Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects

Maria Alessandra Mariotti
Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
Via Buonarroti, 2
56100 Pisa, Italy

French translation:
Traduction française:
Harout Kodjian

The main objective of my communication is the critical report of some results of my research, which is still in progress. The topic of my study is geometrical reasoning. Starting from the theoretical notion of *Figural Concept* [4], some aspects of the interaction between the figural and the conceptual components are analysed, in the attempt to describe and understand the mental processes involved.

1. The notion of Figural Concept

The role of the figural component in thinking is commonly recognized: generally a rich collection of images is available which supports one's thoughts. But, even if this seems to be trivial for thinking in general, it has a particular meaning in the case of geometrical thinking.

What is specific about geometrical reasoning?

Geometry, as a mathematical field, deals with a particular kind of "objects": geometrical figures. From the point of view of mathematics, geometrical figures are pure abstract enti-

Le raisonnement géométrique, une dialectique entre les aspects figural et conceptuel

L'objectif principal de ma communication est de vous transmettre un rapport critique de quelques résultats de ma recherche, toujours en cours actuellement. Le sujet de mon étude est le raisonnement géométrique. En commençant par la notion théorique de *concept figural* [4], quelques aspects de l'interaction entre les composantes figurale et conceptuelle sont analysés, dans une tentative de décrire et de comprendre les processus mentaux qui y sont impliqués.

1. La notion de concept figural

Le rôle de la composante figurale dans la pensée est communément reconnu : en général une collection riche d'images, sur lesquelles s'appuient les pensées de quelqu'un, est disponible. Mais, même si cela paraît trivial pour la pensée en général, il a un sens particulier dans le cas de la pensée géométrique.

Qu'a-t-il de spécial ce raisonnement géométrique ?

La géométrie, en tant que domaine mathématique, traite ties, completely controlled by their definitions in an axiomatic frame, but what is specific about them is that they preserve a pictorially manageable characteristic which is *spatiality*. Geometrical figures can be considered as twofold mental entities, participating of two aspects: the figural and the conceptual. According to Fischbein, they are referred to as **Figural Concepts** [4]. In principle, these two aspects are strictly tied, and blent in a unity, like two facets of the same coin. Actually, the ideal fusion between the two aspects is not always complete, sometimes the two aspects may not harmonize. Conflicts and errors may be caused by a break between the two aspects.

The main idea is that of explaining the dynamics of the geometrical reasoning by the interaction between these two aspects. A study has been carried out during the last two years, and the experimental design is still in progress.

What I wish to present is a short account about the first results. But, first of all some examples are provided to clarify the general idea of Figural Concept.

2. Beyond the classical examples

Let us consider a classical example, the relationship between concepts and their attributes, which determines the class inclusion according to which a square belongs to the subset of parallelograms. Formally, according to the definitions, a square is a parallelogram, but, from the figural point of view, the differences between the prototypical image of a parallelogram and the critical attributes of a square prevent us from accepting the class inclusion without difficulty. Thus it is a pretty understandable fact that the hierarchical classification (of quadrilaterals) reveals its difficulty ([11], [7], [8], examples of the influence of prototypes also in [9], [10]).

In spite of the presence of a definition, figural features are implicitly used in the identification process. The general opinion is that students form a concept that is limited to "special figures" (for a further discussion, also see [5]). Certainly this fact is related to the presence of particular (standard) drawings in the text-books, or to the teachers' habit of supporting their explanations providing illustrative drawings, which highlight the "relevant (critical) attributes" [7]. But it is not worth further discussion here, even if it is a meaningful didactical problem.

Going on in analysing geometrical reasoning, let us consider the process of proving a theorem. There is general

d'une sorte particulière «d'objets»: les figures géométriques. Du point de vue mathématique, les figures géométriques sont des entités purement abstraites, complètement contrôlées par des définitions dans un cadre axiomatique, mais ce qui les rend spéciales c'est le fait qu'elles conservent une caractéristique figuralement traitable, ce qui est la «spatialité». Cela veut dire que les figures géométriques peuvent être considérées comme des entités mentales doubles, relevant de deux aspects: le figural et le conceptuel. Selon Fischbein, ils sont considérés comme des **concepts figuraux** [4]. En principe, ces deux aspects sont étroitement reliés entre eux, et fusionnés dans une unité, comme les deux faces d'une même pièce de monnaie. En fait, la fusion idéale entre les deux aspects n'est pas toujours complète; parfois les deux aspects ne sont pas en harmonie. Des conflits et des erreurs peuvent surgir d'une rupture entre ces deux aspects.

Notre intention principale est d'expliquer la dynamique du raisonnement géométrique par l'interaction entre ces deux aspects. Une étude a été réalisée durant les deux dernières années et la conception expérimentale est en préparation.

Ce que je désire présenter est un compte-rendu des premiers résultats. Mais d'abord, quelques exemples sont fournis afin de clarifier l'idée générale de concept figural.

