

Modelización numérica de un motor de combustión interna monocilíndrico encendido por chispa

Norberto Nigro, Mario A. Storti y Leonardo Ambroggi

Grupo de Tecnología a Mecánica del INTEC
CONICET-Universidad Nacional del Litoral
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
Tel.: 54-342-455 91 75, Fax: 54-342-455 09 44
email:nnigro@venus.unl.edu.ar
<http://venus.unl.edu.ar/gtm-eng.html>

Resumen

El objetivo de este trabajo fue el desarrollo de un código computacional para la resolución de problemas de dinámica de gases en su escurrimiento a través de ductos y toberas y su posterior inserción dentro de un código que simule el ciclo de potencia y el de bombeo en un motor de combustión interna encendido por chispa. Es sabido que los motores de combustión interna son altamente influenciados por el diseño de los múltiples de admisión y escape. Factores como el ruido, la emisión y el rendimiento volumétrico son algunos de los principales temas de actualidad en el área de motores térmicos. Es por esto que en pos de poder modelar un motor y sus partes pensamos que sería muy provechoso contar con un desarrollo previo en el flujo en tubos de sección arbitraria, siendo los ductos y las toberas sólo una aplicación particular del código generado. Se utilizó una discretización espacial unidimensional en elementos finitos con una discretización temporal según un esquema de Lax-Wendroff de dos pasos. La física del problema es gobernada por las ecuaciones de Euler, flujo inviscido, con el agregado de términos fuentes para incluir los efectos de la fricción en las paredes del tubo, la variabilidad de la sección de paso del fluido y la transferencia de calor a través de las paredes del ducto. Las primeras secciones introducen acerca de la dinámica de gases en sus aspectos teóricos básicos incluyendo el análisis de discontinuidades tipo ondas de choque. Posteriormente se analizan aspectos numéricos como la formulación empleada, el tratamiento de las condiciones de contorno y las técnicas de resolución numérica del sistema resultante. A continuación se presentan una gran variedad de resultados y su comparación con sus contrapartes analíticas. Finalmente se presentan algunos aspectos computacionales acerca del modelo completo de simulación de un motor de combustión interna encendido por chispa y las curvas características obtenidas para un caso test.

NUMERICAL MODELLING OF SINGLE CYLINDER INTERNAL COMBUSTION ENGINES. INFLUENCE OF INTAKE AND EXHAUST MANIFOLD DESIGN ON VOLUMETRIC EFFICIENCY

Summary

The goal of this paper is the development of a computational software for the resolution of gas dynamics through pipes and nozzles and its implementation inside a computational code for spark ignition internal combustion engines. It is well known the influence of the intake and exhaust manifolds over the global design of an engine. Factors like volumetric efficiency, emission and noise are only some of the principal topics of research nowadays. So, in order to model an internal combustion engine, we thought about the implementation of an efficient numerical method for pipes and nozzles simulation. We have used a onedimensional finite element method coupled with a two step Lax-Wendroff time integration technique applied on Euler equations with source terms for friction, heat transfer and variable pipe area. The first sections introduce to theoretical gas dynamics including shock waves and discontinuities. Next, we present numerical topics related with the space-time formulation, boundary condition treatment and numerical solvers for this problem. We show several numerical results, compared with analytical solutions to validate our software. Finally we present some computational topics related with the whole spark ignition internal combustion engine code and some performance curves obtained for a test case.

Keywords:

Motor de combustión interna, múltiples de admisión y escape, dinámica de gases computacional, toberas, flujo en ductos, Euler 1D no estacionario.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo forma parte de un proyecto que persigue el estudio de motores de combustión interna mediante el uso de herramientas computacionales. Históricamente el tema ha sido abordado tanto a nivel teórico como experimental y numerosos esfuerzos fueron realizados en pos de obtener correlaciones que permitan calibrar modelos para uso de los diseñadores. Si bien esto ha sido realizado con éxito, y la evidencia está en el gran desarrollo alcanzado en su aplicación a la industria aeronáutica, naval y automotriz entre otras, todavía existen muchos parámetros y factores de diseño por optimizar. Con el advenimiento de computadoras cada vez más poderosas, capaces de ir sobrepasando los límites en forma muy veloz, es posible incorporar fenómenos más complejos dentro de los modelos. De esta forma es posible obtener resultados en situaciones muy complicadas que ayudan al diseñador a comprender más rápidamente la influencia de ciertos parámetros sobre la operación de la máquina. La idea final es lograr una gran interacción entre el diseñador, la herramienta computacional y el banco de pruebas, tres elementos fundamentales en el ciclo completo del diseño.

El proyecto incluye la generación de un software capaz de simular el funcionamiento de un motor plurcilíndrico junto con el sistema de admisión y el escape. De esta forma es posible contar con una herramienta que permita mayor flexibilidad en la toma de decisiones del diseñador, ahorro económico tanto en horas de uso del banco de ensayos como en horas de los profesionales involucrados y materiales, una mejora en la tendencia a optimizar el diseño. Además es importante la influencia que puede tener un desarrollo como éste en cuestiones ambientales tales como disminución del ruido y la polución.

La primera parte del proyecto se concentra en el caso monocilíndrico considerando combustión estequiométrica, destacándose aquí el estudio de los fenómenos dinámicos de los gases sobre la capacidad de aspiración del motor. Esto en pocas palabras significa estudiar la influencia de los sistemas de admisión y escape sobre el rendimiento volumétrico.

Para ello es importante la generación de un software capaz de simular flujo en tubos, con restricciones, con secciones variables (toberas) y que sea capaz de capturar todo tipo de patrón fluidodinámico, como por ejemplo ondas de choque.

Este trabajo utiliza técnicas numéricas standards y tiene como objetivo mostrar la performance del mismo en diversas situaciones con la idea de validarlo como una parte del código computacional.

La física del problema es gobernada por las ecuaciones de Euler, flujo invíscido, con el agregado de términos fuentes para incluir los efectos de la fricción en las paredes del tubo, la variabilidad de la sección de paso del fluido y la transferencia de calor a través de las paredes del ducto. Se utilizó una discretización espacial unidimensional en elementos finitos del tipo Petrov-Galerkin con una discretización temporal según un esquema de Lax-Wendroff de dos pasos.

Las primeras secciones presentan una introducción acerca del modelo matemático utilizado, sus aspectos teóricos y un breve análisis de discontinuidades (por ej. ondas de choque). En la tercera sección se analizan los aspectos numéricos relacionados con la discretización espacial, temporal y las condiciones de contorno. La cuarta sección presenta una gran variedad de resultados numéricos y su comparación con sus contrapartes analíticas. Finalmente se presentan algunos detalles computacionales del modelo completo, incluyendo las carreras de compresión, combustión y expansión (ciclo de potencia) y las curvas características obtenidas para un caso test.

FLUJO COMPRESIBLE INVÍSCIDO. ECUACIONES DE EULER

El sistema de leyes de conservación para un flujo invíscido, llamado *las ecuaciones de Euler*, forman un sistema de ecuaciones acopladas no lineales de primer orden que pueden ser escritas en varias formas equivalentes.

Ya que la base física de las ecuaciones de Euler es la expresión de las leyes de conservación para masa, momento y energía, la formulación básica será derivada a partir de la forma integral de estas leyes de conservación. Esta forma de conservación es esencial para poder calcular correctamente velocidades de propagación e intensidad de las discontinuidades presentes en el flujo, tal como discontinuidades de contacto u ondas de choque que pueden ocurrir en flujo invíscido. No obstante cuando estas estructuras fluidodinámicas no existen se pueden usar también formulaciones no conservativas.

Varias formulaciones se pueden definir dependiendo de las variables escogidas en el vector de estado. Las *variables conservativas* son bastante usuales en este contexto y se conforman con la densidad, el momento lineal y la energía, a saber

$$\mathbf{U}_{\text{cons}} = \left(\rho \quad \rho \mathbf{u} \quad \rho e \right) \quad (1a)$$

Ellas contienen las cantidades que efectivamente se conservan. Otras variables muy populares porque representan la forma más directa de identificar el estado de un fluido son aquellas formadas por la densidad, la velocidad y la presión y son llamadas *variables primitivas*. Como otra alternativa surgen las *variables características o de Riemann* que representan un conjunto de variables que se propagan en el tiempo acorde a la naturaleza hiperbólica de las ecuaciones de Euler. Su definición es

$$\mathbf{U}_{\text{char}} = \left(u_k + \frac{2c}{\gamma-1} \quad u_k - \frac{2c}{\gamma-1} \quad s \right) \quad (1b)$$

donde u_k, c, s representan la velocidad según una dirección k , la velocidad del sonido y la entropía respectivamente. Desde un punto de vista matemático uno puede plantear la equivalencia de las ecuaciones mediante matrices de transformación entre los tres conjuntos definidos.

