

La rigidité générique des graphes biparti-complets dans \mathbb{R}^d

par Jean-Luc Raymond

Résumé

Topologie structurale #10, 1984

Dans un article déjà commenté dans Topologie structurale, E.D. Bolker et B. Roth ((Bolker 1980), (Whiteley 1979)) amorçaient une classification générique des graphes biparti-complets dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3 . Leur raisonnement était basé sur le calcul de la dimension de l'espace des autocontraintes (stress) pour une réalisation d'un graphe biparti-complet dans un espace donné. La classification qu'ils établissaient se limitait à \mathbb{R}^2 et à \mathbb{R}^3 . Le texte qui suit se veut une généralisation de leurs résultats à des espaces de dimension supérieure. Nous pourrions établir la classification générique des structures construites sur des graphes biparti-complets en regard de leur comportement rigide dans un espace ambiant fixé de dimension supérieure ou égale à 2.

Abstract

Structural Topology #10, 1984

Generic Rigidity of Complete Bipartite Graphs in \mathbb{R}^d

In an article reviewed earlier in Structural Topology, E.D. Bolker and B. Roth ((Bolker 1980), (Whiteley 1979)) put together a generic classification of complete bipartite graphs in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 . Their reasoning was based on calculating the dimension of the space of stresses for a realization of a complete bipartite graph in a given space. The classification which they established applies only to \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 . The text which follows is a generalization of their results to spaces of higher dimension. We can establish the generic classification of structures built over complete bipartite graphs with regard to their rigid behavior in a fixed ambient space of dimension greater than or equal to 2.

L'étude de la rigidité des graphes biparti-complets a déjà été réalisée dans un texte de E.D. Bolker et B. Roth, «When is a bipartite graph a rigid framework?» (Bolker 1980). Nous nous appuyerons, ici, sur la plupart de leurs résultats et nous reprendrons l'idée maîtresse de leur cheminement pour étendre à des dimensions supérieures ce qu'ils démontraient pour des graphes biparti-complets réalisés dans le plan ou dans l'espace. Nous obtiendrons à ce titre une classification générique concernant la rigidité de toute structure construite sur un graphe biparti-complet dans \mathbb{R}^d .

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre d'une étude menant à la rédaction d'un mémoire de maîtrise au département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal (Raymond 1982). D'ailleurs, je tiens à remercier monsieur Maurice Garançon, mon directeur de recherches, pour ses nombreuses et précieuses suggestions.

The study of rigidity of complete bipartite graphs was initiated by E.D. Bolker and B. Roth "When is a bipartite graph a rigid framework?" (Bolker 1980). We rely here on most of their results and we take up again the main idea of their proofs to extend to higher dimensions what they showed for complete bipartite graphs in the plane or in space. We obtain in this way a generic classification revealing the rigidity of any structure constructed over a complete bipartite graph in \mathbb{R}^d .

This work was prepared in the context of a study leading to the preparation of a master's thesis in the Department of Mathematics of the Université du Québec à Montréal (Raymond 1982). Moreover, we wish to thank Prof. Maurice Garançon, my research director, for his many helpful suggestions.

Introduction

Un **graphe biparti-complet** $K_{m,n}$ est une structure abstraite comportant $m + n$ sommets $(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$ et l'ensemble des arêtes $\{x_i, x_j\}$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. Une **réalisation dans \mathbb{R}^d** de cette structure est la donnée de deux ensembles de points de \mathbb{R}^d :

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{md} \text{ et } B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{nd}$$

On notera cette réalisation du graphe $K_{m,n}$ par $K(A, B)$.