2. Au-delà des exemples classiques

Considérons un exemple classique. Soit la relation entre les concepts et leurs attributs, qui détermine l'inclusion dans une classe selon laquelle un carré appartient au sous-ensemble des parallélogrammes. D'une façon formelle, selon les définitions, un carré est un parallélogramme, mais, du point de vue figural, les différences entre l'image prototypique d'un parallélogramme et les attributs critiques d'un carré ne nous permettent pas d'accepter sans peine l'inclusion à cette classe. Ainsi, c'est un fait bien compréhensible que la classification hiérarchique (des quadrilatères) ait ses difficultés ([11], [7], [8]; on trouve aussi dans [9] et [10] des exemples de l'influence des prototypes).

Malgré la présence d'une définition, des propriétés figurales sont implicitement utilisées dans le processus d'identification. L'opinion générale est que les étudiants se forment des concepts limités à des «figures spéciales» (pour une discussion plus avancée, voir aussi [5]). Ce fait, qu'il soit relié ou non à la présence de dessins dans des manuels scolaires, ou agreement that the figural evidence can constitute an obstacle to an understanding of the true idea of proof.

Let us consider, for instance, theorems such as the well-known "criteria for congruent triangles"; usually the proof, both in the text-books and in the teacher's explanation, is supported by the drawing of two 'equal figures'. This fact eliminates any doubts about the congruence of the two triangles and prevents students from understanding what really has to be proved. Similarly, let us consider the proof of the theorem about the congruence of the angles at the base of an isosceles triangle; the statement is obviously true looking at the drawing, and this fact can represent a great difficulty. The classical proof by Euclide tries to overcome this difficulty by means of a complex construction, the well-known "pons asinorum". Many other examples can be provided, but it is sufficient to recall the fact that some authors suggest the use of figural fallacies, caused by an incorrect interpretation of a drawing, to introduce students to the idea of 'proof' ([1], [2]).

3. The dynamics of Figural Concepts

But, what about the dynamics of figural concepts, that is what are the characteristic aspects of the interaction between figural and conceptual aspect in geometrical reasoning, for instance in the solution process of a geometrical problem.

Let us consider an example. We will start from a 3D geometrical problem. The question is the following:

*In pyramids ABCD and EFGHI shown here (**Figure 1**), all faces except base FGHI are equilateral triangles of equal size. If face ABC were placed on the face EFG so that the vertices of the triangles coincide, how many exposed faces would the resulting solid have? Select the correct answer:*

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

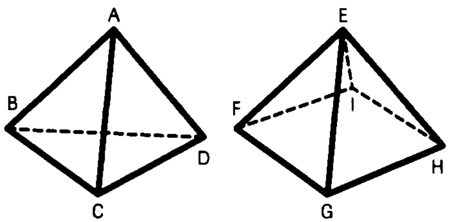


Figure 1

It is not difficult—and the reader can try—to imagine the transformation which makes the faces coincide; however, it seems worthless to follow this transformation in all the details if the aim is only to count the faces of the resulting solid. Thus the natural—the most common—way to answer the question consists of subtracting 2 (for the two triangles glued together, hidden inside the new solid) from the 9 original faces and take 7, as the resulting number of faces. Unfor-

à l'habitude des enseignants d'accompagner leurs explications par des croquis, ce qui met en lumière les « caractéristiques (critiques) significatives », ne vaut pas la peine d'être discuté davantage ici, même si c'est un problème didactique significatif [7].

Sur la voie de l'analyse du raisonnement géométrique, considérons le processus de preuve d'un théorème. On est d'accord, en général, que l'évidence figurale peut constituer un obstacle à une compréhension de l'idée vraie de preuve.

Considérons, par exemple, des théorèmes comme celui bien connu du « critère de congruence de deux triangles » : d'habitude la preuve, et dans les manuels scolaires et dans l'explication de l'enseignant, est soutenue par le dessin de deux « figures identiques », ce qui élimine tout doute à propos de la congruence des deux figures et empêche les élèves de comprendre ce qu'il faut vraiment démontrer. De même, en ce qui concerne la preuve du théorème à propos de la congruence des angles à la base d'un triangle isocèle ; l'énoncé est évidemment vrai en regardant le dessin, ce qui représente encore une grande difficulté. La preuve classique d'Euclide essaie de surmonter cette difficulté au moyen d'une construction complexe bien connue sous le nom de « pons asinorum ». On peut donner plusieurs autres exemples, mais il suffit de se rappeler le fait que l'usage de sophismes figuraux, causé par une interprétation incorrecte du dessin, est suggéré pour initier les élèves à l'idée de « preuve » ([1], [2]).

3. La dynamique des concepts figuraux

Mais, qu'en est-il de la dynamique des concepts figuraux ? Quelles sont les caractéristiques de l'interaction entre l'aspect figural et l'aspect conceptuel dans le raisonnement géométrique, par exemple dans le processus de résolution d'un problème géométrique ?