Formulación integral de las ecuaciones de Euler

La forma integral de las ecuaciones de Euler, escrita en forma compacta, queda definida como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \mathbf{Q} d\Omega \quad (2)$$

donde $\mathbf{U}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}$ representan el vector de estado (1a), los flujos advectivos y un término fuente definidos de la siguiente manera

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I} \\ \rho \mathbf{u} H \end{pmatrix} = \mathbf{u} \mathbf{U} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} p; \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \mathbf{f}_e \\ -q_H + \rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (3)$$

siendo \mathbf{f}_e un vector de fuerzas externas de volumen, H la entalpía, \otimes el producto tensorial e \mathbf{I} el tensor identidad. q_H representa una fuente térmica externa.

El sistema anterior tiene que ser cerrado o completado por una ecuación de estado definiendo las propiedades termodinámicas del fluido. En general se adopta una ecuación de la forma $p = p(\rho, T)$ con alguna definición de la energía interna tal como $e = e(p, T)$. Para nuestro caso hemos tomado un gas perfecto donde $p/\rho = RT$ y $e = C_v T$ con R, C_v la constante universal de los gases y el calor específico a volumen constante respectivamente.

Formulación diferencial de las ecuaciones de Euler

La forma diferencial de las ecuaciones de Euler proviene de asumir que existe cierta continuidad en los coeficientes de la ecuación y que la forma integral se satisface para todo volumen arbitrario, en particular para aquel que se obtiene cuando su medida tiende a anularse. Entonces (2) se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) &= \rho \mathbf{f}_e \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot \rho H \mathbf{u} &= q_H + \rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{u}\end{aligned}\quad (4a)$$

o en notación compacta

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{Q} \quad (4b)$$

Para la aplicación objeto de este trabajo se asume flujo unidimensional no estacionario y se incluyen efectos de fricción, transferencia de calor y cambios de sección del ducto. Por lo tanto las expresiones (4a) se transforman en

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho S u)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho S u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho S u^2 + p S)}{\partial x} &= p \frac{dS}{dx} - \left(\frac{4C_f}{d} + \zeta\right) \frac{u|u|}{2} \\ \frac{\partial(\rho S e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho S H u)}{\partial x} &= q_H\end{aligned}\quad (5a)$$

con el flujo de calor y la fricción definidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}q_H &= \rho S \frac{4\alpha(T_w - T)}{d} \\ \alpha &= 0,004 \frac{G^{0,8}}{d^{0,2}} \quad [\text{kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}] \\ C_f &= 0,2373/Re^{\frac{1}{4}} \\ \zeta &= \begin{cases} 0 & \text{tramos rectos} \\ 2 & \text{tramos curvos} \end{cases}\end{aligned}\quad (5b)$$

con el flujo másico G expresado en $\text{kg/m}^2/\text{hora}$, el diámetro del ducto d expresado en metros, T_w la temperatura de la pared del ducto, S la sección transversal del ducto expresada en metros y un apropiado factor para compatibilizar unidades.

Condiciones Rankine-Hugoniot

El flujo invíscido puede experimentar discontinuidades del tipo *ondas de choque* o *discontinuidades de contacto* que pueden ser descritas por soluciones a la forma integral de las leyes de conservación o por soluciones débiles de las ecuaciones de Euler. Las relaciones del flujo a ambos lados de la discontinuidad moviéndose con velocidad \mathbf{C} se conocen como las relaciones de *Rankine-Hugoniot*

$$[\mathbf{F}] \cdot \mathbf{n} - \mathbf{C}[\mathbf{U}] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6a)$$

Se asume que las fuerzas externas \mathbf{f}_e son continuas, $[A]$ representa el salto en la variable encerrada entre corchetes ($[A] = A_2 - A_1$) a través de la discontinuidad y 1, 2 representan los estados aguas arriba y aguas abajo de la discontinuidad y \mathbf{n} es la normal a la misma. Haciendo un poco de álgebra llegamos a que la relación anterior puede expresarse como

$$\begin{aligned} [\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] - \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}[\rho] &= 0 \\ [(\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u} + p\mathbf{n}] - \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}[\rho \mathbf{u}] &= 0 \\ [\rho \mathbf{u} H \cdot \mathbf{n}] - \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}[\rho e] &= 0 \end{aligned} \quad (6b)$$

Si la discontinuidad fuera estacionaria entonces $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ y las relaciones anteriores quedan

$$\begin{aligned} [\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] &= 0 \\ [(\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u} + p\mathbf{n}] &= 0 \\ [\rho \mathbf{u} H \cdot \mathbf{n}] &= 0 \end{aligned} \quad (6c)$$

Aquí no entraremos en detalle acerca de los distintos tipos de discontinuidades que físicamente pueden existir, solamente trataremos más adelante algunos casos que se fueron presentando en las aplicaciones.

Forma cuasi-lineal de las ecuaciones de Euler

Por razones de conveniencia en el análisis matemático y numérico de las ecuaciones de Euler éstas pueden ser escritas en una versión linealizada que consiste en aplicar la regla de la cadena al sistema de primer orden (4b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \nabla \mathbf{U} &= \mathbf{Q} \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \nabla \mathbf{U} &= \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (7)$$

donde $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$ representa el jacobiano de los flujos advectivos. Es más, en el caso de los gases perfectos el flujo advectivo se expresa como $\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{U}$, entonces la definición del jacobiano advectivo es exacta a menos del término $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{U}}$ que en principio se desprecia y da lugar a lo que llamamos linealización.

DISCRETIZACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE EULER

En este apartado nos concentraremos en presentar la formulación por elementos finitos del sistema de ecuaciones de Euler en el caso unidimensional no estacionario. En principio se presenta la forma discreta del operador espacial y luego se completa el análisis con la discretización del término temporal y las condiciones de contorno.

Discretización espacial

Es bien sabido que la forma clásica de presentar el método de los elementos finitos es a través del método de los residuos ponderados, en particular del método de Galerkin, donde la forma diferencial del sistema de ecuaciones se pesa con funciones de peso de soporte compacto y se integran a lo largo del dominio. Partiendo de (7) obtenemos

$$\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}_i \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}_i \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}_i \mathbf{Q} d\Omega \quad i = 1, \dots, N_{\text{nod}} + \quad (8)$$

donde $\tilde{\mathbf{N}}_i$ represente la función de peso asociada al nodo i . La variable dependiente o de estado de nuestro problema \mathbf{U} se aproxima usando funciones de interpolación tal que $\mathbf{U}^h = \sum_j \mathbf{N}_j \mathbf{U}_j$.

Regularmente se adopta $\tilde{\mathbf{N}}_i = \mathbf{N}_i$ siendo esta una propiedad del método de Galerkin, independientemente de la forma de \mathbf{N}_i . Es bien conocido que esta metodología en el área de la mecánica de fluidos ha sido objeto de un exhaustivo estudio. Problemas de índole numérico reflejados por oscilaciones espurias en las soluciones limitan la aplicabilidad de la formulación Galerkin. Este tópico ha dado lugar a una gran cantidad de trabajos publicados acerca de formulaciones capaces de evitar los inconvenientes asociados con la pérdida de estabilidad del esquema numérico en cuanto a su discretización espacial y que por su amplitud no será abordado en el presente trabajo. El lector interesado puede consultar la bibliografía especializada en el tema^{2,3,4,5,6,9,10,11,12}.

Sin entrar en detalles al respecto, se puede demostrar que una forma de evitar las inestabilidades espaciales en el esquema es usando funciones de peso diferentes de la función usada para aproximar la variable de estado, o sea: $\tilde{\mathbf{N}}_i \neq \mathbf{N}_i$ dando lugar a una familia de esquemas conocidos con el nombre de método de *Petrov-Galerkin*.

En este trabajo hemos usado una formulación bien popular denominada SUPG^{2,4,5,10} y que se basa en definir a la función de peso de la siguiente forma

$$\tilde{\mathbf{N}}_i = \mathbf{N}_i + \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \mathbf{A} \boldsymbol{\tau} \quad (9)$$

con

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{h}{2} \|\mathbf{A}\|^{-1} \quad (10)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es conocida como *matriz de tiempos intrínsecos* y $\|\mathbf{A}\|$ representa alguna norma de la matriz \mathbf{A} .