Pour déterminer la classification générique du comportement d'une structure $K_{m,n}$ dans \mathbb{R}^d par rapport à la rigidité, il suffit de connaître le comportement de la structure réalisée en un point régulier de sa fonction d'arêtes, f . Pour ce faire, nous allons calculer, pour cette réalisation, le nombre de **degrés de liberté interne** de la structure, c'est-à-dire la différence entre les dimensions de l'espace des mouvements infinitésimaux, $\text{Ker } df(A, B)$, et l'espace tangent à la variété des points de $\mathbb{R}^{(m+n)d}$ congruents à (A, B) au point (A, B) , $T(A, B)$. On peut montrer que $\dim T(A, B) \leq d(d+1)/2$ et que l'égalité est vérifiée quand les sommets engendrent au moins un hyperplan de l'espace \mathbb{R}^d . On se servira, d'autre part, du fait suivant:

$$\dim (\text{Ker } df(A, B)) = \dim \Omega(A, B) + (m+n)d - mn \quad (1)$$

où $\Omega(A, B)$ est l'espace vectoriel des **autocontraintes** (stress) sur la réalisation $K(A, B)$. Sur l'ensemble de ces notions on pourra consulter (Bolker 1980), (Raymond 1982) ou (Roth 1981).

Le résultat principal de Bolker et Roth (Bolker 1980) est dans l'élaboration d'une méthode de calcul de la dimension de ce dernier espace, $\Omega(A, B)$. Il s'énonce ainsi, si on note \bar{X} l'enveloppe affine de X , soit $K(A, B)$ une réalisation dans \mathbb{R}^d du graphe biparti-complet $K_{m,n}$ et soient $C = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, $k = |C|$, $h = \dim C$ et $Q(C)$, l'espace des surfaces quadratiques dans C contenant les sommets de C , alors si $D(X)$ est l'ensemble des dépendances affines de X on a

$$\dim \Omega(A, B) = \dim D(A) \dim D(B) + \dim Q(C) + k - (1/2)(h+1)(h+2) \quad (2)$$

On remarquera que si $X \in \mathbb{R}^{ld}$ on a la relation $\dim D(X) + \dim \bar{X} = l - 1$.

En ce qui concerne $Q(C)$, on peut montrer le fait suivant:

$$\dim Q(C) \geq \max \{0, (1/2)(h+1)(h+2) - k\}$$

De plus, l'ensemble des points $C = (c_1, c_2, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^{kd}$ pour lesquels l'égalité est vérifiée est un ouvert dense de \mathbb{R}^{kd} .

Classification générique

On peut, dans un premier temps, classifier tous les graphes biparti-complets possédant «trop peu» d'arêtes.

Théorème 1 (Bolker 1980): Si $mn < (m+n)d - (1/2)d(d+1)$, alors toute réalisation de $K_{m,n}$ dans \mathbb{R}^d est infinitésimalement flexible; $K_{m,n}$ est donc génériquement flexible dans \mathbb{R}^d . \square

Introduction

A **complete bipartite graph** $K_{m,n}$ is an abstract structure with $m + n$ vertices $(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$ and the set of edges $\{x_i, x_j\}$ for $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq j \leq n$. A **realization in \mathbb{R}^d** of this structure is the assignment of two sets of points in \mathbb{R}^d :

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{md} \text{ and } B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{nd}$$

We denote this realization of the graph $K_{m,n}$ by $K(A, B)$.

To determine the generic classification of the behavior of a structure $K_{m,n}$ in \mathbb{R}^d with respect to rigidity, it suffices to know the behavior of the structure realized at a regular point of its edge function f . To do this we are going to calculate, for this realization, the number of **internal degrees of freedom** of the structure, that is, the difference between the dimension of the space of infinitesimal motions, $\text{Ker } df(A, B)$, and of the tangent space to the variety of points of $\mathbb{R}^{(m+n)d}$ congruent to (A, B) at the point (A, B) , $T(A, B)$. We can show that $\dim T(A, B) \leq d(d+1)/2$ and that the equality is verified when the vertices span at least a hyperplane in the space \mathbb{R}^d . Furthermore, we make use of the following fact:

$$\dim (\text{Ker } df(A, B)) = \dim \Omega(A, B) + (m+n)d - mn \quad (1)$$

where $\Omega(A, B)$ is the vector space of **stresses** (self-stresses) on the realization of $K(A, B)$. For all of these ideas the reader can consult (Bolker 1980), (Raymond 1982) or (Roth 1981).