Prenons un exemple en commençant par un problème géométrique dans l'espace tridimensionnel. La question est la suivante :

*Dans les pyramides ABCD et EFGHI (**figure 1**), toutes les faces, sauf la base FGHI, sont des triangles équilatéraux égaux. Si on plaçait la face ABC contre la face EFG de telle manière que les sommets des triangles coïncident, combien de faces aurait le nouveau solide ainsi formé ? Choisir la réponse correcte parmi les données :*

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

tunately this solution is incorrect: it doesn't take into account the fact that two pairs of triangular faces become coplanar in the new solid. Actually it is quite impossible to achieve the correct image of the new solid, if this fact is not already known, and even after the solution is revealed, it is hard to realize what actually happens. A very interesting, general discussion of the solution can be found in [12].

As regards the notion of Figural Concept with which we are concerned, this example seems to be significant, and the following interpretation can be provided.

The logical processing of the concept of polyhedron, a pyramid, respecting the particular constraints of the problem—which can be considered the Conceptual aspect—escapes the control of the mental image of the concrete transformation—which can be considered the Figural aspect. The possible discrepancy between the two systems of control, in play at the same time, determines the difficulty of the task. On the other hand, the high probability of failure is caused by confidence in logical thinking when the figural representation is not immediately available.

4. An experimental investigation

In order to study the interaction between the figural and the conceptual aspects involved in geometrical reasoning, an experimental investigation has been carried out.

Since the main objective was to explore the dynamics of mental processes the investigation was devoted to observing spontaneous performances of pupils, during individual interviews. Different age levels were selected, to test the influence of the age variable (for a specific account about age influence see [10]).

The experimental design was focused on the folding/ unfolding problem for a polyhedron, but a first phase of the interview was devoted to making acquaintance with the object through a counting activity; in the following, it will be referred to as the 'counting problem'.

The pupil is asked to count how many faces, vertices and edges has a cube. Firstly, the counting must be done mentally, that is to say without manipulating the object, then the counting is done on the object. The fact that the real object was not available during the first process of solution, represents the main characteristic of the task.

As the number of elements to be counted increases—for instance in the case of the vertices, but even more in the

Il n'est pas difficile—et le lecteur peut l'essayer—d'imaginer la transformation qui ferait coïncider les deux faces, il est inutile de suivre cette transformation dans tous ses détails puisque le but n'est que de compter les faces du solide résultant. Ainsi, la façon naturelle (la plus commune) de répondre à cette question est de soustraire 2 (pour les deux triangles collés ensemble et cachés à l'intérieur du nouveau solide) au nombre total 9 des faces des deux pyramides séparées, et obtenir 7 comme nombre résultant des faces. Malheureusement cette réponse est fausse : elle ne prend pas en considération le fait que deux paires de faces triangulaires deviennent coplanaires dans le nouveau solide. En fait, il est impossible de réaliser l'image correcte du nouveau solide si cela n'est pas déjà connu ; et même après avoir donné la solution, il est difficile d'imaginer ce qui se passe effectivement. Une discussion générale très intéressante se trouve dans [12].

Pour la notion de concept figural qui nous concerne, cet exemple semble être significatif. La procédure logique du concept de pyramide (de polyèdre) respectant les contraintes particulières du problème—aspect conceptuel—échappe au contrôle de l'image mentale de la transformation concrète—aspect figural. Le désaccord possible entre les deux systèmes de contrôle, simultanément en action, détermine la difficulté de la tâche, pendant que la grande probabilité d'échec est due à la confiance donnée à la pensée logique quand la représentation figurale n'est pas disponible.

4. Une étude expérimentale

Pour étudier l'interaction entre les aspects figural et conceptuel du raisonnement géométrique, une investigation expérimentale a été faite.

Puisque l'objectif principal était d'explorer la dynamique des processus mentaux, l'investigation était consacrée à l'observation spontanée des performances des élèves pendant les entrevues individuelles. Différents niveaux d'âge étaient choisis pour examiner l'influence de la variable âge (pour une explication spécifique à propos de l'influence des âges, voir [10]).

Le projet expérimental était centré sur le problème de pliage et dépliage d'un polyèdre, mais une première phase de l'entrevue était consacrée à familiariser l'élève à l'objet à travers une activité de comptage à laquelle on fera référence par l'expression « problème de comptage ».

case of the edges—counting becomes very difficult, when it is performed by simple enumeration of the elements of the cube. Let us compare the following protocols, where the subjects report about their strategies in the counting task (see protocols A1, A2 and B1, page 17).

As it is easily seen in the first case (A1, A2) the pupils count by mentally simulating the enumeration, after few steps they lose the thread and fail. In the second case the pupil counts grouping the elements according to a spatial organization of the mental image and he succeeds.

