

# Integración de tensiones en secciones de hormigón sometidas a flexocompresión esviada

Pedro F. Miguel Sosa, José Luis Bonet Senach y Miguel A. Fernández Prada

Departamento de Ingeniería de Construcción y Proyectos de Ingeniería  
Universidad Politécnica de Valencia, Apartado 22012  
Camino de Vera, s/n, 46022 Valencia, España  
Tel.: 34-96-387 7560, Fax: 34-96-387 7569  
e-mail: jlbonet@cst.upv.es

## Resumen

En el presente artículo se describe un método numérico para la integración de las tensiones en las zonas no fisuradas de secciones de hormigón de forma cualquiera, sometidas a esfuerzos axiales y de flexión esviada. Dicha integración se lleva a cabo mediante un algoritmo automático que subdivide la zona no fisurada en un pequeño número de áreas cuadrangulares e integra las tensiones en cada una de ellas mediante cuadratura de Gauss.

Este método se ha aplicado a diferentes tipos de secciones, variando sistemáticamente la profundidad e inclinación de la fibra neutra. Estos resultados se comparan con los obtenidos mediante la integración de las mismas secciones a partir de la conocida técnica de subdivisión en celdillas. Dichas comparaciones se establecen desde el punto de vista de precisión de los resultados y rapidez en la ejecución.

## STRESS INTEGRATION IN CONCRETE SECTIONS SUBJECTED TO AXIAL FORCES AND BIAXIAL BENDING

## Summary

A numerical method for stress integration in non-cracked zones of concrete cross-sections is presented in this paper. These sections can be of arbitrary shape and they are subjected to axial forces and biaxial bending. The integration is performed through an automatic algorithm by dividing the non-cracked zones in a small number of quadrangular areas and by applying the Gauss quadrature to each one of these areas.

Different types of usual sections have been solved with this method, by varying the depth and inclination of the neutral axis systematically. The results are compared with the ones obtained by the well-known integration method that uses a discrete number of concrete areas. These comparisons are established in terms of accuracy and running time.

## INTRODUCCIÓN

Los programas de análisis no lineal de estructuras de barras de hormigón y principalmente los que utilizan el método de los elementos finitos (MEF) requieren el cálculo de esfuerzos mediante la integración de tensiones en las secciones transversales. Esta operación es realizada por estos programas un gran número de veces, por lo que su optimización lleva consigo una reducción muy notable del tiempo total de ejecución empleado, en general, por los programas de análisis no lineal.

Habitualmente, la integración de las tensiones en una sección transversal se lleva a cabo numéricamente dividiendo dicha sección en bandas o en celdillas.

La técnica de división de la sección en bandas se utiliza en situaciones de flexión recta, dividiendo la sección en bandas de espesor constante paralelas al eje de flexión, siendo este espesor diferencial mayor o menor según la precisión deseada. Todos los puntos situados en una banda tienen por tanto la misma deformación y la misma tensión. Este procedimiento resulta muy eficaz numéricamente fundamentalmente por dos motivos: por un lado, no se precisa una gran cantidad de información para caracterizar la sección y, por otro lado, es suficientemente rápido para grados de error razonables. Alternativamente, puede dividirse la sección en un menor número de bandas de mayor espesor y llevar a cabo una integración numérica basada en el método de Chebishev en cada banda<sup>1</sup>.

No obstante, la técnica de división en bandas de la sección no es operativa en los casos de flexión esviada. En estas situaciones suele ser habitual dividir la sección en una malla más o menos densa de celdillas, cada una de las cuales caracteriza un área reducida de la sección en la cual se asume que la tensión es constante. Desde un punto de vista numérico, esta técnica no resulta muy eficiente, pues necesita un gran volumen de información para caracterizar la sección y un gran número de operaciones para llevar a cabo la integración de tensiones con un grado de error razonable. Estos problemas cobran especial importancia en el caso del análisis no lineal de estructuras de hormigón, puesto que afectan a todas las secciones en las que se discretiza la estructura y se encuentra en el interior de todos los procesos iterativos que se llevan a cabo en el análisis estructural, tanto para el cálculo de esfuerzos como para la obtención de la matriz de rigidez de la sección, por lo que un ahorro de tiempo en el proceso de integración sin perder el grado de precisión necesario para poder cumplir los criterios de convergencia puede suponer un importante ahorro en el tiempo global del análisis.

Otro problema que puede suscitarse cuando se utiliza el método de integración mediante celdillas se debe a la ausencia de una exacta adaptación de la cuadrícula de la malla de celdillas a la superficie de la sección sobre la que hay que efectuar la integración de tensiones (superficie de integración). Cuando la posición de la fibra neutra de la sección no es conocida, hay que proceder por iteraciones variando su posición hasta alcanzar el equilibrio entre los esfuerzos internos calculados mediante integración de las tensiones en las celdillas y los esfuerzos exteriores. En estas condiciones la convergencia del proceso iterativo para determinar la posición de la fibra neutra no está asegurada, puesto que la variación de los esfuerzos internos de la sección es discreta y los saltos que se producen en el valor de un determinado esfuerzo para posiciones próximas de la fibra neutra son función del mayor o menor tamaño de las celdillas empleadas. Dicha convergencia dependerá del grado de error exigido y de la densidad de la malla empleada.

En este artículo se plantea un algoritmo numérico alternativo basado en la cuadratura de Gauss-Legendre para el cálculo de secciones de hormigón en flexión esviada que permite a la vez una gran precisión y una gran velocidad de cálculo.

## OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

En este artículo se presenta un método general para el cálculo de secciones de hormigón armado y pretensado de cualquier forma geométrica (incluyendo huecos). Este método es aplicable a secciones sometidas a esfuerzos combinados de flexión esviada y axil, para cualquier nivel de sollicitación, desde servicio hasta rotura.

El método propuesto, que utiliza una integración numérica basada en la cuadratura de Gauss-Legendre, resulta especialmente eficaz cuando se incorpora a modelos de análisis no lineal de estructuras de hormigón y especialmente útil en el caso de secciones sometidas a flexión esviada por la sencillez de su planteamiento, rapidez y precisión.

En este trabajo se explican los fundamentos del método propuesto y se analizan diferentes tipos de secciones sometidas a diferentes situaciones de carga. Los resultados obtenidos

mediante el método propuesto se comparan, tanto en cuanto a rapidez como en precisión, con los que resultan de utilizar el método de subdivisión en celdillas.

## DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

El método que se propone integra las tensiones que se producen en cualquier sección de hormigón sometida a esfuerzos axiales y/o de flexión recta o esviada. En el caso de secciones poligonales, el contorno que define la superficie sobre la que hay que integrar las tensiones de la sección es un polígono de  $n$  lados (zona no fisurada de la Figura 1). En el caso de secciones delimitadas por contornos curvos, dichos contornos deben ser asimilados a polígonos para ser analizadas mediante el método propuesto.

La sistemática que se emplea en el método propuesto consiste en dos fases diferenciadas: la primera, la descomposición de la zona no fisurada en una serie de cuadriláteros o triángulos (Figura 1); la segunda, la integración de tensiones en cada uno de éstos.

Cuando la función de integración está definida por curvas que no se aproximan adecuadamente en todo su rango a una misma función polinómica, resulta conveniente descomponer la zona no fisurada en bandas para obtener una mejor precisión en los resultados de forma más eficiente. A este procedimiento de descomposición de la zona no fisurada en bandas se les denominará en adelante “procedimiento de las bandas anchas”.

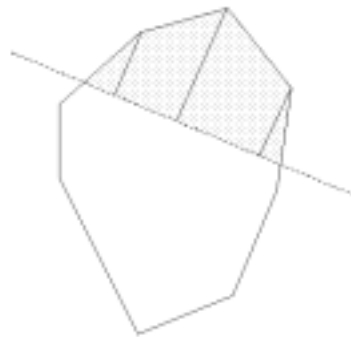


Figura 1. Zona no fisurada

### Descomposición de la zona no fisurada en cuadriláteros

Para una sección cualquiera, la zona no fisurada del hormigón es un polígono de  $n$  lados (Figura 2). Este polígono se subdivide en cuadriláteros para poder realizar en cada uno de ellos la integración de tensiones por el método de la cuadratura de Gauss-Legendre de la manera que se expondrá en el siguiente apartado.

La subdivisión en cuadriláteros se realiza de forma sistemática siguiendo los estos pasos:

- Para una posición e inclinación cualquiera de la fibra más traccionada (que determina una línea que se denominará en adelante “línea de referencia”) se obtienen los puntos de corte de esta con el contorno de la sección (Figura 3a).
- Se identifican los vértices del polígono que constituye el contorno de la zona no fisurada del hormigón (Figura 3b).
- Se determinan los puntos correspondientes a la proyección normal de cada uno de los vértices de la zona no fisurada sobre la línea de referencia (Figura 3c).
- Se descompone la zona no fisurada en los cuadriláteros o triángulos formados por cada dos vértices consecutivos y sus proyecciones (Figura 3d). De esta forma se obtienen cuadriláteros y triángulos de “área positiva” o de “área negativa” según queden en el interior o no de la zona no fisurada (Figura 3e).

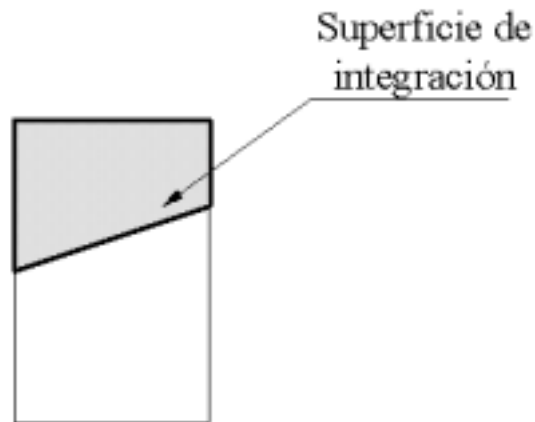


Figura 2. Superficie de integración

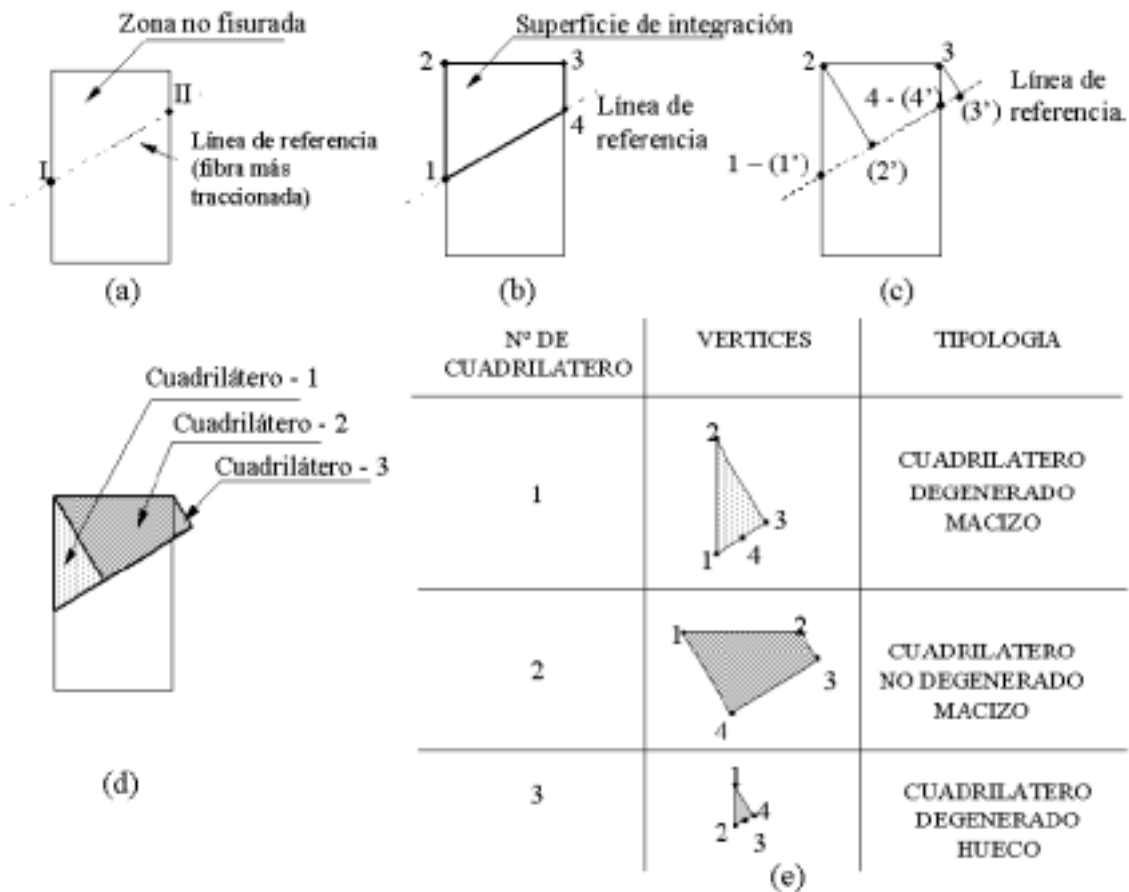
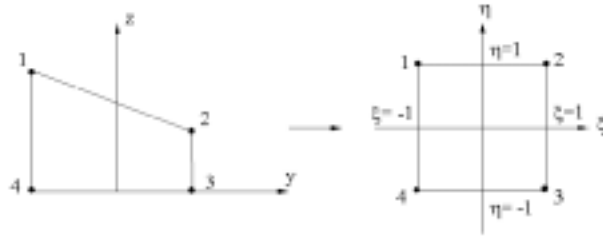