The main result of Bolker and Roth (Bolker 1980) is in the development of a method of calculating the dimension of this latter space, $\Omega(A, B)$. One finds that, if one denotes by \bar{X} the affine hull of X , and we let $K(A, B)$ be a realization in \mathbb{R}^d of the complete bipartite graph $K_{m,n}$ and let $C = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, $k = |C|$, $h = \dim C$ and $Q(C)$, the space of quadratic surfaces in C containing the vertices of C , then if $D(X)$ is the set of the affine dependencies of X one has

$$\dim \Omega(A, B) = \dim D(A) \dim D(B) + \dim Q(C) + k - (1/2)(h+1)(h+2) \quad (2)$$

We notice that if $X \in \mathbb{R}^{ld}$ then we have the relation $\dim D(X) + \dim \bar{X} = l - 1$.

Concerning $Q(C)$ we can show the following fact:

$$\dim Q(C) \geq \max \{0, (1/2)(h+1)(h+2) - k\}$$

Moreover, the set of points $C = (c_1, c_2, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^{kd}$ for which the equality is satisfied is an open set dense in \mathbb{R}^{kd} .

Generic Classification

First off, we can classify all those complete bipartite graphs having "too few" edges.

Theorem 1 (Bolker 1980): If $mn < (m+n)d - (1/2)d(d+1)$, then every realization of $K_{m,n}$ in \mathbb{R}^d is infinitesimally flexible; $K_{m,n}$ is then generically flexible in \mathbb{R}^d . \square

Dans ce contexte, on trouve dans l'article de Bolker et Roth, des résultats concernant la classification générique dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3 des graphes biparti-complets comportant «assez» d'arêtes en fonction de la dimension de l'espace dans lequel ils sont réalisés. En effet, dans \mathbb{R}^2 comme dans \mathbb{R}^3 , il suffit que $mn \geq (m+n)d - (1/2)d(d+1)$ pour que le graphe $K_{m,n}$ soit génériquement rigide. Les auteurs déplorent par contre le fait que ce résultat ne puisse pas directement s'appliquer à des dimensions supérieures et exhibent le graphe $K_{6,7}$ qui est génériquement flexible dans \mathbb{R}^4 malgré le fait que le couple (6, 7) satisfasse l'inéquation $mn \geq (m+n)d - (1/2)d(d+1)$ avec $d = 4$.

Le théorème suivant apporte la correction nécessaire à une généralisation des résultats mentionnés.

Théorème 2: Soient $m > 1$ et $n > 1$ tels que $mn \geq (m+n)d - (1/2)d(d+1)$ pour d fixé, $K_{m,n}$ est génériquement rigide dans \mathbb{R}^d si $m+n \geq (1/2)(d+1)(d+2)$ et génériquement flexible si $m+n < (1/2)(d+1)(d+2)$.

Démonstration: Soit $V = \{(A, B) \in \mathbb{R}^{(m+n)d} : \bar{A} = \bar{B} = \mathbb{R}^d\}$, V est un ouvert dense de $\mathbb{R}^{(m+n)d}$. D'autre part, considérons l'ensemble des points (A, B) pour lesquels $\dim Q(A, B)$ est minimale:

$$W = \{(A, B) \in \mathbb{R}^{(m+n)d} : \dim Q(A, B) = \max \{0, (1/2)(d+1)(d+2) - (m+n)\}\}$$

Comme on l'a signifié plus haut, cet ensemble est un ouvert dense de $\mathbb{R}^{(m+n)d}$. Ainsi, $V \cap W$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^{(m+n)d}$ étant l'intersection de deux ouverts denses.