Consistently with our hypothesis about the interaction between the figural and the conceptual aspects, in the last example we can speak about an organization of the mental image, according to a conceptual frame, while in the first case the control of the conceptual aspect is lacking. In other terms, in the second case the two aspects are well harmonized leading to an efficient strategy of solution, while in the second the lack of interaction determines the weakness of the strategy and its failure.

As a confirmation of this fact a very strange phenomenon was observed. Subjects who were able to achieve the counting without the object, failed when the object was in their hands (cf. the second part of protocol B1). In this case the richness of information [3], obstructs the intervention of the conceptual organization, otherwise possible in the mental process (see protocol enclosed). There seems to be a sort of opposition between the mental elaboration of the image (i.e. counting the edges of a cube in one own mind), and the correspondent concrete manipulation of an object. A characteristic of **stability** of the mental image may be supposed, defined as *the capacity of keeping in mind the object of the geometrical reasoning as an invariant, despite the transformations the subject is performing.*

How the concrete presence of the object obstructs the organization of the figure—organization needed in order to accomplish the task—requires more investigating, but seems to be meaningful in the general concrete/abstract argument.

5. Continuation of this dynamic

During the interview the subjects are asked whether a certain drawing can be folded into a solid or not. In the affirmative case, they have to colour in the same colour the sides of the nets that will join in the same edge on the solid. As usual the object is not made available to them.

On demande à l'élève de compter le nombre de faces, de sommets et d'arêtes d'un cube. D'abord, il doit compter mentalement, c'est-à-dire, sans manipuler l'objet, ensuite il doit les compter sur l'objet même. Le fait que l'objet réel n'était pas disponible pendant la première partie de la solution, est la caractéristique principale de la tâche.

À mesure que le nombre d'éléments à compter augmente, par exemple dans le cas des sommets, et même plus, dans le cas des arêtes, le comptage devient difficile quand il est fait par simple énumération des éléments du cube. Comparons les protocoles suivants où les sujets rendent compte de leurs stratégies dans la tâche de comptage (voir les protocoles A1, A2 et B1 à la page 17).

On voit facilement dans le premier cas (A1, A2) comment les élèves comptent mentalement en simulant l'énumération, puis, après quelque temps, ils perdent le fil de cette dernière et ils échouent. Dans le deuxième cas, l'élève compte en groupant les éléments selon une organisation spatiale de l'image mentale et il réussit.

Conformément à notre hypothèse à propos de l'interaction entre les aspects figural et conceptuel, dans le dernier exemple on peut parler d'une organisation de l'image mentale, selon un cadre conceptuel, tandis que dans le premier cas le contrôle de l'aspect conceptuel fait défaut. En d'autres termes, dans le deuxième cas les deux aspects sont bien en harmonie et conduisent à une stratégie efficace de solution, tandis que dans le premier cas, le manque d'interaction détermine la faiblesse de la stratégie et son échec.

En confirmation de ce fait, un très étrange phénomène a été observé. Des sujets qui étaient capables de réaliser le comptage sans la présence de l'objet, ont échoué quand l'objet était dans leurs mains (cf. deuxième partie du protocole B1). Dans ce cas, la richesse d'information [3] empêche l'intervention de l'organisation conceptuelle, autrement possible dans le processus mental (voir le protocole ci-joint). Il semble y avoir une sorte d'opposition entre l'élaboration mentale de l'image (i.e. compter les arêtes d'un cube dans sa pensée) et la manipulation concrète correspondante de l'objet. On peut supposer une caractéristique de **stabilité** de l'image mentale, définie comme *une capacité de garder en tête l'objet du raisonnement géométrique comme un invariant, malgré les transformations réalisées par le sujet.*

Comment la présence concrète de l'objet fait-elle obstruction à l'organisation de la figure (une organisation nécessaire

Let us consider the following net (**Figure 2**). As it may be easily seen the net, as a 2D figure, presents a centre symmetry, which makes the squares A and B correspond. Surprisingly, most of the pupils don't recognize this symmetry as useful tool to achieve the reconstruction of the solid. In other words, the pupils are not able to interpret the symmetry of the net in terms of the symmetry of the reconstruction. As a matter of fact, the folding process breaks the symmetry of the net in such a way in accordance to our supposition, that only the conceptual control could relieve the mental image from the constraints of simulating the concrete operation of reconstructing. Only in this case the mental image is organized in such a way that is possible to 'see' the symmetry of the situation. In this sense the interaction between the figural and the conceptual aspect can be considered well harmonized.

Along the same lines, other examples may be provided.

Let us consider the strategy of solution used by the subject of the following protocol; this strategy is frequently applied, so that it can be regarded as typical.

During the reconstruction phase, the net of the triangular prism of type C is presented (see **Figure 3a**) and Alessia is asked if the net can be folded into a solid.

Alessia looks at the drawing (**Figure 3b**) for a while, then she answers.

ALESSIA: Yes, it works.

MARIOTTI: How did you think of it?

ALESSIA: I put this one here (1) and that one... I moved it there (2).