Reemplazando (9) y (10) en (8) llegamos a la forma semidiscreta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \mathbf{A} \boldsymbol{\tau} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \mathbf{A} \boldsymbol{\tau} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \mathbf{Q} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \mathbf{A} \boldsymbol{\tau} \mathbf{Q} d\Omega = \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, N_{\text{nod}} \end{aligned} \quad (11)$$

Discretización temporal

Producto de la discretización del operador espacial (11) aparece un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que se debe resolver mediante alguna técnica numérica. Este tema es un área de investigación en sí misma, y por lo tanto no será abordado aquí. Simplemente mencionamos que una de las formas de solucionar este problema es recurriendo a una discretización del operador temporal y que en este trabajo hemos utilizado un esquema de la familia de métodos de Lax-Wendroff.

Los métodos de Lax-Wendroff son muy conocidos en la resolución de las ecuaciones de Euler mediante esquemas centrados debidos a su virtud de suprimir muchos de los inconvenientes numéricos mencionados al presentar el método SUPG.

Su versión más simple es

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 [\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}}^n (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) - \mathbf{A}_{i-\frac{1}{2}}^n (\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n)] \quad (12)$$

Este esquema necesita la evaluación del jacobiano, operación costosa en muchos casos, y por lo tanto se han desarrollado versiones equivalente que evitan esta tarea. Además, en pos de mejorar la precisión temporal, se recurren a esquemas de dos pasos. Un ejemplo es el esquema introducido por Richtmyer y Morton conocido como esquema de Richtmyer³ definido como

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (13)$$

La propiedad esencial de este esquema descansa en la combinación de discretizaciones centradas en el espacio y en el tiempo alcanzando de esta forma una precisión de segundo orden con una técnica de integración temporal explícita sobre un soporte de tres niveles de tiempo. O sea, una muy buena combinación de costo, estabilidad y precisión. Los dos pasos funcionan como un método tipo predictor-corrector.

En este trabajo presentamos una versión de un esquema de Lax-Wendroff de dos pasos conocida como el método de Mac-Cormack y que se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{U}}_i &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^n + \overline{\mathbf{U}}_i) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\overline{\mathbf{F}}_i - \overline{\mathbf{F}}_{i-1}) \end{aligned} \quad (14)$$

donde $\overline{\mathbf{F}}_i = \mathbf{F}(\overline{\mathbf{U}}_i)$. Su versión como predictor-corrector se puede escribir como

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{U}}_i &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) \\ \overline{\overline{\mathbf{U}}}_i &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\overline{\mathbf{F}}_i^n - \overline{\mathbf{F}}_{i-1}^n) \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (\overline{\mathbf{U}}_i + \overline{\overline{\mathbf{U}}}_i) \end{aligned} \quad (15)$$

Debido a la falta de simetría del operador en el caso no lineal también es posible una versión en un orden inverso

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{U}}_i &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) \\ \overline{\overline{\mathbf{U}}}_i &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{\mathbf{F}}_{i+1}^n - \overline{\mathbf{F}}_i^n) \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{U}}_i + \overline{\overline{\mathbf{U}}}_i)\end{aligned}\quad (16)$$

En este trabajo hemos utilizado la versión de la ecuación (15) pero no se han encontrado grandes diferencias con los resultados obtenidos usando la ecuación (16).

La presencia del término fuente y del término de disipación artificial producto de la estabilización SUPG modifican el esquema de integración temporal de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\overline{\Delta \mathbf{U}}_i &= -\frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i)^n + \Delta t \mathbf{Q}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}}^n (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i)^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{D}_{i-\frac{1}{2}}^n (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1})^n \\ \overline{\overline{\Delta \mathbf{U}}}_i &= -\frac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{\mathbf{F}}_i - \overline{\mathbf{F}}_{i-1}) + \Delta t \overline{\mathbf{Q}}_i + \frac{\Delta t}{\Delta x} \overline{\mathbf{D}}_{i+\frac{1}{2}} (\overline{\mathbf{U}}_{i+1} - \overline{\mathbf{U}}_i) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \overline{\mathbf{D}}_{i-\frac{1}{2}} (\overline{\mathbf{U}}_i - \overline{\mathbf{U}}_{i-1})\end{aligned}\quad (17)$$

donde $\mathbf{D} = \mathbf{A} \boldsymbol{\tau} \mathbf{A}$ representa la difusión artificial agregada por el término estabilizador.

La estabilidad del esquema Lax-Wendroff está regida por la condición de Courant-Friedrich y Levy (CFL).

Tratamiento de las condiciones de contorno

La aplicación al caso de flujo transitorio en múltiples de admisión y escape limita el tratamiento de las condiciones de contorno. En este tipo de situaciones es muy natural imponer variables como la presión y/o la velocidad en el extremo del tubo en contacto con el cilindro y la presión y/o la densidad del lado atmosférico, ya que es en la mayoría de los casos la información con que se cuenta. Es por eso que debemos tener presente como influyen las condiciones tipo Dirichlet sobre la estabilidad del esquema numérico. Es bien conocido el hecho que las condiciones de contorno deben satisfacer algunos requisitos impuestos por la física del problema.

En el área de flujo compresible es muy habitual utilizar la siguiente tabla para elegir las variables a imponer en el contorno de acuerdo a las condiciones del fluido

Régimen	Entrada	Salida
Subsónico	ρ u	p
Supersónico	ρ u p	libre

Tabla I

La tabla anterior representa sólo un ejemplo de lo que comúnmente se adopta. No obstante es posible modificar las variables a imponer siempre que se satisfagan algunos requisitos respecto a las características que propagan la información. En este trabajo hemos utilizado la Tabla I tal cual la hemos presentado.

Es de destacar que los problemas que se resuelven en este trabajo, y que sirven como validación, son en su mayoría estacionarios. En estas situaciones es muy habitual incorporar condiciones de contorno de tipo absorbentes que se imponen en aquellos contornos computacionales artificiales que aparecen cuando uno desea interrumpir lo que sería una malla

infinita. Sin entrar en detalles aquí podemos decir que este método se basa en descomponer el jacobiano advectivo en sus autovalores e imponer aquellas características entrantes al dominio usando valores de referencia y extrapolar con la información del interior del dominio aquellas características que son salientes³.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Es sabido que la resolución de las ecuaciones de Euler en su versión bidimensional o tridimensional no es directa y que la validación de los códigos computacionales requieren pasar algunos ensayos que permitan identificar la capacidad del algoritmo.

Problemas asociados con la estabilidad espacial y temporal de los esquemas utilizados, precisión en la resolución de las discontinuidades presentes en el flujo, tratamiento de la no linealidad del problema y de las condiciones de contorno son algunos de los tópicos numéricos que definen la calidad de una formulación para la resolución de flujo compresible.

Por estas razones y por el tratamiento dado a los múltiples de admisión y escape dentro del modelo del motor de combustión interna todos los ejemplos presentados a continuación son unidimensionales.

Uno de los problemas escogidos como test de validación es el representando por flujo a través de toberas en estado estacionario bajo las siguientes condiciones:

- flujo subsónico,
- flujo supersónico sin choque
- transición subsónico-supersónico sin choque,
- subsónico-supersónico-subsonico con choque.

El flujo unidimensional en toberas de sección variable $S(x)$ se presenta resuelto en muchos libros de texto³ y aquí incluiremos una breve síntesis del mismo junto con una comparación de los resultados obtenidos con el método de los elementos finitos y los obtenidos semi-analíticamente mediante un software educacional de cálculo de toberas desarrollado en un entorno OCTAVE.

El primer ejemplo se trata de una tobera divergente y el segundo es una tobera convergente-divergente y ambos fueron extraídos de la referencia³.

A continuación se presenta el caso de un choque estacionario en un tubo de sección recta y finalmente se resuelve un problema no estacionario de una apertura brusca de una válvula en el extremo de un tubo.

Flujo cuasi-unidimensional en toberas

Consideremos un flujo continuo isoentrópico con una presión y temperatura de estancamiento

$$\begin{aligned} p_0 &= p_{01} \\ T_0 &= T_{01} \end{aligned} \tag{18a}$$

indicando con un subíndice 1 las condiciones a la entrada.