Figura 3. a) Puntos de corte de la línea de referencia; b) Vértices que definen el polígono de  $n$  lados sobre la línea de referencia; c) Proyección de los vértices del polígono de  $n$  lados sobre la línea de referencia; c) Determinación de los cuadriláteros en que se subdivide el polígono; e) Numeración de los vértices de cada cuadrilátero



**Figura 4.** Cambio de coordenadas cartesianas curvilíneas

### Evaluación de las tensiones en los cuadriláteros

Para llevar a cabo la integración de tensiones en un cuadrilátero cualquiera se utiliza el conocido método de Gauss-Legendre<sup>2</sup>. Para ello, cada uno de los cuadriláteros en que se descompone la zona no fisurada se transforma en un cuadrado de  $2 \times 2$  unidades de lado, mediante el conocido cambio de coordenadas cartesianas  $(y, z)$  a coordenadas curvilíneas<sup>3,4</sup>  $(\xi, \eta)$ , que se representa en la Figura 4.

$$\begin{aligned} y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \\ z &= N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 + N_4 z_4 \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  y  $N_4$  son las funciones siguientes

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \end{aligned} \quad (2)$$

Los esfuerzos internos correspondientes al cuadrilátero se obtienen por integración de las tensiones que actúan en su superficie

$$\begin{aligned} N_c &= \iint_{A_c} \sigma_c(y, z) dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_1(\xi, \eta) \det[J] d\xi d\eta \\ M_{cy} &= \iint_{A_c} \sigma_c(y, z) z dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_2(\xi, \eta) \det[J] d\xi d\eta \\ M_{cz} &= \iint_{A_c} \sigma_c(y, z) y dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_3(\xi, \eta) \det[J] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3)$$

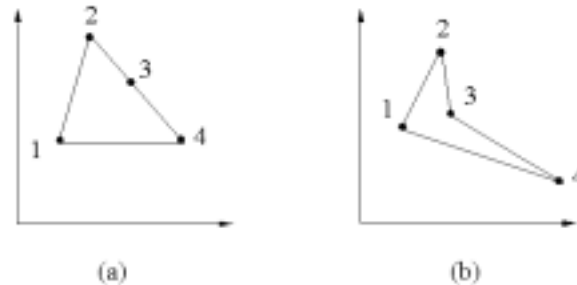
Siendo  $A_c$  el área del cuadrilátero y  $\sigma_c$  la tensión del hormigón en cada punto  $(y, z)$ .

La evaluación numérica de la integral se realiza por el método de la cuadratura de Gauss<sup>3</sup>

$$\iint f_k(\xi, \eta) \det[J] d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_i k_j \det[J] f_k(\xi_i, \eta_j) \quad (4)$$

donde  $k_i$  y  $k_j$  son los pesos asociados a los puntos de Gauss,  $(\xi_i, \eta_j)$  los valores de las coordenadas curvilíneas en los puntos de Gauss,  $n$  el número de puntos de Gauss y  $\det[J]$  el determinante jacobiano de la transformación de coordenadas.

La evaluación de esta integral<sup>3</sup> es válida tanto para cuadriláteros convexos como para triángulos, considerando a éstos como cuadriláteros degenerados con cuatro vértices distintos en los que tres de ellos están alineados sobre una misma recta (Figura 5a). La sistemática seguida para la descomposición de la zona no fisurada en cuadriláteros y triángulos asegura que no se generan cuadriláteros cóncavos como el de la Figura 5b.



**Figura 5.** a) Cuadrilátero degenerado en triángulo; b) Cuadrilátero cóncavo (no válido)

El signo del determinante jacobiano determina si el cuadrilátero es macizo o hueco. Para ello basta con numerar los vértices del cuadrilátero en sentido horario (signo positivo) o antihorario (signo negativo). El método propuesto realiza esta operación de numeración de los vértices de forma totalmente automática en cada caso (Figura 3e).

### Evaluación de los esfuerzos internos de la zona no fisurada

Los esfuerzos de la zona no fisurada se obtienen como suma de cada uno de los esfuerzos que actúan sobre los cuadriláteros en que se descompone la misma

$$\begin{aligned}
 N_c &\cong \sum_{i=1}^{n_c} N_{c,i} \\
 M_{cy} &\cong \sum_{i=1}^{n_c} M_{cy,i} \\
 M_{cz} &\cong \sum_{i=1}^{n_c} M_{cz,i}
 \end{aligned} \tag{5}$$

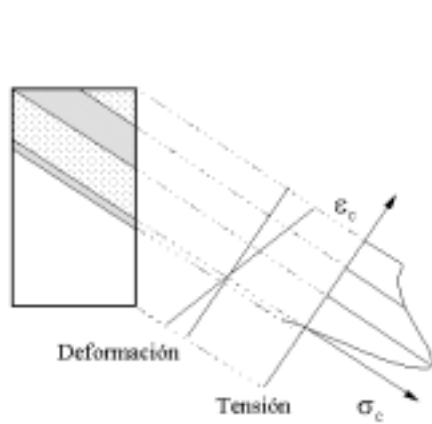
donde  $N_{c,i}$ ,  $M_{cy,i}$  y  $M_{cz,i}$  son los esfuerzos internos obtenidos en el cuadrilátero  $i$  de acuerdo con las ecuaciones (3) y (4) y  $n_c$  es el número de cuadriláteros en que se subdivide el polígono.

### Integración de las tensiones mediante “bandas anchas”

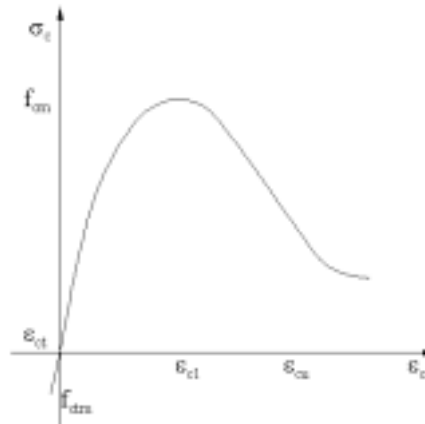
La precisión de las integrales llevadas a cabo en cada uno de los cuadriláteros depende esencialmente del número de puntos de Gauss empleados y de la forma de la función empleada para representar la relación tensión-deformación del hormigón.