MARIOTTI: But all these movements... Are you sure that anything will be spoiled?

ALESSIA: I think so. When everything is closed, it works... [she is perplexed]

MARIOTTI: What makes you perplexed?

ALESSIA: I was thinking that perhaps it wouldn't work, because when I close this one, it would be better if this were on this side, but at this point I think that it doesn't work... perhaps it does...

...

The subject looks at the drawing (**Figure 3a**) and recognizes the single pieces—polygons—corresponding to the different faces of a solid. She also recognizes that the arrangement of these pieces differs from a particular one

pour accomplir la tâche)? Cela demande une investigation qui semble être significative dans une argumentation générale du concret versus l'abstrait.

5. En continuant dans cette dynamique

Dans l'entrevue, on demandait aux sujets de reconnaître si un certain dessin donné pouvait former ou non un solide par pliage. Dans le cas affirmatif, ils devaient colorier d'une même couleur les côtés du réseau (dessin du développement plan) qui se rejoignaient sur une même arête du solide. Comme d'habitude, l'objet n'était pas à leur disposition.

Considérons le réseau suivant (**figure 2**). Comme on le voit, le réseau (figure bidimensionnelle) présente un centre de symétrie qui fait correspondre le carré A au carré B. Fait surprenant, la plupart des élèves ne reconnaissent pas cette symétrie comme un outil utile pour réaliser la reconstruction du solide. En d'autres mots, les élèves ne sont pas capables d'interpréter la symétrie du réseau en termes de symétrie de la reconstruction. En fait, le processus de pliage rompt la symétrie du réseau, de sorte que, conformément à notre supposition, seul le contrôle conceptuel pourrait libérer l'image mentale des contraintes de simulation de l'opération concrète de reconstruction. Seulement dans ce cas, l'image mentale est organisée de telle manière qu'il soit possible de «voir» la symétrie de la situation. Dans ce sens, l'interaction entre les aspects figural et conceptuel peut être considérée harmonieuse.

Dans la même lignée, d'autres exemples peuvent être donnés.

Considérons la stratégie de résolution utilisée par le sujet dans le protocole suivant; cette stratégie est fréquemment appliquée, de sorte qu'on peut la considérer comme typique.

Durant la phase de reconstruction, on présente un réseau de prisme triangulaire de type C (voir **figure 3a**) et on demande à Alessia si le réseau peut donner un solide par pliage.

Alessia regarde le dessin pendant un certain temps (**figure 3b**), puis elle répond:

ALESSIA: Oui, ça marche.

MARIOTTI: Comment l'as-tu pensé?

ALESSIA: J'ai mis celui-ci ici (1) et celui-là... je l'ai transporté là-bas (2).

MARIOTTI: Mais tous ces mouvements... Es-tu sûre que rien ne which is more familiar to her, and for this reason easier to be treated; thus she attempts to restore the previous situation in order to state the possibility of folding the net in a solid. At this point a very interesting dialectic takes place between the figural aspect and the conceptual aspect.

The figural control system suggests transforming the drawing, moving (translating, rotating, reflecting...) the pieces, changing their places, to achieve a net, which can surely be folded. But, only the conceptual control system can affirm the possibility and the correctness of this procedure.

Thus only a dialectic interaction between these two systems can make it possible to reach the solution through this way.

The initial difficulty of recognizing the possibility of reconstruction leads Alessia to use an (implicit) criterion of "invariance by movement", in order to decide whether it is possible to fold the net or not. But, the complexity of connections and their transformations cannot be easily managed, and Alessia remains uncertain and perplexed. At last, she grasps the possibility of a global reconstruction and begins to colour.

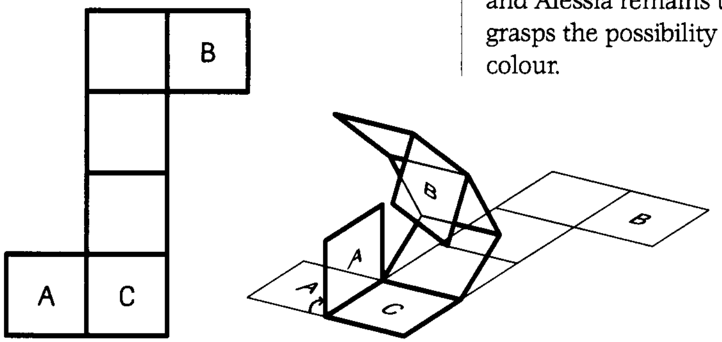
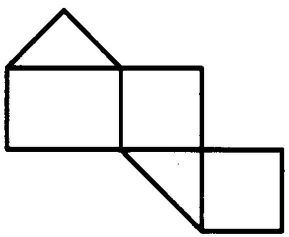
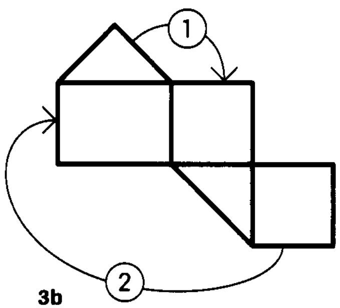


Figure 2



3a



3b

Figure 3

sera gâché ?