La relación entre los valores de estancamiento y la variable asociada para un valor del número de Mach $M \neq 0$ viene dada por

$$\frac{p_0^{(\gamma-1)/\gamma}}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 = \frac{T_0}{T} \tag{18b}$$

Llamamos sección crítica S^* a aquella mínima área donde se alcanzan las condiciones sónicas. Su relación con el área $S(x)$ y el número de Mach viene dada por

$$\frac{S}{S^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)}} \quad (18c)$$

con $M = u / \sqrt{\gamma p / \rho}$.

Las condiciones sónicas sólo pueden alcanzarse en la coordenada x_{crit} , entonces, el flujo másico crítico se define como

$$\dot{m}^* = \rho^* c^* S^* = \rho_0 c_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)}} S^* \quad (18d)$$

Un flujo se estrangula cuando se cumple la condición que $\dot{m} = \dot{m}^*$ y esto se logra si el área de la garganta de la tobera (S_t) coincide con el valor crítico.

Por otro lado si se cumple que $S^* < S_t$, el flujo no se estrangula y el valor del número de Mach en la garganta dependerá de las condiciones a la entrada.

La siguiente tabla resume lo expresado en término del número de Mach en ciertas zonas particulares como por ejemplo, aguas arriba de la garganta (x_{t-}), en la propia garganta (x_t), aguas abajo de la misma (x_{t+}) y a la salida de la tobera (x_{out}).

Caso	x_{t-}	x_t	x_{t+}	x_{out}
1	< 1	= 1	< 1	< 1
2	< 1	= 1	> 1	< 1 (*)
3	< 1	= 1	> 1	> 1
4	< 1	< 1	< 1	< 1
5	> 1	> 1	> 1	> 1
6	> 1	> 1	> 1	< 1 (*)

Tabla II

Los casos 2 y 6 marcados con (*) presentan una discontinuidad tipo onda de choque y deben ser analizados especialmente mediante las relaciones de Rankine-Hugoniot aplicadas al caso de toberas. En este caso y después de cierta álgebra sobre las ecuaciones (6a-c) estas condiciones devienen en el siguiente conjunto de ecuaciones a satisfacer en la zona del choque

$$\begin{aligned} T_0 &= T_{01} \\ M_R^2 &= \frac{2 + (\gamma - 1)M_L^2}{2\gamma M_L^2 - (\gamma - 1)} \\ \frac{p_R}{p_L} &= \frac{2\gamma M_L^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \\ \frac{p_{0R}}{p_{0L}} &= \frac{\left(\frac{\frac{1}{2}(\gamma + 1)M_L^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_L^2} \right)^{\gamma/(\gamma - 1)}}{\{2\gamma/(\gamma + 1)M_L^2 - (\gamma - 1)/(\gamma + 1)\}^{1/(\gamma - 1)}} \end{aligned} \quad (19a - d)$$

donde los subíndices R, L representan la posición a derecha e izquierda de la discontinuidad.

De acuerdo a los casos presentados en la Tabla II se desarrolló un procedimiento computacional que permite calcular la solución exacta. Para ello hemos utilizado el software OCTAVE como lenguaje de programación ya que por su característica de intérprete permite una rápida evolución del desarrollo del programa y cuenta con una interfase gráfica muy interesante para acoplar cálculo y gráficos.

El procedimiento de cálculo divide el dominio en tres zonas, la primera va desde la entrada hasta la garganta, la segunda desde la garganta hasta el choque y la tercera desde el choque hasta la salida. En el caso en que el choque no exista se toma como posición del choque aquella coincidente con la salida y la región 3 tiene dimensión nula. En caso de que la tobera fuera o convergente o divergente la garganta coincide con la salida o la entrada respectivamente dejando las regiones 2 y 3 nulas en el primer caso y la región 1 nula en el segundo caso⁷.

Tobera divergente

La geometría de la tobera viene dada por la siguiente expresión para la sección transversal³

$$S(x) = 1,398 + 0,347 \tanh[0,8(x - 4)] \quad 0 \leq x \leq 10$$

Por razones de espacio obviamos algunos resultados obtenidos como el caso enteramente subsónico y enteramente supersónico⁷ y pasamos directamente al caso transónico.

La Figura 1 muestra el caso transónico con un flujo ingresando en régimen supersónico y con diversas condiciones de presión impuestas a la salida que se corresponden con un estado subsónico a la salida, generando un choque en diferentes posiciones del dominio. En este caso el programa analítico recibe como dato la posición del choque y se calcula el perfil de presiones que aparecen en el gráfico superior para varias posiciones del choque. En el gráfico inferior se muestra como varía la presión a la salida de acuerdo a la posición del choque elegida. En todos los casos³ se ha tomado $S^* = 0,8$.

Figura 1. Tobera divergente. Flujo transónico. Solución analítica

En la Figura 2 vemos el caso de un flujo transónico como alguno de los mostrados en la Figura 1 donde hemos escogido una presión de referencia a la salida tal que debe generar un choque en $x = 5$. La figura superior muestra una comparación de la solución numérica obtenida con el código de elementos finitos con la analítica, donde se alcanza una buena aproximación. La figura inferior muestra como se satisface la invariación del

flujo másico. Es de destacar aquí, y del mismo modo en todas las siguientes figuras que presentan la distribución espacial del flujo másico, que el error en el mismo nos da una idea de la conservatividad del esquema. El hecho que el error se halle concentrado en el choque anulándose a ambos lados del mismo evidencia las buenas propiedades de conservación que presenta el esquema.

Figura 2. Flujo transónico con choque en $x = 5$. Solución numérica

La Figura 3 muestra lo que ocurre cuando las condiciones de presión a la salida cambian de forma tal que el choque se presenta en $x = 2$. Se alcanza una buena resolución en la presión (figura superior) y en el flujo másico (inferior derecha).

Figura 3. Tobera divergente. Flujo transónico con choque en $x = 2$. Solución numérica

Tobera convergente-divergente

Para este ejemplo la tobera tiene la siguiente geometría³

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 1,5\left(1 - \frac{x}{5}\right)^2 & 0 \leq x \leq 5 \\ 1 + 0,5\left(1 - \frac{x}{5}\right)^2 & 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Como antes obviamos algunos casos por razones de espacio.

La Figura 4 muestra lo que sucede analíticamente con un flujo transónico con entrada subsónica y un conjunto de posiciones para el choque desde $x = 5,5$ hasta $x = 9$ cada $0,5$ obtenidos a partir de distintas presiones a la salida, todas subsónicas. Se genera una familia de choques en distintas posiciones que se ven en la parte superior de la figura, mientras que en la inferior vemos como varía la presión de salida con la posición del choque.

Figura 4. Tobera convergente-divergente. Flujo transónico con una familia de choques.
Solución analítica

Las Figuras 5ab, 6ab y 7ab muestran las soluciones analíticas (trazo continuo) y numérica (o) para distintas posiciones del choque tanto en lo que concierne a la presión, al número de Mach y al error del flujo másico. Como vemos la coincidencia es muy buena.

La Figura 8 es un caso donde la entrada es supersónica y sin alcanzar las condiciones críticas en la garganta evoluciona de la misma forma aguas abajo de la misma y genera un choque en $x = 7$ para satisfacer la condición subsónica de la salida.

Figura 5a. Tobera convergente-divergente. Flujo transónico con choque en $x = 7$.
Solución numérica

Figura 5b. Tobera convergente-divergente. Flujo transónico con choque en $x = 7$.
Solución numérica

Figura 6a. Tobera convergente-divergente. Flujo transónico con choque en $x = 9$.
Solución numérica

Figura 6b. Tobera convergente-divergente. Flujo transónico con choque en $x = 9$.
Solución numérica

Figura 7a. Tobera convergente-divergente. Flujo transónico con choque en $x = 5, 5$.
Solución numérica

Figura 7b. Tobera convergente-divergente. Flujo transónico con choque en $x = 5, 5$.
Solución numérica

Figura 8. Tobera convergente-divergente. Flujo supersónico-transónico con choque en $x = 7$ subsónico. Solución numérica

Figura 9. Choque estacionario en tubo de sección constante. Solución numérica

Choque estacionario en un tubo de sección recta

El siguiente test presenta el caso de un choque estacionario en un tubo de sección constante¹⁰.