Cuando la función a integrar no se ajusta sensiblemente a un polinomio de pequeño orden, o está definida por tramos, sería necesario utilizar un gran número de puntos de Gauss para obtener una precisión aceptable. En estos casos es preferible subdividir la zona no fisurada en subzonas o “bandas anchas” paralelas a línea de referencia (Figura 6) y aplicar el método propuesto a cada una de estas bandas por separado. Si dichas bandas son elegidas adecuadamente, teniendo en cuenta la forma de la función a integrar, se consigue una gran precisión en la integración numérica con un reducido número de puntos de Gauss.

Así, por ejemplo, la aplicación de este método a una típica relación tensión-deformación para el hormigón (Figura 7) podría realizarse mediante la definición de cuatro bandas tal como se indica en la Figura 6.



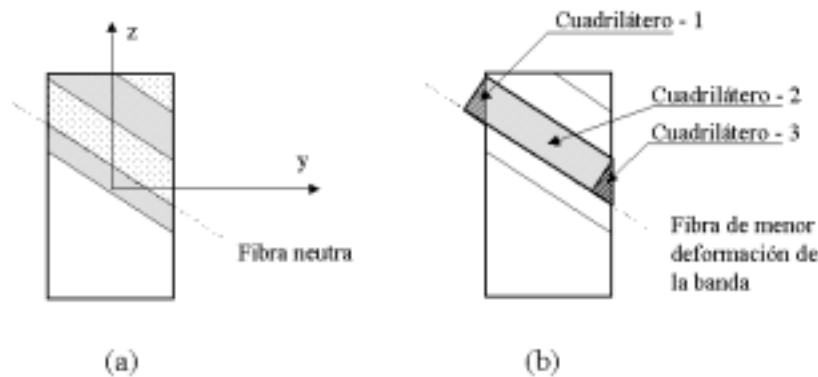
**Figura 6.** Integración por bandas anchas



**Figura 7.** Relación tensión-deformación del hormigón

El esfuerzo de cálculo necesario para la descomposición en bandas de la zona no fisurada resulta ampliamente compensado por la importante reducción del número de puntos de Gauss necesario para obtener una integral suficientemente precisa.

Cada una de estas bandas configura un polígono de  $n$  lados al cual puede ser aplicada la técnica descrita en los apartados anteriores. Para ello basta utilizar como línea de referencia, para proyectar los diferentes vértices que definen el contorno de cada una de las bandas, la línea definida por los puntos de menor deformación de la banda (Figura 8).



**Figura 8.** a) Subdivisión en bandas; b) Integración de una banda

En definitiva, los esfuerzos internos producidos por las tensiones en la zona no fisurada de hormigón pueden obtenerse sumando los de cada banda, los cuales a su vez se obtienen por suma de los cuadriláteros en que se descomponen estas bandas, de acuerdo con el método expuesto en el apartado primero.

Definido de esta manera el procedimiento de integración, quedará a juicio del usuario la adecuada combinación de la subdivisión en bandas y el uso de mayor o menor número de puntos de Gauss, en función esencialmente del modelo constitutivo y de la precisión requerida.

## APLICACIÓN DEL MÉTODO

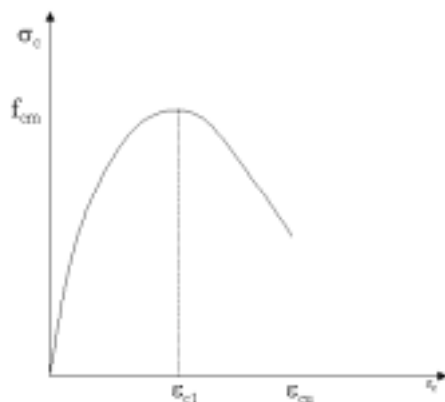
El método descrito anteriormente se ha utilizado para llevar a cabo la integración de tensiones en la zona no fisurada de hormigón en seis tipos de secciones diferentes, variando en cada una de ellas la profundidad e inclinación de la fibra neutra. Estos mismos casos se han resuelto también utilizando la técnica clásica de subdividir la sección en celdillas. La comparación entre uno y otro procedimiento se ha efectuado en función del tiempo empleado y de la precisión obtenida en los resultados.

Para las diferentes comparaciones que se realizan en este apartado, se considera como solución “exacta” la que corresponde a la aplicación del método propuesto con una malla de  $48 \times 48$  puntos de Gauss en cada uno de los cuadriláteros de integración.

En todos los casos se ha empleado un hormigón de resistencia característica 25 MPa (C25). Se ha impuesto que la fibra más comprimida de la sección tiene una deformación de 3,5 por mil y se han considerado que el hormigón no resiste tracciones, es decir, la línea de referencia coincide con la fibra neutra de la sección. La relación tensión-deformación ( $\sigma_c - \varepsilon_c$ ) que se ha utilizado es la recomendada por el Código Modelo<sup>5</sup> (Figura 9).

$$\sigma_c = \frac{k \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right) - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2}{1 + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} (k - 2)} f_c \quad (6)$$

donde  $k = E_{ci}/E_{c1}$ , siendo  $E_{ci}$  y  $E_{c1}$  los módulos de deformación tangente y secante (correspondiente a la tensión máxima  $f_c$ ) y  $\varepsilon_{c1} = 0,0022$  la deformación correspondiente a la tensión máxima  $f_c$ .



**Figura 9.** Relación tensión-deformación de Sargin

En la aplicación del método propuesto se ha utilizado siempre la división en “bandas anchas” de la zona comprimida de hormigón. Se han definido dos bandas: la primera delimitada por la fibra neutra y la deformación correspondiente a la tensión máxima  $\varepsilon_{c1}$  y la segunda desde esta última hasta la deformación máxima de rotura  $\varepsilon_{cu}$  (Figura 10).