ALESSIA: Je le crois. Quand tout est fermé, ça marche... [elle est perplexe]

MARIOTTI: Qu'est-ce qui te rend perplexe ?

ALESSIA: Je pensais que peut-être ça ne marcherait pas, parce que quand je ferme celui-là, il aurait été mieux si celui-ci était de ce côté, mais à ce stade-ci je pense que ça ne marche pas... peut-être ça marche...

...

Le sujet regarde le dessin et reconnaît les pièces une par une (des polygones) correspondant aux différentes faces d'un solide (**figure 3a**). Elle reconnaît aussi que l'arrangement de ces pièces diffère d'un autre en particulier qui lui est plus familier, et pour cette raison, plus facile à traiter ; ainsi elle essaie de se reporter à la situation précédente pour se prononcer sur la possibilité de reconstruction par pliage du réseau en un solide. Il se révèle à ce moment une très intéressante dialectique entre l'aspect figural et l'aspect conceptuel.

Le système de contrôle figural suggère la transformation du dessin, en déplaçant (par translation, rotation, réflexion ou autre...) les pièces, en changeant leurs places, afin de réaliser un réseau qui peut sûrement être plié. Mais, seul le système de contrôle conceptuel peut affirmer la possibilité et la justesse de cette procédure.

Donc seule une interaction dialectique entre les deux systèmes peut rendre possible l'atteinte d'une solution par ce cheminement.

La difficulté initiale de reconnaître la possibilité de reconstruction mène Alessia à utiliser un critère (implicite) d'*invariance par mouvement* pour décider s'il est possible ou non de plier le développement pour avoir un solide. Mais la complexité des connections et leurs transformations ne peuvent pas être facilement traitées et Alessia reste incertaine et perplexe. À la fin, elle se décide pour une possibilité de reconstruction globale et commence à colorier.

Considérons la deuxième partie de la tâche : on demande au sujet de colorier de la même couleur les segments du périmètre du réseau qui vont se joindre sur le solide après la reconstruction de celui-ci.

Mais dans ce cas, la tâche change complètement et offre de nouvelles difficultés. Cette fois-ci, l'attention du sujet est centrée sur certains détails de la figure (les côtés du réseau)

Let us consider the second part of the task: the subject is asked to colour in the same colour the segments on the perimeter of the net, that will join on the solid, after the reconstruction.

But, in this case, the task changes completely, offering new difficulties. Now the attention of the solver is focused on certain details of the figure (the sides of the net), which do not have their own autonomous structural meaning, neither in the figure nor in the dynamics of the reconstruction. As a matter of fact, it becomes extremely difficult to manage the complex of transformations. Actually, Alessia as many of her class-mates, fails and does not accomplish the colouring task.

6. An example from a different field

The mental process involved in the geometrical reasoning, that was described in the previous paragraphs, has a nice correspondence in another field of creative production.

Let us consider the sketching activity in the course of architectural design and the analysis of the mental process involved in the production of sketches carried out by Goldschmidt ([6], in print).

This activity can be compared with the problem solving activity in the geometrical field and some basic features seem to be shared. Designing can be considered a creative process, the goal is to plan for making something new, and a particular function is played by the sketching.

As the author says, "The process of designing is a process of reasoning and in sketching the designer reasons visually, using what I shall call interactive imagery ..." (op. cit.).

But what is exactly the functioning of this reasoning.

According to the distinction between the two modalities "seen that" and "seen as", pictorial reasoning in sketching can be described in terms of a dialectic between these two modalities and sketching is productive in the development of design concepts when these two modalities are activated alternately ([6], op. cit.).

These two modalities can be interpreted in terms of figural and conceptual components of the interactive imagery providing a meaningful correspondence between the geometrical reasoning and the designing activity.

qui n'ont pas leur propre sens structural autonome, ni dans la figure ni dans la dynamique de la reconstruction. En fait, ça devient extrêmement difficile de gérer la complexité des transformations. En effet, Alessia et plusieurs de ses camarades de classe ont échoué et n'ont pas réussi dans la tâche de coloriage.

6. Un exemple venant d'un autre domaine

Le processus mental impliqué dans le raisonnement géométrique, qui a été décrit dans les paragraphes précédents, a une bonne correspondance dans un autre domaine de la production créative.

Considérons l'activité de réalisation de dessin dans le cours de dessin architectural et l'analyse du processus mental impliqué dans la production de diagrammes réalisés par Goldschmidt ([6], sous presse).

Cette activité peut être comparée à celle de résolution de problème dans le domaine géométrique et quelques propriétés fondamentales semblent être communément partagées entre les deux. Dessiner peut être considéré comme un processus créatif. Le but est de planifier pour faire quelque chose de nouveau, et la réalisation du dessin y joue un rôle particulier.