Se inicializa un flujo con un choque tal que satisface las condiciones de Rankine-Hugoniot con $C = 0$ (6a-c) como el siguiente

$$U_1 = \begin{cases} \rho = 1 \\ u = 1 \\ p = 0,17857 \end{cases} \quad U_2 = \begin{cases} \rho = 8/3 \\ u = 0,375 \\ p = 0,80357 \end{cases}$$

La Figura 9 muestra la presión al cabo de un conjunto representativo de iteraciones según el eje longitudinal donde alcanzamos a ver una buena definición del choque (del orden de tres elementos) entre la solución numérica (*o*) y la exacta (trazo continuo).

Análisis transitorio de la apertura de una válvula

Este ejemplo presentado en la Figura 10a consiste en el flujo a través de un ducto conectado por un extremo a un recipiente de gran inercia y por el otro extremo a una válvula de descarga. La cañería tiene 10 cm de diámetro y 1 metro de longitud. La presión en el tanque es de 1,5 bar y su temperatura de 300 °K. La presión y la temperatura inicial del ducto coinciden con el tanque, mientras que la presión atmosférica es de 1 bar. Repentinamente se abre completamente la válvula. El objetivo de este ejemplo es comparar las soluciones obtenidas con el software desarrollado en un caso netamente transiente respecto a la solución obtenida en la referencia a¹.

Figura 10a. Análisis transitorio. Cierre repentino de una válvula

Figura 10b. $P = P(t)$ y $U = U(t)$ a la entrada del ducto (punto (a))

Figura 10c. $P = P(t)$ y $U = U(t)$ en el punto medio del ducto (punto (b))

Figura 10d. $P = P(t)$ y $U = U(t)$ unión ducto-válvula (punto (c))

La Figura 10b muestra la evolución temporal de la presión y la velocidad en la posición marcada con (a) en la Figura 10a y que está localizada justo en la conexión entre el tanque y el ducto. La Figura 10c hace lo propio con un punto intermedio del caño marcado en la Figura 10a con la letra (b), mientras que la Figura 10d corresponde a un punto marcado con (c) que se halla justo en el extremo en contacto con la válvula. Finalmente la Figura 11 muestra las tres curvas de velocidad vs tiempo en un solo gráfico.

Comparando con la solución reportada por Benson¹ el acuerdo de los resultados es muy bueno, quedando de esta forma validado el software para el caso no estacionario.

Figura 11. Respuesta temporal de la velocidad por la apertura repentina de una válvula

MODELO MATEMÁTICO PARA UN MOTOR DE COMBUSTIÓN INTERNA MONOCILÍNDRICO

El modelo matemático empleado en este trabajo para simular la operación de un motor monocilíndrico de combustión interna encendido por chispa se halla compuesto por:

- un modelo del cilindro,
- un modelo de las válvulas de admisión y escape,
- un modelo de los múltiples de admisión y escape.

Cada uno de estos modelos agrega un conjunto de ecuaciones, algebraicas o diferenciales tanto ordinarias como a derivadas parciales que deben ser resueltas en forma simultánea, por lo que el sistema completo es del tipo *diferencial-algebraico*. Debido a la importancia de los efectos dinámicos las variables independientes del problema son la coordenada según la dirección axial de los tubos y el tiempo siendo el cilindro y las válvulas puntos nodales en la red completa.

• El modelo del cilindro

El modelo del cilindro es un modelo termodinámico de dimensión cero o también llamado modelo de variables espaciales concentradas donde la única variable independiente es el tiempo, por lo tanto genera un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto presupone que no nos interesa la distribución espacial de las variables dentro del cilindro, sino solamente una terna de valores: densidad, presión y temperatura para todo el conjunto en cada instante de tiempo. Obviamente se trata de una simplificación ya que es sabido que los fenómenos fluidodinámicos, térmicos y químicos que ocurren dentro del cilindro hacen al problema tridimensional. La resolución del cilindro en cada paso de tiempo consta de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una para el balance de masa y otra para el balance de energía junto a la restricción impuesta por la ley de los gases ideales y a una funcionalidad entre la energía y los parámetros termodinámicos.

- **El modelo de las válvulas**

El modelo de las válvulas también es un modelo de dimensión nula y consiste en resolver la evolución del flujo a través de las mismas considerando relaciones algebraicas entre las variables que se encuentran en el múltiple vecino, en la válvula propiamente dicha y en el cilindro. Se lo suele clasificar dentro de los modelos denominados cuasi-estacionarios.

- **El modelo de los múltiples**

Finalmente con los valores de las variables primitivas en las uniones entre la válvula y el múltiple y las condiciones atmosféricas es posible especificar las adecuadas condiciones de contorno adecuadas para el modelo unidimensional no estacionario en cada múltiple ya desarrollado extensivamente en la segunda sección.

Modelo del cilindro

Como hemos mencionado anteriormente el modelo del cilindro se basa en determinar las variables termodinámicas del mismo (densidad, presión y temperatura) a través de un balance de masa y uno de energía, considerando como variable independiente del modelo sólo el tiempo. Esto equivale a considerar que toda la mezcla contenida dentro del cilindro está uniformemente mezclada y los sucesivos estados de equilibrio se alcanzan en forma espontánea.

Entonces, ya que $m \neq m(\mathbf{x})$, $p \neq p(\mathbf{x})$, $T \neq T(\mathbf{x})$, el *balance de masa* viene dado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{m} = \dot{m}_{\text{in}} + \dot{m}_{\text{out}} = (\rho US)_{\text{in}} - (\rho US)_{\text{out}} \quad (20)$$

donde in y out representan la porción entrante o saliente del gasto másico al cilindro proveniente del múltiple de admisión o de escape.

El signo es una convención y nosotros aquí usaremos el signo positivo para el caso de masa entrante al cilindro y negativo para el caso en que la masa salga del mismo.

Es importante notar que en condiciones normales el flujo será entrante en la carrera de admisión ($\dot{m} > 0$) y será saliente en la de escape ($\dot{m} < 0$). En ambos casos el signo de la velocidad para los tubos es positivo. No obstante en condiciones de flujo revertido (*back-flow*) el signo positivo estará asociado con un ingreso de masa del múltiple de escape, mientras que el signo negativo lo estará con la salida de gases por la válvula de admisión. En ambos casos el signo de la velocidad será negativo quedando la expresión (20) bien definida para todos los casos posibles.

El *balance de energía* en su versión conservativa es equivalente a la expresión del primer principio de la termodinámica aplicado a un sistema abierto

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{m}_{\text{in}} h_{\text{in}} + \dot{m}_{\text{out}} h_{\text{out}} - p\dot{V} + \dot{Q}_{\text{chem}} - \dot{Q}_{\text{ht}} = \\ &= (\rho US)_{\text{in}} h_{\text{in}} - (\rho US)_{\text{out}} h_{\text{out}} - p\dot{V} + \dot{Q}_{\text{chem}} - \dot{Q}_{\text{ht}} \end{aligned} \quad (21)$$

La ecuación (21) contiene:

- flujos térmicos por combustión (\dot{Q}_{chem}),
- pérdidas de calor por las paredes del cilindro (\dot{Q}_{ht}),
- trabajo mecánico sobre el pistón $p\dot{V}$,
- flujos entálpicos entrantes y/o salientes por las válvulas $\sum_j \dot{m}_j h_j$, $j = \text{in} \quad \text{out}$.

Todos estos términos contribuyen al término de acumulación de energía interna total $E = me = mC_v(T)T$.

Los flujos térmicos por combustión, la transferencia de calor por la envoltura superficial del cilindro, la potencia mecánica proporcional a la tasa de variación del volumen de los

gases encerrados en el cilindro y los flujos entálpicos proporcionales a los flujos másicos en el cilindro vienen descritos por modelos que serán presentados en las próximas secciones.

Modelo de combustión

En este trabajo la combustión se simula mediante un modelo simple que calcula la fracción de calor liberada por el combustible en cada instante de la combustión como proporcional a la tasa de combustible quemada. Este calor es entregado al modelo del cilindro e incluido en el balance de energía.

Existen muchos modelos para considerar el fenómeno de la combustión en motores térmicos. Los más simples se basan en expresiones algebraicas para la liberación de calor que asumen combustión completa y perfecta de los reactantes en productos y consideran que tanto los reactantes como los productos son una mezcla con un único calor de formación. Existen otros modelos que se basan en plantear una tasa de quemado, mediante leyes empíricas como la *ley de Wiebe* para el combustible, pero el modelo se suplementa con reacciones químicas en equilibrio. Siguiendo en complejidad se puede incluir efectos de cinética en la combustión e incluso separar la cámara de combustión en diversas zonas, de composición variada. Finalmente se puede incluso prescindir del conocimiento de la tasa de quemado e incluir su cómputo dentro del modelo.