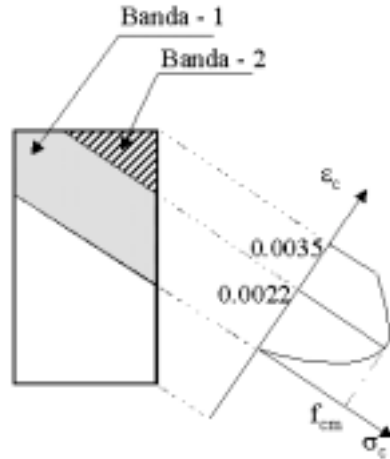
Para llevar a cabo la integración gaussiana se han utilizado mallas de puntos de Gauss formadas por  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$ ,  $6 \times 6$ ,  $8 \times 8$ ,  $10 \times 10$ ,  $12 \times 12$  ó  $15 \times 15$  en cada uno de los cuadriláteros en los que se subdivide la superficie de integración.

Para la integración mediante celdillas se han utilizado mallas con un número variable de celdillas desde  $10 \times 10$  hasta  $6000 \times 2000$ , dependiendo del tipo de sección, para conseguir una mejor adaptación de la malla de celdillas a la geometría.

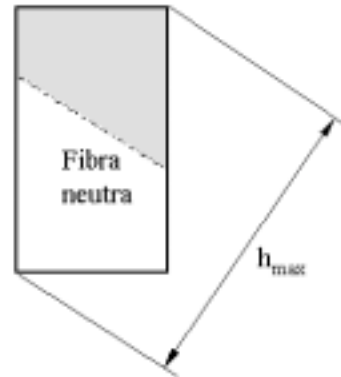
Dependiendo del tipo de sección se han predefinido una o varias inclinaciones de la fibra neutra. Para cada una de estas inclinaciones se han estudiado tres profundidades de



fibra neutra, correspondientes a  $1/3$ ,  $2/3$  y  $3/3$  del canto máximo de la sección medido en dirección perpendicular a la fibra neutra ( $h_{\max}$ ) (Figura 11). La ley de deformaciones queda totalmente definida en la sección, puesto que, en todos los casos, la deformación de la fibra más comprimida corresponde al 3,5 por mil y se asume que esta ley de deformaciones es plana.



**Figura 10.** Integración de la sección rectangular



**Figura 11.** Determinación del canto máximo

Los diferentes tipos de secciones que se han analizado son:

- Sección rectangular

Se ha utilizado una sección de  $10 \times 10$  cm. Los resultados obtenidos sobre esta sección mediante el método propuesto son válidos para una sección rectangular de dimensiones cualesquiera, puesto que ni el tiempo de ejecución ni el error relativo cometido dependen de las dimensiones de la pieza.

Para la resolución de esta sección mediante la subdivisión en celdillas se han utilizado mallas de  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $60 \times 60$ ,  $100 \times 100$  y  $200 \times 200$  celdillas.

Se han considerado distintas inclinaciones de la fibra neutra:  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  y  $45^\circ$ .

- Sección rectangular hueca

Se ha utilizado una sección de  $10 \times 10$  cm con paredes de 2,5 cm de espesor. Los resultados obtenidos son también independientes de las dimensiones para la proporción del “espesor/lado” = 0,25.

Para la resolución de esta sección mediante la subdivisión en celdillas se han utilizado mallas de  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $60 \times 60$ ,  $100 \times 100$  y  $200 \times 200$  celdillas.

Se han considerado distintas inclinaciones de la fibra neutra:  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  y  $45^\circ$ .

- Sección circular

Se ha utilizado una sección circular 10 cm de diámetro. Los resultados obtenidos son independientes del diámetro.

La sección circular se ha aproximado a un polígono de 72 lados para la aplicación del método propuesto.

Para la resolución de esta sección mediante la subdivisión en celdillas se han utilizado mallas de  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $60 \times 60$ ,  $100 \times 100$  y  $200 \times 200$  celdillas.

No se ha considerado la inclinación de la fibra neutra por razones de simetría.

- Sección anular

Se ha utilizado una sección circular de diámetro 10 cm con una pared de 2,5 cm de espesor. Los resultados obtenidos son independientes de las dimensiones para la proporción del “espesor/diámetro exterior” = 0,25.

La sección anular se ha aproximado a dos polígonos concéntricos de 72 lados cada uno para la aplicación del método propuesto. Para la resolución de esta sección mediante la subdivisión en celdillas se han utilizado mallas de  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $60 \times 60$ ,  $100 \times 100$  y  $200 \times 200$  celdillas.

No se ha considerado la inclinación de la fibra neutra.

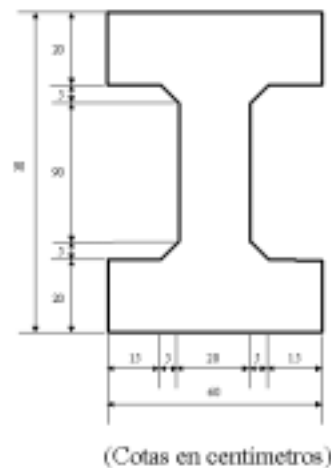
- Sección en “T”

Se ha considerado la sección en “T” que se indica en la Figura 12. Para la resolución de esta sección mediante la subdivisión en celdillas se han utilizado mallas de  $60 \times 90$ ,  $120 \times 180$ ,  $360 \times 540$ ,  $600 \times 900$  y  $1200 \times 1800$  celdillas.

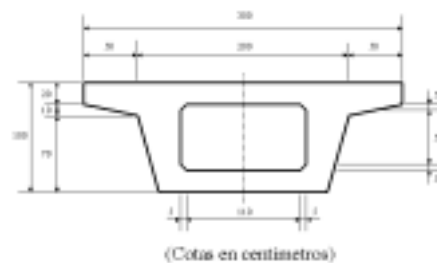
Esta sección se ha analizado con una única inclinación de la fibra neutra perpendicular al eje de simetría de la sección ( $0^\circ$ ).

- Sección en “artesa”

Se ha considerado la sección en “artesa” que se indica en la Figura 13.



**Figura 12.** Sección en “T”



**Figura 13.** Sección en “artesa”

Para la resolución de esta sección mediante la subdivisión en celdillas se han utilizado mallas de  $300 \times 100$ ,  $600 \times 200$ ,  $1800 \times 600$ ,  $3000 \times 1000$  y  $6000 \times 2000$  celdillas.

Esta sección se ha analizado con una única inclinación de la fibra neutra perpendicular al eje de simetría de la sección ( $0^\circ$ ).

A continuación, en la Tabla I, se resumen las características de los 390 casos computados. Todos los casos se han ejecutado en el mismo equipo e idénticas circunstancias bajo entorno MS-DOS para evitar diferencias en los tiempos de ejecución a causa de programas residentes.

**Tabla I.**

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

En lo que sigue se van a analizar los resultados más relevantes y representativos obtenidos en la resolución de los 390 casos correspondientes a los 7 tipos de secciones que se han detallado anteriormente. Las variables principales de estudio son para cada caso el tiempo de ejecución y el error cometido en los esfuerzos respecto a la solución “exacta”.