Pour m, n et d fixés et tels que $mn \geq (m+n)d - (1/2)d(d+1)$, nous chercherons, dans un premier temps, à connaître le comportement d'une réalisation $K(A, B)$ dans \mathbb{R}^d du graphe $K_{m,n}$ en un point (A, B) appartenant à $V \cap W$. L'expression (2) nous permet de calculer la dimension de l'espace des autocontraintes dans le cas qui nous intéresse. On a

$$\begin{aligned} \dim \Omega(A, B) &= (m-d-1)(n-d-1) + \dim Q(A, B) + m+n - (1/2)(d+1)(d+2) \\ &= mn - (m+n)d + (1/2)d(d+1) + \dim Q(A, B) \end{aligned}$$

En utilisant l'expression (1), on obtient

$$\dim (\text{Ker } df(A, B)) = (1/2)d(d+1) + \dim Q(A, B)$$

pour un point (A, B) de $V \cap W$.

Or, si $(A, B) \in V$, on a $\dim T(A, B) = (1/2)d(d+1)$. Ainsi, pour un point appartenant à $V \cap W$, le nombre de degrés de liberté interne de la structure est égal à $\dim Q(A, B)$, c'est-à-dire

$$\dim (\text{Ker } df(A, B)) - \dim T(A, B) = \max \{0, (1/2)(d+1)(d+2) - (m+n)\}$$

In this context, we find in the article by Bolker and Roth, some results concerning the generic classification in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 of complete bipartite graphs having "enough" edges with respect to the dimension of the space in which they are realized. Actually in \mathbb{R}^2 as in \mathbb{R}^3 , it suffices that $mn \geq (m+n)d - (1/2)d(d+1)$ for the graph $K_{m,n}$ to be generically rigid. The authors lament the fact that this result cannot be directly applied to higher dimensions and exhibit the graph $K_{6,7}$ which is generically flexible in \mathbb{R}^4 despite the fact that the couple (6, 7) satisfies the inequality $mn \geq (m+n)d - (1/2)d(d+1)$ with $d = 4$.

The following theorem supplies the necessary correction to a generalization of the above results.

Theorem 2: Let $m > 1$ and $n > 1$ be such that $mn \geq (m+n)d - (1/2)d(d+1)$ for d fixed, then $K_{m,n}$ is generically rigid in \mathbb{R}^d if $m+n \geq (1/2)(d+1)(d+2)$ and is generically flexible if $m+n < (1/2)(d+1)(d+2)$.

Proof: Let $V = \{(A, B) \in \mathbb{R}^{(m+n)d} : \bar{A} = \bar{B} = \mathbb{R}^d\}$, so V is an open set dense in $\mathbb{R}^{(m+n)d}$. Then consider the set of points (A, B) for which $\dim Q(A, B)$ is minimal:

$$W = \{(A, B) \in \mathbb{R}^{(m+n)d} : \dim Q(A, B) = \max \{0, (1/2)(d+1)(d+2) - (m+n)\}\}$$

Just as above, this set is an open set dense in $\mathbb{R}^{(m+n)d}$. Thus $V \cap W$ is a non-empty open subset of $\mathbb{R}^{(m+n)d}$, being the intersection of two dense open sets.

For m, n and d fixed and such that $mn \geq (m+n)d - (1/2)d(d+1)$, we will first try to understand the behavior of a realization $K(A, B)$ in \mathbb{R}^d of the graph $K_{m,n}$ at a point (A, B) belonging to $V \cap W$. The expression (2) permits us to calculate the dimension of the space of stresses in the case which interests us. We have

$$\begin{aligned} \dim \Omega(A, B) &= (m-d-1)(n-d-1) + \dim Q(A, B) + m+n + (1/2)(d+1)(d+2) \\ &= mn - (m+n)d + (1/2)d(d+1) + \dim Q(A, B) \end{aligned}$$

By using the expression (1) we obtain

$$\dim (\text{Ker } df(A, B)) = (1/2)d(d+1) + \dim Q(A, B)$$

for a point (A, B) of $V \cap W$.