En este trabajo usaremos el modelo más simple que consiste en asumir que el combustible entrega todo su poder calorífico ($m_f Q_f$) a una tasa temporal dada por la ley de Wiebe¹⁶

$$\begin{aligned} Q_{\text{chem}} &= m_f Q_f x_b \\ x_b &= 1 - e^{-a\left(\frac{\theta-\theta_0}{\Delta\theta}\right)^{m+1}} \\ m &= 2 \\ a &= 5 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{chem}} &= m_f Q_f \dot{x}_b = m_f Q_f \omega \frac{d}{d\theta} x_b \\ &= m_f Q_f \omega \left\{ e^{-a\left(\frac{\theta-\theta_0}{\Delta\theta}\right)^{m+1}} a(m+1) \left(\frac{\theta-\theta_0}{\Delta\theta}\right)^m \frac{1}{\Delta\theta} \right\} \end{aligned}$$

donde ω es la velocidad angular del motor expresada en s^{-1} , θ_0 y $\Delta\theta$ representan el ángulo del cigüeñal donde comienza la combustión y la duración de la misma medida en radianes y a, m son dos constantes empíricas del modelo. Los valores usados fueron sugeridos por Heywood¹⁶.

Modelo de pérdidas térmicas

Siguiendo las conclusiones del exhaustivo estudio llevado a cabo por Annand¹³ la representación de las pérdidas térmicas de carácter convectivo por una expresión del tipo

$$Nu = a(Re)^m \tag{23a}$$

cierra bastante bien con la mayoría de los resultados experimentales llevados a cabo en este tema desde 1923 en adelante. En (23a) Nu , Re representan los números adimensionales de Nusselt y Reynolds, mientras que a, m son dos constantes particulares a este modelo. Las definiciones para los números de Nusselt y Reynolds son

$$\begin{aligned} Nu &= \frac{h_c B}{k} \\ Re &= \frac{S_p B}{\nu} \end{aligned} \tag{23b}$$

donde la longitud característica B representa el diámetro del cilindro, h_c es el coeficiente pelicular de convección térmica entre las paredes del cilindro y los gases de combustión, k la conductividad térmica de los gases de combustión o la mezcla fresca, ν su viscosidad cinemática y \bar{S}_p es una velocidad característica dada por la velocidad promedio del pistón.

En su trabajo Annand utilizó varias fórmulas existentes hasta ese momento y trató de encontrar la forma de reunir en una expresión los mejores resultados que se disponían hasta entonces. El encontró que una fórmula como la (23a) acordaba bien en el caso de los motores encendidos por chispa y que en el caso de los de encendido por compresión había que sumarle una contribución por efectos de radiación, la cual finalmente quedaba como

$$Nu = a(Re)^m + cB(T^4 - T_w^4) \quad (23c)$$

siendo c otra constante y T_w la temperatura de la pared del cilindro supuesta uniforme en toda su extensión.

Los valores que Annand encontró como más robustos fueron

$$\begin{aligned} m &= 0,7 \\ a &\in [0,35; 0,8] \\ c &\simeq 1,610^{-12} && \text{Diesel} \\ c &\simeq 2,110^{-13} && \text{Otto} \end{aligned} \quad (23d)$$

Otro de los modelos que se usa frecuentemente es el debido a Woschni¹⁶ quien asume una expresión similar a la (23a) con

$$\begin{aligned} m &= 0,8 \\ a &= 0,035 \\ k &\simeq T^{0,75} \\ \mu &\simeq T^{0,62} \end{aligned} \quad (24a)$$

y una velocidad característica w que difiere de la velocidad media del pistón (\bar{S}_p) y que se define como

$$w = C_1 \bar{S}_p + C_2 \frac{V_d T_r}{p_r V_r (p - p_m)} \quad (24b)$$

donde V_d es el volumen desplazado por el pistón, el subíndice r indica un estado de referencia, digamos el cierre de la admisión o el comienzo de la combustión, y p_m es la presión que se obtendría al mismo ángulo de cigueñal si no se hubiera producido la combustión. C_1 , C_2 son dos constantes que primeramente se asignaron como

$$\begin{aligned} C_1 &= 6,18 & C_2 &= 0 & \text{admisión-escape} \\ C_1 &= 2,28 & C_2 &= 0 & \text{compresión} \\ C_1 &= 2,28 & C_2 &= 3,2410^{-3} & \text{combustión-expansión} \end{aligned} \quad (24c)$$

Posteriormente y en virtud de trabajos sobre motores de mayor régimen de vueltas se encontró que la velocidad circunferencial afectaba mucho sobre la transferencia de calor y se la incluyó en el modelo a través de una corrección de la velocidad como la siguiente

$$\begin{aligned} C_1 &= 6,18 + 0,417 \frac{v_s}{\bar{S}_p} & \text{admisión-escape} \\ C_1 &= 2,28 + 0,308 \frac{v_s}{\bar{S}_p} & \text{resto del ciclo} \end{aligned}$$

donde $v_s = B\omega_p/2$ y ω_p está relacionada con la velocidad circunferencial.

Finalmente el modelo de Woschni queda como

$$h_c [\text{W}/\text{m}^2\text{K}] = 3,26 B [\text{m}]^{-0,2} p [\text{kPa}]^{0,8} T [\text{K}]^{-0,55} w [\text{m}/\text{s}]^{0,8} \quad (24d)$$

En este trabajo hemos usado una expresión recomendada Abraham¹⁴ basada en un modelo de Woschni, pero en lugar de corregir por la velocidad circunferencial propone aumentar el coeficiente a en la expresión (23a) del valor 0,035 dado por (24a) a otro 4 veces mayor.

Con el número de Reynolds es posible calcular el Nusselt mediante (23a) y luego calcular h_c mediante la definición (23b) para finalmente calcular las pérdidas a incluir en el balance de energía (21) con

$$\dot{Q}_{\text{ht}} = A_w h_c (T - T_w) \quad (25)$$

donde A_w representa el área total del cilindro expuesta a la transferencia de calor. El área junto con otras variables geométricas del motor se calculan mediante un modelo que se detalla más adelante.

Para el cálculo del número de Reynolds y para el de Nusselt aparecen dos propiedades del medio continuo como la viscosidad y la conductividad térmica que deben ser especificadas mediante alguna ley constitutiva. En dinámica de gases a alta temperatura se sabe que ambas son función de la temperatura y la presión pero que la primera es la que más influye. En este trabajo hemos usado un modelo para la viscosidad como el siguiente

$$\mu(T) = \frac{a_1 T^{3/2}}{a_2 + T} [\text{Ps}^{-1}] \quad (26a)$$

con $a_1 = 1,457 \times 10^{-6}$ y $a_2 = 110$. Estas constantes correlacionan bien con la expresión dada por Heywood¹⁶

$$\mu_{\text{air}} [\text{kg}/(\text{ms})] = 3,3 \cdot 10^{-7} T^{0,7} \quad (26b)$$

donde T se expresa en °K.

La conductividad térmica se puede calcular a partir de la viscosidad, el número de Prandtl y el calor específico, siendo el número de Prandtl de los gases aproximadamente constante ($Pr \simeq 0,72$). El calor específico es una función fuertemente dependiente de la temperatura y la composición química. Para este trabajo asumimos tanto a la mezcla fresca como a los gases como una mezcla uniforme y de composición fija, considerando sólo la variación del calor específico con la temperatura mediante la siguiente expresión

$$\frac{C_p}{R_{\text{gas}}} = \sum_{j=0}^4 c_j T^j \quad (27)$$

con los valores de c_j dados en la siguiente tabla

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
$T < 1000$	3,6748	-1,2082e-3	2,3240e-6	-6,3218e-10	-2,2577e-13
$T \geq 1000$	2,8963	1,5155e-3	-5,7235e-7	9,9807e-11	-6,5224e-15

Tabla III

considerando que la mezcla es básicamente nitrógeno gaseoso¹⁶.

Cálculo del modelo geométrico del cilindro

Como hemos visto anteriormente las ecuaciones de balance de masa y energía del cilindro y el modelo de pérdidas térmicas necesitan información acerca de la geometría del motor y su variación con la posición del ángulo del cigüeñal.

Figura 12. Esquema geométrico del motor

Para ello consideremos un esquema del motor como el de la Figura 12 donde V es el volumen o cilindrada del motor, V_c e el volumen nocivo del cilindro, B el diámetro del cilindro, l la longitud de la biela, a el radio del cigüeñal, A_{ch} el área de la cabeza del cilindro, A_p el área de la superficie del pistón en contacto con los gases y ω la velocidad de rotación del motor.