Se ha observado que los tiempos de resolución de algunos de los casos eran excesivamente pequeños, incluso inferiores a la precisión en la medición del tiempo por parte del ordenador. Por tanto, los tiempos de ejecución que se indican corresponden al tiempo medio de 10 series de ejecuciones. Cada ejecución consiste en repetir 100 veces el cálculo de la sección, tanto en los casos resueltos por celdillas como en los resueltos por integración gaussiana.

El error obtenido por cada método en el cálculo de esfuerzos se expresa en tanto por cien relativo al valor exacto de cada caso, esto es

$$\text{Error \%} = \left| \frac{F_i - F_{\text{exa}}}{F_{\text{exa}}} \right| \times 100 \quad (7)$$

donde  $F_i$  es el valor obtenido en el caso  $i$  para un esfuerzo  $F$  (axil o flector) y  $F_{\text{exa}}$  el valor exacto del esfuerzo  $F$  (axil o flector).

En la Tabla II se indican, para cada tipo de sección y diferentes números de puntos de Gauss ( $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$  y  $6 \times 6$ ), los tiempos de ejecución y los errores máximos obtenidos para cualquiera de los esfuerzos (axil o flector). En general los errores máximos se obtienen para la máxima inclinación y profundidad de la fibra neutra. No obstante, se aprecia claramente que los errores son muy reducidos sobre todo para  $3 \times 3$  ó  $6 \times 6$  puntos de Gauss. Más aún, como puede observarse, con tan solo  $3 \times 3$  puntos de Gauss se obtienen simultáneamente errores pequeños con tiempos de ejecución muy reducidos.

A continuación, en la Tabla III se resumen los resultados obtenidos para las secciones de tipo rectangular y circular, tanto hueca como maciza, para mallas de  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$  y  $100 \times 100$  celdillas. También en este caso se representan los errores máximos correspondientes a cada tipo de sección. Comparando estos resultados con los de la Tabla II, puede observarse que, aunque los errores relativos que se consiguen llegan a ser muy pequeños, los tiempos de ejecución son mucho mayores que los que corresponden al método propuesto, para errores del mismo orden de magnitud en ambos métodos.

Por último, las Tablas IV y V muestran los resultados correspondientes a las secciones en “T” y en “artesa” respectivamente, obtenidos por el método de integración mediante celdillas. En estos casos se han utilizado mallas de celdillas que permiten alcanzar errores similares a los obtenidos con el método propuesto. La comparación con los resultados de la Tabla II permite extraer las mismas conclusiones expresadas en el párrafo anterior en relación con los tiempos de ejecución y los errores cometidos.

Sección tipo	Número de puntos de Gauss							
	$2 \times 2$		$3 \times 3$		$4 \times 4$		$6 \times 6$	
	$t$ (s)	Error %	$t$ (s)	Error %	$t$ (s)	Error %	$t$ (s)	Error %
Rectangular	2,47	0,56	2,69	0,015	2,99	0,0004	3,85	$2,86 \cdot 10^{-4}$
Rectangular hueca	4,44	0,74	4,89	0,019	5,48	0,0005	7,18	$3,84 \cdot 10^{-4}$
Circular	5,59	0,35	7,97	0,010	11,24	0,0003	20,42	$2,11 \cdot 10^{-4}$
Anular	11,35	0,46	16,10	0,013	22,62	0,0004	40,95	$2,85 \cdot 10^{-4}$
Sección en “T”	6,30	0,44	6,67	0,013	7,19	0,0003	8,64	$2,73 \cdot 10^{-4}$
Sección en “artesa”	10,10	0,34	11,62	0,001	13,67	0,0003	19,45	$2,00 \cdot 10^{-4}$

Tabla II

	Malla de celdillas					
	10 × 10		20 × 20		100 × 100	
Sección tipo	<i>t</i> (s)	Error %	<i>t</i> (s)	Error %	<i>t</i> (s)	Error %
Rectangular	5,66	0,10	10,93	0,025	275	0,00100
Rectangular hueca	5,85	13,07	22,26	0,027	444	0,0011
Circular	38,28	1,917	142,97	0,69	3630	0,0992
Anular	66,01	9,26	285,94	0,096	7189	0,167

Tabla III

	Malla de celdillas					
	60 × 90		120 × 180		360 × 540	
Sección tipo	<i>t</i> (s)	Error %	<i>t</i> (s)	Error %	<i>t</i> (s)	Error %
Sección en "T"	467,19	0,34	1867	0,17	16934	0,0096

Tabla IV

	Malla de celdillas					
	300 × 100		600 × 200		1800 × 600	
Sección tipo	<i>t</i> (s)	Error %	<i>t</i> (s)	Error %	<i>t</i> (s)	Error %
Sección en "artesa"	7041	0,17	28221	0,08	254502	0,0064