Comme dit l'auteur: « Le processus du dessin est un processus de raisonnement et dans l'acte de dessiner le dessinateur raisonne visuellement en utilisant ce que j'appellerai des images interactives... » (op. cit.)

Mais quel est exactement le fonctionnement de ce raisonnement ?

Selon la distinction entre les deux modalités « vu que » et « vu comme », le raisonnement par images dans l'acte de dessiner peut être décrit en termes de dialectique entre ces deux modalités, et dessiner est productif dans le développement des concepts de dessin quand ces deux modalités sont actives alternativement ([6], op. cit.).

Ces deux modalités peuvent être interprétées en termes de composantes figurale et conceptuelle des images interactives procurant une correspondance significative entre le raisonnement géométrique et l'activité de dessiner.

In conclusion

These few examples illustrate the complexity of the mental process, but, at the same time, seem to highlight a basic characteristic of geometrical reasoning. According to our supposition geometrical reasoning is based on a dialectical interaction between a figural and a conceptual aspect, so that a good functioning is possible only if they are well harmonized.

Conclusion

Ces deux exemples illustrent la complexité du processus mental, mais, en même temps, ils semblent mettre en lumière une caractéristique fondamentale du raisonnement géométrique. D'après notre supposition, le raisonnement géométrique est basé sur une interaction dialectique entre un aspect figural et un aspect conceptuel, de sorte qu'un bon fonctionnement n'est possible que s'ils sont en harmonie.

Protocols

A1. MIRCO (9:10, V ELEM.)

Counting the vertices of the cube without the object.

MARIOTTI: Now, let us count how many vertices has the cube.
MIRCO: 1, ...2, ... 10 ? ... No, 1 ... [he counts again, without order]
MARIOTTI: When you are counting like this, do you see anything?
MIRCO: I see the cube. ... 1, 2, ... No.

A2. CRISTIANO (10:3, V ELEM.)

Counting task, without the cube.

MARIOTTI: Listen, how many vertices has the cube?
CRISTIANO: 8.
MARIOTTI: How did you count them?
CRISTIANO: One by one.
MARIOTTI: During the counting did you see the cube in your mind?
CRISTIANO: Yes.
MARIOTTI: Did you keep it still or did you move it?
CRISTIANO: I moved it.
MARIOTTI: Now, let us count the edges.
CRISTIANO: 17, I think so...
MARIOTTI: How did you count them, one by one?
CRISTIANO: Yes, I did... one by one.
MARIOTTI: Did you move the object in your mind?
CRISTIANO: No. I counted... before those on the top and then those on the bottom.
MARIOTTI: How can it turn out 17, it is too much ... does it work? the number does it change?
CRISTIANO: It change.
MARIOTTI: What number does it turn out?
CRISTIANO: It is bigger.
...

B1. IURI (13:10 YEAR OLD 8TH GRADE)

The cube was shown and then it was hidden.

MARIOTTI: How many faces have a cube?
IURI: 6.
MARIOTTI: How did you do?
IURI: I mean, I...did, I...said, ...let us say, the lateral faces, those around are 4, and the bases, I mean at the bottom... one on the top, one at the bottom...
MARIOTTI: And, the vertices?
IURI: [...] the vertices... are... 8.
MARIOTTI: How did you do?
IURI: There is, 4 on the top and 4 at the bottom.
MARIOTTI: And the edges?
IURI: [...] the edges ...emh ...12.
MARIOTTI: How did you do to count them?
IURI: Because, I mean... if the faces are 6, I told... well each face has two of them and... multiplying...
MARIOTTI: Each face has two of them!? No! You cannot recall how you counted them, can you?
IURI: No, I cannot.
MARIOTTI: Now I give you the cube. Can you count again, on the cube?
IURI: These are the lateral faces [he touches each one with his finger], plus two, then the vertices are 8: I told 4 on the top and these 4 and then the edges... the edges... I mean, now as I can see... I see that, I mean, 4... 4 at the bottom... the other... I mean these... plus the 4... on the side... [he is uncertain, he turned the object].
MARIOTTI: 16? Do you think that there is something wrong?
IURI: I mean, those... I mean, that I have already seen and those that... I have to see, practically now... these 4...
4 at the bottom and the 4 on the side [he gets control, well organising the counting].

Protocoles

A1. MIRCO (9:10, ÉLÉM. V)

Compter les sommets du cube sans la présence de l'objet.

MARIOTTI: Maintenant, comptons le nombre de sommets qu'a un cube.
MIRCO: 1,... 2, ... 10? ... Non, 1, ... [il compte de nouveau, sans ordre].
MARIOTTI: Quand tu es en train de compter comme ça, vois-tu quelque chose?
MIRCO: Je vois le cube. ... 1, 2, ... Non.

A2. CRISTIANO (10:3, ÉLÉM. V)

Tâche de comptage, sans le cube.