Now, if $(A, B) \in V$, we have $\dim T(A, B) = (1/2)d(d+1)$. Thus for a point belonging to $V \cap W$, the number of internal degrees of freedom of the structure is equal to $\dim Q(A, B)$, that is

$$\dim (\text{Ker } df(A, B)) - \dim T(A, B) = \max \{0, (1/2)(d+1)(d+2) - (m+n)\}$$

De là on peut conclure que toute réalisation d'un graphe biparti-complet $K_{m,n}$ en un point $(A, B) \in V \cap W \subset \mathbb{R}^{(m+n)d}$ est infinitésimalement rigide si $(1/2)(d+1)(d+2) - (m+n) \leq 0$ et infinitésimalement flexible si $(1/2)(d+1)(d+2) - (m+n) > 0$. D'autre part, on sait que l'ensemble des points réguliers de la fonction d'arêtes de $K_{m,n}$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}^{(m+n)d}$ (Roth 1981). Cet ensemble a donc une intersection non vide avec l'ouvert $V \cap W$. Cela suffit pour conclure sur le comportement infinitésimal de tous les points réguliers et puisque rigidité et rigidité infinitésimale sont deux concepts équivalents sur des points réguliers, on obtient le résultat voulu. \square

De façon évidente, $K_{1,1}$ est rigide dans toutes ses réalisations et quelle que soit la dimension de l'espace ambiant. Aussi, $K_{1,n}$ ($n > 1$) et $K_{m,1}$ ($m > 1$) sont flexibles dans toutes leurs réalisations dans \mathbb{R}^d ($d \geq 2$).

Ainsi, on connaît le comportement générique de tout graphe biparti-complet $K_{m,n}$ réalisé dans un espace \mathbb{R}^d fixé. On retrouve, entre autres, à titre de corollaires, des résultats énoncés dans (Bolker 1980).

Corollaire 3: Si $mn > 3(m+n) - 6$ alors $K_{m,n}$ est génériquement rigide dans \mathbb{R}^3 . \square

Corollaire 4: Si $mn > 2(m+n) - 3$ alors $K_{m,n}$ est génériquement rigide dans \mathbb{R}^2 . \square

À titre d'exemple, on peut dresser la liste des graphes biparti-complets qui sont génériquement flexibles dans \mathbb{R}^4 et dans \mathbb{R}^5 tout en possédant «assez» d'arêtes.

Dans \mathbb{R}^4 : $K_{6,7}$ $K_{6,8}$ $K_{7,7}$

Dans \mathbb{R}^5 : $K_{7,10}$ $K_{7,11}$ $K_{7,12}$ $K_{7,13}$ $K_{8,9}$ $K_{8,10}$ $K_{8,11}$ $K_{8,12}$ $K_{9,9}$ $K_{9,10}$ $K_{9,11}$ $K_{10,10}$

Il faut se rappeler que ceci demeure une classification générique du comportement, c'est-à-dire selon le comportement des réalisations en des points réguliers de la fonction d'arêtes. Pour une étude des mouvements infinitésimaux des réalisations de graphes biparti-complets, on consultera les récents articles de Walter Whiteley (Whiteley 1981), (Whiteley 1982). Son étude géométrique des mouvements amène une réponse complète à la question posée dans le titre de l'article de Roth et Bolker, «When is a bipartite graph a rigid framework?».

Graphes multiparti-complets

Les théorèmes qui précèdent nous permettent d'établir un résultat partiel au sujet du comportement générique des graphes multiparti-complets. En fait, nous pourrions reconnaître certains de ceux-ci comme des structures génériquement rigides dans un espace donné.