Entonces la *carrera del pistón* viene dada por la siguiente expresión

$$s = a \cos(\theta) + \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2(\theta)} \quad (28a)$$

el volumen del motor se expresa como

$$V = V_c + \frac{\pi B^2}{4}(l + a - s) \quad (28b)$$

y el área de intercambio térmico del cilindro por

$$A = A_{ch} + A_p + \pi B(l + a - s) \quad (28c)$$

También son necesarias la tasa de variación de la carrera y el volumen con el ángulo del cigüeñal

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\theta} &= - \left[a \sin(\theta) + a^2 \sin(2\theta) / 2 / \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2(\theta)} \right] \\ \frac{dV}{dt} &= -\omega \frac{2\pi}{60} \frac{\pi B^2}{4} \frac{ds}{d\theta} \end{aligned} \quad (28d - e)$$

Modelo matemático de las válvulas de admisión y escape

Para poder especificar las condiciones de contorno del flujo en los múltiples de admisión y de escape y para poder calcular el flujo másico y entálpico neto al cilindro se requiere el estudio del flujo de gases a través de las correspondientes válvulas.

A los fines prácticos una válvula puede considerarse como un dispositivo que conecta el cilindro con el múltiple y que equivale a una especie de contracción del flujo desde el cilindro hasta la garganta y una posterior expansión desde la zona del asiento de la misma pasando por un tubo de sección variable hasta llegar al múltiple.

La Figura 13 muestra un esquema de la misma y la Figura 14 los correspondientes diagramas termodinámicos asociados a las transformaciones que en ellas ocurren. A pesar de lo mucho que se ha investigado sobre este tópico, fue el trabajo pionero de Jenny¹⁷ quien aportó las mayores contribuciones a todo lo que se vino desarrollando en este tema. Jenny sugirió tres tipos posibles de modelos para simular el paso de fluido desde el cilindro a los múltiples o viceversa. Ellos son:

- modelo de presión constante - motor de 4 tiempos,
- modelo de caída de presión - motor de 2 tiempos.

Estos modelos aportan un conjunto de ecuaciones que vinculan o acoplan los modelos del cilindro con los de los múltiples. El modelo a presión constante ha sido elegido en este trabajo debido a que nos interesan los motores de cuatro tiempos.

Figura 13. Válvula-geometría y reglaje

Benson¹⁵ extendió las ecuaciones que modelan el flujo homentrópico a través de una válvula para el caso no homentrópico. En el primero el flujo queda completamente determinado por los dos invariantes de Riemann (constantes a lo largo de las características), mientras que en el segundo la entropía cambia y altera el valor de las variables de Riemann dejando de ser invariantes y agregando como nueva incógnita al modelo la mencionada variación de la entropía.

Este modelo es aplicable al caso de flujo saliendo del cilindro a través de una válvula ya sea de escape o de admisión según si se trata de una operación en condiciones normales o

Figura 14. Diagrama termodinámico. Flujo a través de una válvula

una con flujo revertido *backflow*. En resumen el modelo del flujo a través de las válvulas permite hallar valores para las variables primitivas (densidad, velocidad y presión) que sirven como condiciones de contorno al modelo de dinámica de gases en los múltiples descrito en secciones anteriores y a su vez permite determinar el flujo másico a través de las válvulas necesario para el modelo del cilindro. Detalles del modelo pueden encontrarse en los trabajos de Benson¹⁵ y Nigro *et al.*⁸.

Modelo matemático de los múltiples de admisión y escape

Como hemos mencionado en las primeras secciones los múltiples fueron modelados con las ecuaciones de Euler para flujo unidimensional no estacionario incluyendo fricción, transferencia de calor y cambios de sección. Básicamente el modelo consiste de las ecuaciones (5a) y (5b) con las condiciones de contorno aportadas por los modelos de las válvulas en un extremo y las condiciones atmosféricas en el otro.

Discretización numérica del cilindro

Para completar la exposición acerca de la discretización numérica de los modelos empleados aquí presentamos su aplicación al caso del modelo termodinámico del cilindro. En este trabajo la discretización temporal o integración temporal de las ecuaciones (20) y (21) se realiza mediante un esquema del tipo diferencias hacia adelante de primer orden.

$$\begin{aligned} m^{n+1} &= m^n + \delta t \dot{m} \\ \rho_c^{n+1} &= m^{n+1}/V(\theta^{n+1}) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} E^{n+1} &= E^n + \delta t \dot{E} = \\ \dot{H}_{in} + \dot{H}_{out} - p^n \dot{V}(\theta^{n+1}) + \dot{Q}_{chem}(\theta^n) - \dot{Q}_{ht}(\theta^n, T_c^n, p_c^n, \rho_c^n) \\ T_c^{n+1} &= \frac{E^{n+1}}{m^{n+1} C_v(T^n)} \\ p_c^{n+1} &= R_{gas} \rho_c^{n+1} T_c^{n+1} \end{aligned} \quad (31)$$

Parámetros de operación de un motor

En esta sección resumimos algunos de los parámetros comúnmente usados para caracterizar un motor de combustión interna. Los factores más importantes para un diseñador y usuario de un motor son:

- las curvas características (potencia, momento torsor y eficiencia global),
- el rendimiento volumétrico,
- el consumo específico de combustible,
- el ruido y la emisión de poluentes dentro del rango de operación,
- el costo de la instalación y la durabilidad del motor.

En este trabajo hacemos hincapié en los dos primeros aspectos, buscando el trazado del ciclo, las curvas características y la estimación del rendimiento volumétrico.

Potencia y momento torsor

Se miden comúnmente con un dinamómetro en el banco de ensayos. La relación entre ambos viene dada por la siguiente expresión

$$P[\text{hp}] = \frac{N[\text{rpm}]T[\text{lb} \cdot \text{pie}]}{5252} \quad (32)$$

Esta potencia es llamada *potencia al freno*.

Trabajo del ciclo indicado

Este parámetro se mide integrando el ciclo indicado representado por la relación presión-volumen y su expresión es la siguiente

$$W_{c,i} = \oint p dV \quad (33)$$

La relación entre la potencia indicada y el trabajo indicado por ciclo viene dada por

$$P_i = \frac{W_{c,i}N}{n_R} \quad (34)$$

donde $n_R = 2$ para motores de cuatro tiempos y $n_R = 1$ para motores de dos tiempos.

La diferencia entre la potencia al freno y la indicada se la lleva la fricción (P_f) de los distintos componentes de la instalación.

Eficiencia mecánica

En general la eficiencia mecánica viene dada por

$$\eta_m = 1 - \frac{P_f}{P_i} \quad (35)$$

En un análisis como el que plantea este trabajo, la eficiencia es imposible de medir, ya que no contamos con la información de las pérdidas por fricción que se llevan los accesorios de la instalación.

Presión media efectiva

Esta se define como la potencia útil de un motor relativa a su tamaño. La potencia en sí es una propiedad extensiva de la máquina. A veces es muy útil tener una idea de la correspondiente propiedad intensiva

$$p_{me} = \frac{P n_R}{V_d N} \quad (36)$$

La potencia que se usa en los cálculos puede ser la de freno o la indicada en cuyo caso da origen a dos presiones medias. Valores típicos en motores de 4 tiempos naturalmente aspirados dan entre 850 a 1050 kPa para regímenes correspondientes al máximo momento torsor (aprox. 3000 rpm), mientras que a la máxima potencia se alcanzan valores un 10 a 15 % más bajos.

Rendimiento volumétrico

Este es quizás el más importante junto con las curvas características de potencia y momento torsor, ya que el objetivo de nuestro trabajo está centrado en estudiar la influencia del sistema de admisión y escape sobre él mismo. Conceptualmente este indicador nos dice cuanto es capaz de aspirar un motor respecto al valor máximo teórico. Este último viene dado por la cantidad de aire en condiciones ambientales que podrían llenar el volumen del cilindro. Es sabido que por la dinámica propia de los gases un motor no es capaz de aspirar la cantidad teórica y que esto varía incluso con muchos parámetros. La definición que usaremos aquí viene dada por

$$\eta_v = \frac{m_a}{\rho_{a,i} V_d} \quad (37)$$

donde $\rho_{a,i}$ es la densidad del aire en las condiciones ambientales, mientras que m_a es la masa realmente aspirada por el motor, calculada como integración a lo largo de la carrera de admisión. Valores máximos típicos rondan entre el 80 y el 90 % en el caso de motores naturalmente aspirados.