MARIOTTI: Écoute, combien de sommets a un cube?
CRISTIANO: 8.
MARIOTTI: Comment les as-tu comptés?
CRISTIANO: Un à un.
MARIOTTI: Pendant le comptage, voyais-tu le cube dans ta tête?
CRISTIANO: Oui.
MARIOTTI: L'as-tu gardé immobile ou bien tu l'as bougé?
CRISTIANO: Je l'ai bougé.
MARIOTTI: Maintenant, comptons les arêtes.
CRISTIANO: 17, je pense...
MARIOTTI: Comment les as-tu comptées, une à une?
CRISTIANO: Oui, je les ai comptées... une à une.
MARIOTTI: As-tu bougé l'objet dans ta tête?
CRISTIANO: Non. J'ai compté... d'abord celles-ci en haut et après celles-là en bas.
MARIOTTI: Comment cela peut être 17, c'est trop... est-ce que ça marche? Est-ce que le nombre change?
CRISTIANO: Il change.
MARIOTTI: Quel nombre est-il devenu?
CRISTIANO: Il est plus grand.
...

B1. IURI (13:10 ÂGE DE 8IÈME)

Le cube a été montré puis caché.

MARIOTTI: Combien de faces a un cube?
IURI: 6.
MARIOTTI: Comment tu as fait?
IURI: Je veux dire, j'ai... fait, j'ai... dit, ...disons, les faces latérales, celles tout autour sont 4, et les bases, je veux dire en bas... une en haut, une en bas...
MARIOTTI: Et, les sommets?
IURI: [...] les sommets... sont... 8.
MARIOTTI: Comment tu as fait?
IURI: Il y en a 4 en haut et 4 en bas.
MARIOTTI: Et les arêtes?
IURI: [...] les arêtes... hem... 12.
MARIOTTI: Comment tu as fait pour les compter?
IURI: Parce que, je veux dire... si les faces sont 6, j'ai dit... bon, chaque face en a deux... en multipliant...
MARIOTTI: Chaque face en a deux!? Non! Tu ne peux pas te rappeler comment tu les as comptées, peux-tu?
IURI: Non, je ne peux pas.
MARIOTTI: Maintenant, je te donne le cube. Peux-tu compter encore une fois sur le cube?
IURI: Celles-ci sont les faces latérales [il touche chacune avec son doigt], plus deux, alors les sommets sont 8: j'ai dit 4 en haut et 4 en bas, et après les arêtes... les arêtes... je veux dire, maintenant que je vois... je vois que, je veux dire, 4... 4 en bas... l'autre... je veux dire celles-ci... plus les 4... sur le côté... [il est incertain, il tourne l'objet].
MARIOTTI: 16? Crois-tu qu'il y a là quelque chose qui ne va pas?
IURI: Je veux dire, celles-là... je veux dire, que j'ai déjà vues et celles-là que... je dois voir, pratiquement maintenant... ces 4... 4 en bas et 4 sur le côté [il prend le contrôle, organisant bien le comptage].

Bibliography / Bibliographie

[1] Balachef, N., 1987. "Processus de preuve et situations de validation." *Educational Studies in Mathematics*, vol.18, n. 2, 147-176.

[2] Balachef, N., 1988. "Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élevés de collège." *Thèse*, Grenoble.

[3] Caron-Pargue, J., 1981. "Quelques aspects de la manipulation. Manipulation matérielle et manipulation symbolique." *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 2, n. 3, 5-35.

[4] Fischbein, E., 1963. *Conceptele figurale*, Ed. Acad. Rep. Pop. Romine.

[5] Fisher, N., 1978. "Visual influence of figure orientation on concept formation in geometry," in *Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometrical Concepts*, R. Lesh & D. Hierkiewicz (eds), Columbus, Ohio: ERIC.

[6] Goldshmidt, G. "The dialectics of sketching." *The Journal of Creativity Research*, in print.

[7] Hershkowitz, R., 1987. "The acquisition of concepts and misconcepts in basic geometry—or when a little learning is a dangerous thing," in *Proceedings of the Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*, Novak J.D. (ed.) vol. 3, 238-51, N.Y., Ithaca, Cornell Univ.

[8] Herskovitz, R., 1990. "Psychological aspects of learning geometry," in *Mathematics and cognition*, Kilpatrick J. & Nesher P., Cambridge Univ. Press.

[9] Mariotti, M.A., 1989. "Mental images: some problems related to the development of solids." *Actes de la 13e Conférence Int. PME*, Paris.

[10] Mariotti, M.A., 1991. "Age variant and invariant elements in the solution of unfolding problems." *Proceedings of the 15th PME Conference*, Assisi.

[11] Vinner, S., Hershkowitz, R., 1983. "On concept formation in geometry." *ZDM* 83/1.

[12] Young, S.C., 1982. "The mental representation of geometrical knowledge." *Journal of mathematical behaviour*, vol. 3, n. 2, 123-144.