amsterdam and London.
- [37] Michel, L. and Mozryzmas, J. (1989). "Les concepts fondamentaux de la cristallographie." *CR Acad. Sci. Paris*, 308, Série II, 151–158.
- [38] Nissen, H.-U. (1990). "A two-dimensional quasiperiodic dodecagonal tiling by two pentagons." In *Quasicrystals, Networks, and Molecules of five-fold Symmetry*, I. Hargittai, ed., VCH, Weinheim, 181–199.
- [39] Porter, R. (1988). "The applications of the properties of Fourier transforms to quasicrystals." *M. Sc. Thesis*, Rutgers University.
- [40] Radin, C. (1991). "Global order from local sources." *Bulletin of the American Mathematical Society*, N.S., vol. 25, no. 2, October 1991, 335–364.
- [41] Radin, C. and Wolff, M. (1991). "Space tilings and local isomorphism." Preprint.
- [42] Reinhardt, K. (1928). "Zur Zerlegung der euklidischen Räume in kongruente Polytope." *S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 150–155.
- [43] Schoenflies, A. (1891). *Kristallsystem und Kristallstruktur*. Leipzig, Teubner, 1891; Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1984.
- [44] Schulte, E. "Tilings." To appear in *Handbook of Convexity*.
- [45] Senechal, M. (1985). "Introduction to mathematical crystallography." Preprint (IHES/P/85/47).

La «dérivabilité locale» a récemment été étudiée par P. Kramer et son école à Tübingen (voir, par exemple, [2]). Plusieurs exemples intéressants sont présentés dans [38].

Le concept de symétrie pour les quasi-cristaux doit être soigneusement défini. Sauf pour les cas exceptionnels, ni les quasi-cristaux ni les pavages apériodiques ne possèdent de symétrie. Toutefois, lorsque que leur transformée de Fourier possède la symétrie d'un certain sous-groupe fini de  $O(n)$ , on peut affirmer que le quasi-cristal ou le pavage possède également cette symétrie. La symétrie quasi-cristalline est objet de discussion dans [30]. Levitov fut le premier à explorer une curieuse relation entre les symétries des quasi-cristaux réels et les pavages apériodiques [34]. Peut-être existe-t-il une restriction quasi-cristallographique ?

### Remerciements

Je suis reconnaissante envers Claude Godrèche pour ses informations concernant le pavage binaire et ses magnifiques illustrations. Je tiens également à remercier Phyllis Cassidy, Robert Currier, Louis Michel, Charles Radin et Doris Schattschneider pour la lecture ou l'audition des versions précédentes de cette conférence.

- [46] Senechal, M. and Taylor, J. (1990). "Quasicrystals: the view from Les Houches." *The Mathematical Intelligencer*, vol. 12, no. 2, 54–64.
- [47] Senechal, M. (1990). "Brief history of geometrical crystallography." In *Historical Atlas of Crystallography*, J. Lima-de-Faria, ed., published for the International Union of Crystallography by Kluwer, Dordrecht.
- [48] Senechal, M. (1992). "Introduction to Lattice Geometry." In *From Number Theory to Physics*, P. Moussa and M. Waldschmidt, eds., Springer Verlag.
- [49] Socolar, J.E. S. (1989). "Simple octagonal and dodecagonal quasicrystals." *Physical Review B*, vol 39, no. 15, 10519–10551.
- [50] Socolar, J.E. S. (1990). "Weak matching rules for quasicrystals." *Communications in Mathematical Physics*, 129, 599–619.
- [51] Stephens, P. and Goldman, A. (1991). "The Structure of Quasicrystals." *Scientific American*, vol. 264, no. 4, April 1991, 44–53.
- [52] Thurston, W. (1990). "Groups, Tilings, and finite State Automata." *Summer 1989 AMS Colloquium Lectures*. Available in preprint; the first lecture was published as "Conway's tiling groups", *The American Mathematical Monthly*, vol. 97, no. 8, October 1990, 757–773.