Théorème 5: Soit K_{m_1, m_2, \dots, m_k} un graphe k -parti-complet. Si il existe une partition (I, J) de l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$ telle que $K_{m,n}$ est un graphe biparti-complet génériquement rigide dans \mathbb{R}^d , où $m = \sum_I m_i$ et $n = \sum_J m_j$, alors le graphe K_{m_1, m_2, \dots, m_k} est génériquement rigide dans \mathbb{R}^d .

From this, one can conclude that every realization of a complete bipartite graph $K_{m,n}$ at a point $(A, B) \in V \cap W \subset \mathbb{R}^{(m+n)d}$ is infinitesimally rigid if $(1/2)(d+1)(d+2) - (m+n) \leq 0$ and infinitesimally flexible if $(1/2)(d+1)(d+2) - (m+n) > 0$. Furthermore, one knows that the set of regular points of the edge function of $K_{m,n}$ is an open dense subset of $\mathbb{R}^{(m+n)d}$ (Roth 1981). This set, thus, has a non-empty intersection with the open set $V \cap W$. This permits us to draw conclusions concerning the infinitesimal behavior of all regular points, and since rigidity and infinitesimal rigidity are equivalent concepts at regular points, one has the desired result. \square

Clearly, $K_{1,1}$ is rigid in all its realizations, whatever be the dimension of the ambient space. Also $K_{1,n}$ ($n > 1$) and $K_{m,1}$ ($m > 1$) are flexible in all their realizations in \mathbb{R}^d ($d \geq 2$).

Thus, one knows the generic behavior of every complete bipartite graph $K_{m,n}$ realized in a fixed space \mathbb{R}^d . We recover as corollaries, among others, the results given in (Bolker 1980).

Corollary 3: If $mn > 3(m+n) - 6$, then $K_{m,n}$ is generically rigid in \mathbb{R}^3 . \square

Corollary 4: If $mn > 2(m+n) - 3$, then $K_{m,n}$ is generically rigid in \mathbb{R}^2 . \square

As examples we give the list of complete bipartite graphs which are generically flexible in \mathbb{R}^4 and in \mathbb{R}^5 despite the fact they have "enough" edges.

In \mathbb{R}^4 : $K_{6,7}$ $K_{6,8}$ $K_{7,7}$

In \mathbb{R}^5 : $K_{7,10}$ $K_{7,11}$ $K_{7,12}$ $K_{7,13}$ $K_{8,9}$ $K_{8,10}$ $K_{8,11}$ $K_{8,12}$ $K_{9,9}$ $K_{9,10}$ $K_{9,11}$ $K_{10,10}$

One should remember that this is a generic classification of behavior, that is, according to the behavior of realizations at regular points of the edge function. For a study of infinitesimal movements of realizations of complete bipartite graphs, consult the recent articles by Walter Whiteley (Whiteley 1981), (Whiteley 1982). His geometric study of movements provides a complete response to the question posed in the title of the article by Roth and Bolker, "When is a bipartite graph a rigid framework?".

Complete multi-partite graphs

The preceding theorems permit us to establish a partial result concerning the generic behavior of complete multipartite graphs. In fact, we can recognize certain of them as generically rigid structures in a given space.

Theorem 5: Let K_{m_1, m_2, \dots, m_k} be a complete k -partite graph. If there is a partition (I, J) of the set $\{1, 2, \dots, k\}$ such that, $K_{m,n}$ is a complete bipartite graph, generically rigid in \mathbb{R}^d where $m = \sum_I m_i$ and $n = \sum_J m_j$, then the graph K_{m_1, m_2, \dots, m_k} is generically rigid in \mathbb{R}^d .

Démonstration: Le graphe $K_{m,n}$ possède $m+n$ sommets et mn arêtes alors que le graphe K_{m_1, m_2, \dots, m_k} possède $\sum_{i=1}^k m_i$ sommets et $\sum_{1 \leq i < j \leq k} m_i m_j$ arêtes.