Ejemplo numérico test

En esta sección incluimos detalles del experimento numérico realizado que sirve como para mostrar las potencialidades del código desarrollado. En principio presentamos el motor ensayado, luego incluimos los resultados alcanzados para distintos regímenes de vueltas del motor y finalmente el trazado de las curvas características del mismo.

Datos del motor ensayado

El motor ensayado, del tipo monocilíndrico, de cuatro tiempos, a ciclo Otto (encendido por chispa), viene especificado por una serie de datos geométricos y de operación no sólo del cilindro en sí, sino también de los múltiples y las válvulas de admisión y escape.

En las siguientes tablas se presentan las características del motor ensayado.

Característica	Valor	Unidad
Número de nodos	31	
Longitud	0,7	mts
Diámetro	0,05	mts
Temperatura tubo	40	°C

Tabla IV.1. Múltiple de admisión

Característica	Valor	Unidad
Número de nodos	41	
Longitud	3,3	mts
Diámetro	0,0036	mts
Temperatura tubo	8'0	°C

Tabla IV.2. Múltiple de escape

Característica	Valor	Unidad
Diámetro	96,8	mm
Carrera	86	mm
Cilindrada	632,9	cm ³
Volumen nocivo	83,28	cm ³
Relación compresión	8,6 : 1	
Largo de biela	150	mm
Avance encendido	30	°
Duración combustión	60	°
Relación aire/combustible	14,6	
Poder calorífico combustible	44	MJ/kg
Tipo de combustible	C_8H_{18}	
Temperatura cilindro	200	°C

Tabla IV.3. Cilindro

Característica	Valor	Unidad
Diámetro	47,4	mm
Avance apertura	10	°C
Retardo cierre	10	°C
Máxima longitud paso	11,85	mm

Tabla IV.4. Válvula de admisión

Característica	Valor	Unidad
Diámetro	47,4	mm
Avance apertura	10	°C
Retardo cierre	10	°C
Máxima longitud paso	10,2	mm

Tabla IV.5. Válvula de escape

Característica	Valor	Unidad
Constante gases	287	J/kg /°C
Densidad aire atm.	1,184	kg/m ³
Presión atmosférica	1,013310 ⁵	N/m ²

Tabla IV.6. Válvula de escape

Resultados numéricos

Se efectuaron diversas corridas sobre el motor propuesto, cada una de ellas correspondiendo a un determinado régimen de vueltas. Comenzando desde 1000 rpm cada 500 rpm hasta 7000 rpm. Con ellas fue posible trazar las curvas características de potencia, momento torsor y eficiencia volumétrica.

La Figura 15 presenta en el gráfico de la izquierda un ciclo típico obtenido por medio del software desarrollado y a la derecha en la figura inferior un detalle de la zona de bombeo para un régimen de 1000 rpm, mientras que la figura superior derecha nos muestra la convergencia en iteraciones del modelo. Se puede concluir que en aproximadamente 3 a 5 ciclos se alcanza un estado periódico.

Figura 15. Ciclo indicado-convergencia y detalle zona de bombeo

Finalmente las Figuras 16a-c muestran las curvas características obtenidas con el motor ensayado. Los círculos representan los valores obtenidos con el modelo numérico desarrollado y las otras curvas representan ajustes por cuadrados mínimos de diversos órdenes. La Figura 16a muestra el caso de la potencia ajustada por un polinomio de orden 2,3,4 y 5. Como vemos tiene una tendencia creciente hasta alcanzar un pico a altas vueltas y luego decrece fuertemente. La Figura 16b hace lo propio con el momento torsor. Este presenta un pico a menor régimen de vueltas y luego decae. Finalmente la Figura 16c muestra el rendimiento volumétrico que como es sabido presenta zonas de picos y valles correspondientes a distintas resonancias del motor. Aparentemente cerca de 2000 rpm y de 5000 rpm existen puntos de operación muy poco eficientes en cuanto a la aspiración del motor, mientras que a alrededor de 3500 y 6000 rpm se producen los picos de máxima eficiencia.

Figura 16a. Curvas características. Potencia vs rpm

Figura 16b. Curvas características. Torque vs rpm

Figura 16c. Curvas características. Rendimiento volumétrico vs rpm

CONCLUSIONES

A lo largo de la primera parte de este trabajo hemos mostrado varios ejemplos asociados al flujo de gases en ductos y toberas tanto en cuanto a su resolución analítica como numérica. El excelente acuerdo entre ambos hace suponer que el código computacional desarrollado se encuentra validado y puede ser utilizado en la siguiente parte del proyecto con total confiabilidad tanto en régimen subsónico como en los casos límites con velocidades muy chicas o superiores a la del sonido. Además hemos confirmado la buena resolución de las discontinuidades presentes en problemas transónicos tanto estacionarios como no estacionarios.

La segunda parte de este trabajo presenta un modelo numérico capaz de integrar los efectos dinámicos de los gases que circulan por la admisión y el escape con los procesos termodinámicos que aparecen en la operación propia de un cilindro de un motor de combustión interna. El objetivo estuvo centrado en trazar las curvas características para una determinada configuración del motor y estudiar fundamentalmente el problema de la aspiración natural de los motores. Este fenómeno caracterizado por el rendimiento volumétrico está fuertemente influido por el diseño del escape y la admisión de modo que un estudio de la interacción cilindro-válvula-múltiples es de vital importancia para poder obtener resultados en tal sentido.

Con este desarrollo se abren otras posibilidades que se podrían resumir en:

- estudio multiparamétrico del rendimiento volumétrico,
- incorporación de otros accesorios al modelo (carburador, filtros, silenciadores, etc.),
- extensión al caso multicilíndrico,
- inclusión de la termoquímica para modelar mejor las carreras de combustión, expansión y escape y permitir un estudio de emisión de poluentes.

REFERENCIAS

- 1 R. Benson, “*The thermodynamics and gas dynamics of internal combustion engines*”, Vol. I, Clarendon Press, Oxford, (1982).
- 2 A. Brooks y T. Hughes, “Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **32**, pp. 199–259, (1982).
- 3 C. Hirsch, “*Numerical computation of internal and external flows*”, John Wiley & Sons, (1989).
- 4 T. Hughes y M. Mallet, “A new finite element method for CFD: III. The generalized streamline operator for multidimensional advection-diffusion systems”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **58**, pp. 305–328, (1986).
- 5 M. Mallet, “A finite element method for CDF”, Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, Stranford University, California, EEUU, (1985).
- 6 N. Nigro, “Resolución por elementos finitos de problemas de mecánica de fluidos”, Tesis doctoral, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, (1993) .
- 7 N. Nigro, “Dinámica de gases computacional en ductos y toberas”, Informe interno 0796 del Grupo de Tecnología Mecánica del Intec, Santa Fe, Argentina, (1996) .
- 8 N. Nigro, A. Storti y L. Ambroggi, “Modelación numérica de un motor de combustión interna monocilíndrico. Influencia de la admisión y el escape sobre el rendimiento volumétrico”, Informe interno 0896 del Grupo de Tecnología Mecánica del Intec, Santa Fe, Argentina, (1996).
- 9 R. Peyret y T. Taylor, “*Computational methods for fluid flow*”, Springer Verlag, (1983).
- 10 F. Shakib, “Finite element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations”, Department of Civil Engineering, Stranford University, California, EEUU, (1983).
- 11 M. Storti, “Modelización numérica de problemas de frontera libre y móvil”, Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, (1990).
- 12 O.C. Zienkiewicz, “*El método de los elementos finitos*”, Reverté, Barcelona, España, (1980).
- 13 W. Annand, “Heat transfer in the cylinders of reciprocating internal combustion engines “, *Proc. Instn. Mech. Engng.*, Vol. **177**, pp. 973–980, (1963).
- 14 J. Abraham, “Course of simulation in internal combustion engines”, Mechanical Engineering Department at University of Minnesota, (1994).
- 15 R. Benson, “*The thermodynamics and gas dynamics of internal combustion engines*”, Vol I, Clarendon Press, Oxford, (1982).
- 16 J. Heywood, “*Internal combustion engine. Fundamentals*”, McGraw Hill, Inc., (1988).
- 17 E. Jenny, “Berechnungen und Modellversuche über Druckenwellen grosser Amplituden in Auspuffleitungen”, ETHZ Thesis, (1949).