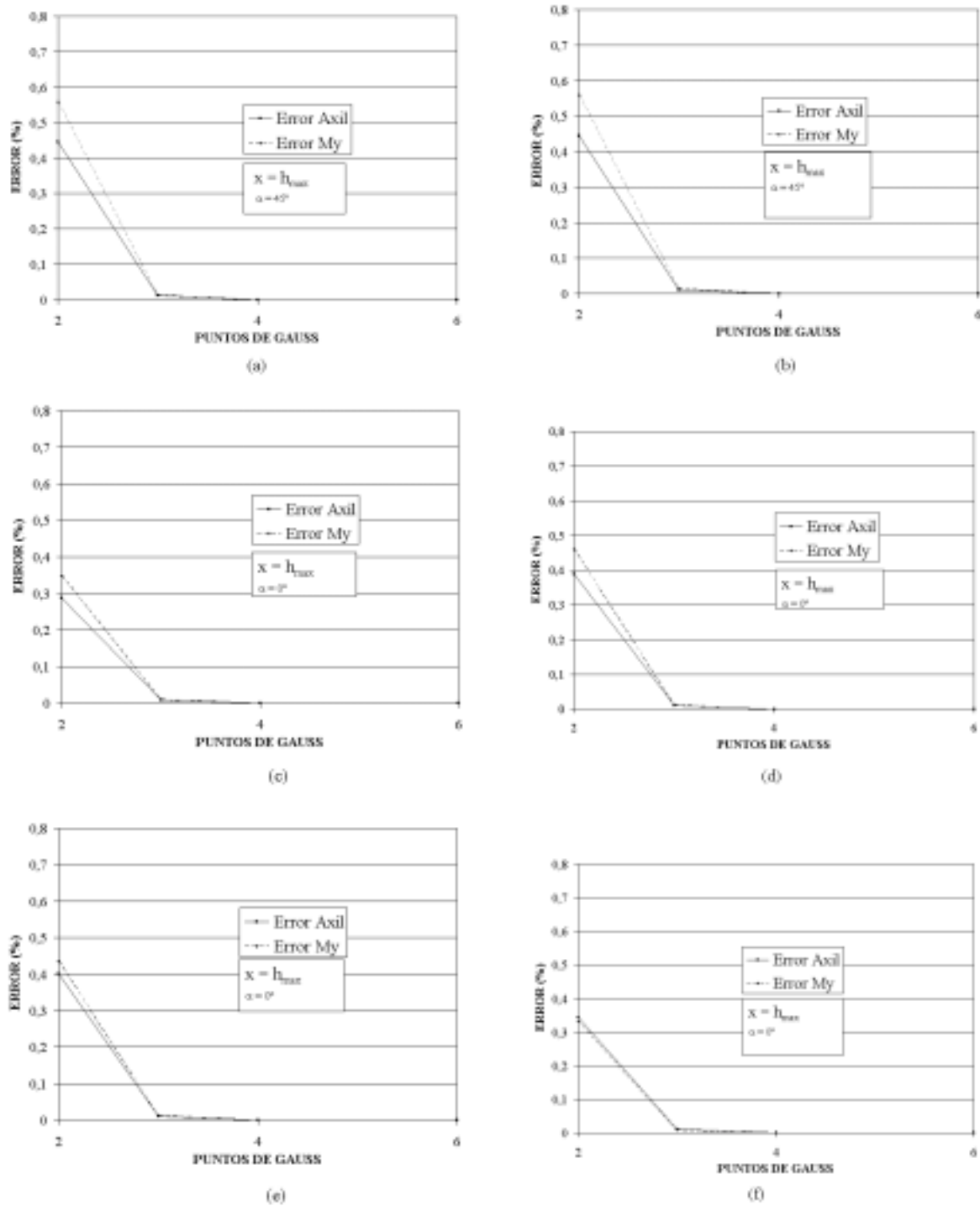
Tabla V

En las Figuras 14 y 15 se representa el error cometido en la evaluación de diferentes esfuerzos para cada uno de los tipos de secciones, bien mediante la cuadratura Gauss, bien mediante la integración por celdillas.

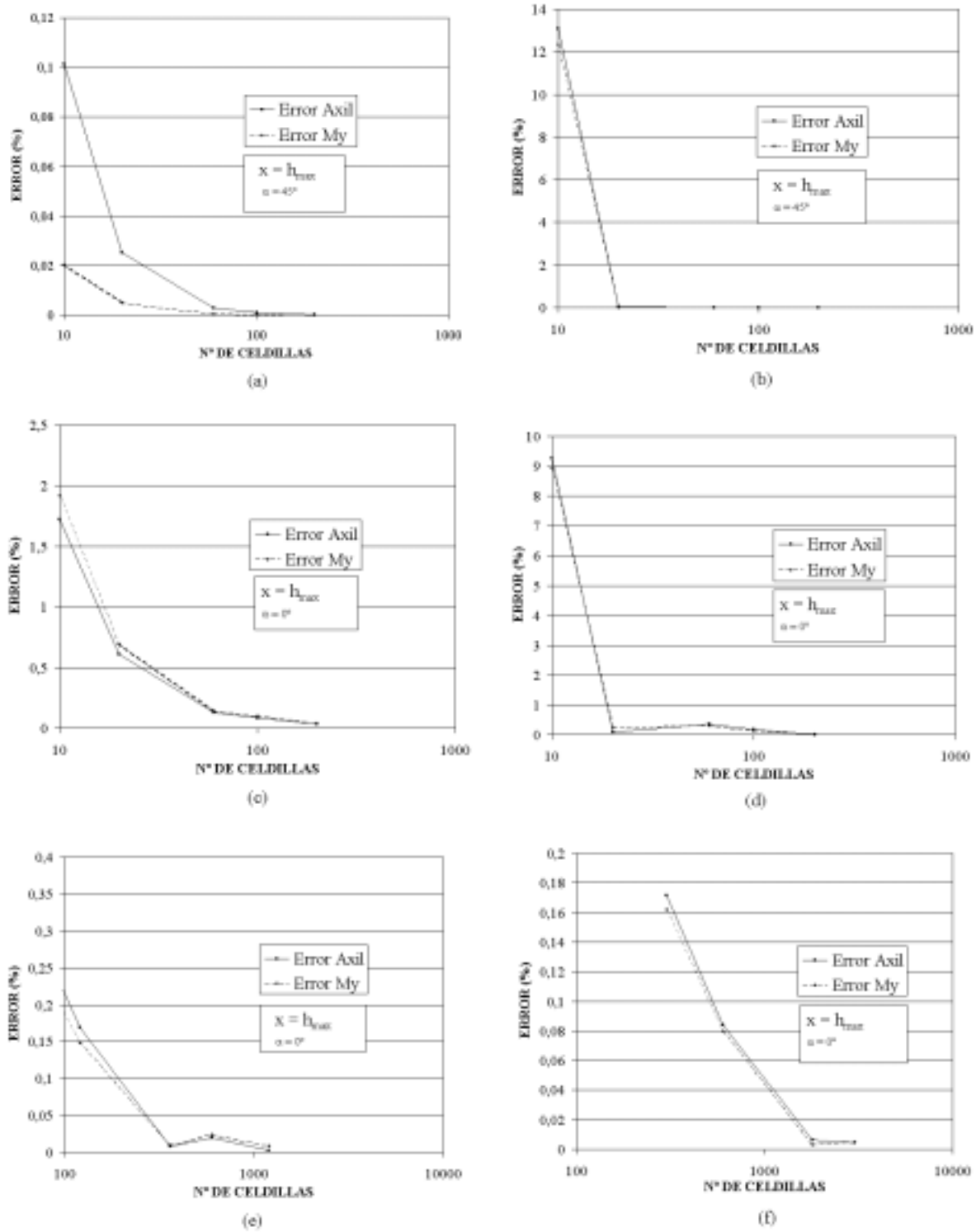
En la representación de los errores para la integración por celdillas se ha utilizado una escala logarítmica para el eje de abscisas (número de celdillas). Los valores numéricos que se indican en este eje no corresponden al número total de celdillas en que se divide la sección, sino al número de partes en que se divide el ancho máximo de la sección. En el caso de la sección en "T" o en "artesa" este número no coincide con el de la partición en vertical, puesto que las celdillas son siempre cuadradas, por tanto el número de divisiones en horizontal y en vertical es proporcional al ancho y canto de la sección.