Or

$$\sum_{i=1}^k m_i = \sum_I m_i + \sum_J m_j = m + n$$

et

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} m_i m_j \geq (\sum_I m_i)(\sum_J m_j) = mn$$

De plus, toute arête de $K_{m,n}$ est une arête de K_{m_1, m_2, \dots, m_k} . Ainsi ce dernier n'est rien d'autre que le graphe $K_{m,n}$ auquel on a ajouté un certain nombre d'arêtes. Donc la rigidité générique de $K_{m,n}$ dans R^d entraînera la rigidité générique de K_{m_1, m_2, \dots, m_k} dans R^d . \square

Exemple: Considérons le graphe triparti-complet $K_{3,2,1}$ dans ses réalisations dans le plan. On sait, par le théorème 1, que les graphes $K_{1,5}$ et $K_{2,4}$ ont toutes leurs réalisations infinitésimalement flexibles dans R^2 . Mais $K_{3,3}$ est génériquement rigide dans R^2 (Corollaire 4); plus que cela, une réalisation de $K_{3,3}$ dans R^2 est infinitésimalement rigide à moins que ses six sommets se situent sur une conique (Théorème 14 de (Bolker 1980)). Ainsi $K_{3,2,1}$ est infinitésimalement rigide dans R^2 au moins quand ses six sommets ne se situent pas sur une conique; il est donc génériquement rigide dans R^2 .

Adresse de l'auteur:

Jean-Luc Raymond
Chargé de cours
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succursale "A"
Montréal, Québec, H3C 3P8, Canada

Bibliographie

Le code qui apparaît dans la première colonne de chaque entrée bibliographique est constitué de trois parties séparées par des tirets. La première partie indique s'il s'agit d'un Livre, d'un Article, d'une Pré-impression ou de Notes de cours. La deuxième partie indique si le texte a été rédigé pour des Mathématiciens, des Architectes ou des Ingénieurs. La partie finale indique si le texte touche un ou plusieurs des thèmes principaux de la topologie structurale: Géométrie (en général), Polyèdres, Juxtaposition ou Rigidité.

Les mots-clés ou les annotations de la colonne finale signalent la pertinence de l'ouvrage à la recherche en topologie structurale, mais ne témoignent pas nécessairement de l'ensemble du contenu ou de l'intention de l'auteur.

Proof: The graph $K_{m,n}$ has $m+n$ vertices and mn edges, so that the graph K_{m_1, m_2, \dots, m_k} has $\sum_{i=1}^k m_i$ vertices and $\sum_{1 \leq i < j \leq k} m_i m_j$ edges.

Now

$$\sum_{i=1}^k m_i = \sum_I m_i + \sum_J m_j = m + n$$

and

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} m_i m_j \geq (\sum_I m_i)(\sum_J m_j) = mn$$

Furthermore, every edge of $K_{m,n}$ is an edge of K_{m_1, m_2, \dots, m_k} . Thus, the latter is none other than the graph $K_{m,n}$ to which one has added a certain number of edges. Thus, the generic rigidity of $K_{m,n}$ in R^d implies the generic rigidity of K_{m_1, m_2, \dots, m_k} in R^d . \square

Example: We consider the complete tripartite graph $K_{3,2,1}$ in its realizations in the plane. We know by Theorem 1 that the graphs $K_{1,5}$ and $K_{2,4}$ have all their realizations infinitesimally flexible in R^2 . But $K_{3,3}$ is generically rigid in R^2 (Corollary 4); moreover, a realization of $K_{3,3}$ in R^2 is infinitesimally rigid unless its six vertices lie on a conic (Theorem 14 (Bolker 1980)). Thus, $K_{3,2,1}$ is infinitesimally rigid in R^2 unless its six vertices lie on a conic; it is thus generically rigid in R^2 .