En todos los casos estudiados puede observarse que la integración mediante  $3 \times 3$  puntos de Gauss da errores muy reducidos y que el error es prácticamente nulo con  $4 \times 4$  puntos de Gauss. Sin embargo, en la integración mediante celdillas se observa que, dependiendo del tipo de sección, el número de celdillas necesita ser muy grande para reducir los errores a valores suficientemente pequeños, como puede observarse sobre todo en los casos de la sección en "T" y de la sección en "artesa".

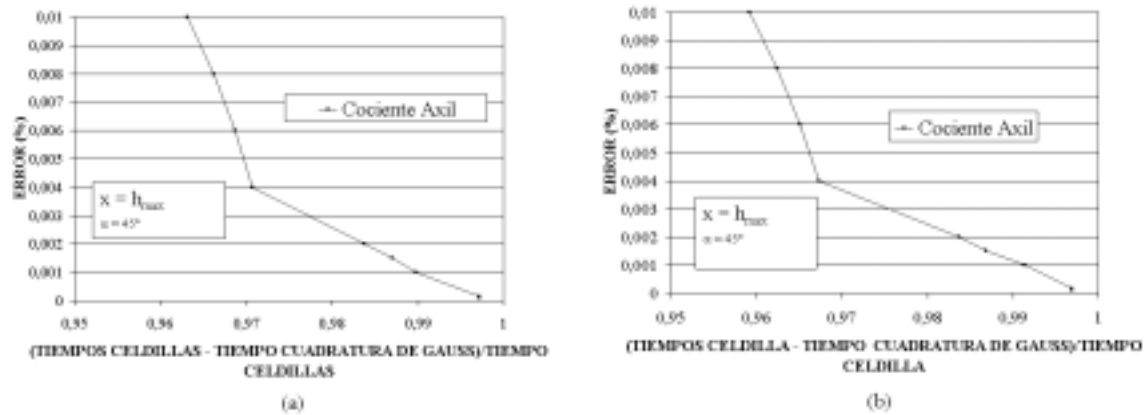
A los efectos de comparar la eficacia del método propuesto en relación con la integración mediante celdillas, se incluyen a continuación las Figuras 16a y 16b, correspondientes a la sección rectangular y rectangular hueca respectivamente. En estas figuras se representan en el eje de ordenadas los errores exigidos y en el eje de abscisas el incremento de tiempo de ejecución entre los dos métodos, con relación al tiempo de integración por celdillas. En estas curvas puede observarse que, a medida que el error exigido disminuye, el tiempo de ejecución mediante celdillas tiende a hacerse mucho mayor que el necesario por la cuadratura de Gauss, lo que se refleja con valores cada vez más próximos a la unidad en el eje de abscisas. Así, por ejemplo en la Figura 16a para un error exigido de 0,006 % el tiempo empleado por Gauss es del orden del 3,2 % del empleado en la ejecución por celdillas, o lo que es lo mismo, el tiempo de ejecución con celdillas es 31 veces mayor que el tiempo de ejecución mediante Gauss.



**Figura 14.** Comparación número de puntos de Gauss-error para una profundidad de fibra neutra  $x$  e inclinación  $\alpha$ . a) Sección rectangular; b) Sección rectangular hueca; c) Sección circular; d) Sección anular; e) Sección en “T”; f) Sección en “artesa”



**Figura 15.** Comparación número de cedillas-error para una profundidad de fibra neutra  $x$  e inclinación  $\alpha$ . a) Sección rectangular; b) Sección rectangular hueca; c) Sección circular; d) Sección anular; e) Sección en "T"; f) Sección en "artesa"



**Figura 16.** Comparación cociente de tiempos-error para una profundidad de neutra  $x$  e inclinación  $\alpha$ . a) Sección rectangular; b) Sección rectangular hueca

## CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método muy simple para integración numérica de las tensiones sobre la zona no fisurada de secciones de hormigón de forma cualquiera. Este método es válido para cualquier tipo de relación tensión-deformación y para solicitaciones de flexión esviada combinadas con esfuerzo axial. En la comparación entre el método propuesto y el de división en celdillas, aplicados ambos a diferentes tipos de secciones habituales en estructuras de hormigón se constata que:

- La precisión del método propuesto es tanto mayor cuanto más puntos de Gauss se utilizan. Esto no siempre ocurre en la integración mediante celdillas, puesto que el grado de precisión depende no sólo de la densidad de la malla sino también de su adaptación a la geometría de la sección.
- La relación entre la precisión y el tiempo de ejecución aumenta más rápidamente en función del número de puntos de Gauss que en función de la densidad de la malla de celdillas. En todas las secciones estudiadas la utilización de  $3 \times 3$  puntos de Gauss ha dado un grado de precisión excelente (errores menores del 0,02 %). Para obtener grados de precisión similares con integración mediante celdillas deben utilizarse mallas de alta densidad, y por consiguiente tiempos de ejecución mucho mayores.
- Otra ventaja del método propuesto es que la variación de los valores de los esfuerzos internos para diferentes posiciones de la fibra neutra es continua, a diferencia de lo que ocurre cuando dividimos la sección en celdillas. Esta continuidad resulta muy útil para asegurar la convergencia en el proceso iterativo de búsqueda de la posición de la fibra neutra a partir de un esfuerzo exterior dado.

El método propuesto por sus características de precisión, eficacia y continuidad en la integración de tensiones resulta idóneo para la utilización en el cálculo de secciones de hormigón sometidas a esfuerzos axiales y de flexión esviada, así como en programas de análisis no-lineal de estructuras de hormigón y en general en todos aquellos métodos de análisis que requieren un proceso iterativo de cálculo.



**REFERENCIAS**

- 1 Comité Euro-internacional du béton (CEB); Federation International de la Precontrainte (FIP), "*Manual of buckling and instability*", The construction Press, Lancaster, Inglaterra, (1978).
- 2 B. Carnahan, H.A. Luther y J.O. Wilkes, "*Cálculo numérico: métodos y aplicaciones*", Editorial Rueda, Madrid, España, (1979).
- 3 I.M. Smith, "*Programing the finite element method: with application to geomechanics*", John Wiley, Inglaterra, (1982).
- 4 E. Oñate, "*Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Análisis estático lineal*", CIMNE, Barcelona, España, (1992).
- 5 GEHO-CEB, D.L. "*Código modelo CEB-FIP 1990 para hormigón estructural*". Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, España, (1990).