Address of the author:

Jean-Luc Raymond
Chargé de cours
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succursale "A"
Montréal, Québec, H3C 3P8, Canada

Bibliography

The code in the first block of each bibliographic item consist of three parts, separated by dashes. The first letter indicates whether the item is a book (Livre), Article, Preprint or course notes (Notes de cours). The middle letter(s) indicates whether the piece was intended primarily for an audience of Mathematicians, Architects or engineers (Ingénieurs). The final letter(s) indicates if the piece touches on one or more of the principal themes of structural topology: Geometry (in general), Polyhedra, Juxtaposition or Rigidity.

The key-words or other annotations in the third column are intended to show the relevance of the work to research in structural topology, and do not necessarily reflect its overall contents or the intent of the author.

<p>Bolker 1980</p> <p>Ethan Bolker et Ben Roth</p> <p style="text-align: right;">A-M-R</p>	<p>When is a Bipartite Graph a Rigid Framework?</p> <p>Pacific Journal of Math., 90 (1980), 27-44.</p>	<p>Espace des autocontraintes des graphes biparti-complets, surfaces quadriques • The stress space of complete bipartite graphs, quadratic spaces.</p>
---	---	--

Raymond 1982 Jean-Luc Raymond P-M-R	Sur la rigidité des graphes Mémoire de maîtrise, Département de mathématiques, Université du Québec à Montréal, août 1982.	Rigidité simple, infinitésimale et statique, graphes biparti-complets, structures tendues, rigidité et énergie • Simple rigidity, infinitesimal and static, complete bipartite graphs, tensile structures, rigidity and energy.
Roth 1981 Ben Roth A-M-R	Rigid and Flexible Frameworks American Math. Monthly, vol. 88, no. 1, 6-21.	Introduction à la rigidité, simple, infinitésimale et statique • Introduction to rigidity, simple, infinitesimal and static.
Whiteley 1979 Walter Whiteley A-MIA-R	Motions of a Bipartite Framework Topologie structurale, 3 (1979), 62-63.	Commentaires sur (Bolker 1980) avec des observations sur les mouvements • Comments on (Bolker 1980) with observations about movements.
Whiteley 1981 Walter Whiteley A-M-R	Infinitesimal Motions of a Bipartite Framework Pacific Journal of Math., à paraître.	Mouvements infinitésimaux à partir des surfaces quadriques, l'ajout de barres à un graphe biparti-complet, l'application aux charpentes • Infinitesimal movements starting from quadratic surfaces, adding bars to a complete bipartite graph, application to frameworks.
Whiteley 1982 Walter Whiteley A-MIA-R	Motions of Trusses and Bipartite Frameworks Topologie structurale, 7 (1982), 61-68.	Mouvements des graphes biparti-complets et application au réseau octet et réseau mi-octaédrique tétraédrique • Movements of complete bipartite graphs with application to the half-octahedral tetrahedral truss.

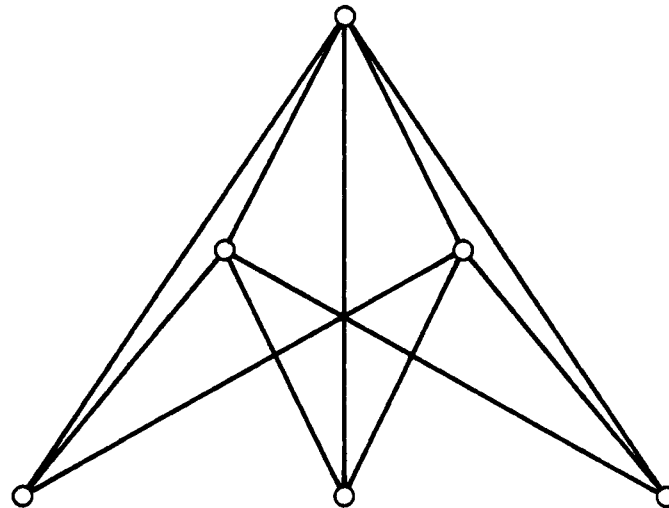


Figure 1