Four-Dimensional Regular Hexagon

by Koji Miyazaki

Résumé

Topologie structurale #10, 1984

L'hexagone régulier quadridimensionnel

On comprend facilement que les analogues quadridimensionnels du triangle régulier, du carré et du pentagone régulier (dans cet article, ils sont tous composés uniquement d'arêtes et ne comportent aucun élément à deux dimensions) sont respectivement le tétraèdre régulier, le cube et le dodécaèdre régulier (dans cet article, ils sont tous composés uniquement de faces et ne comportent aucun élément à trois dimensions). Alors, quel polyèdre est l'analogue quadridimensionnel de l'hexagone régulier, c'est-à-dire un hexagone régulier quadridimensionnel? Si nous résolvons cette énigme, nous pourrons représenter un flocon de neige, un nid d'abeille, un crayon, etc. quadri-dimensionnels.

Abstract

Structural Topology #10, 1984

It is easily understood that the 4-dimensional analogues of the regular triangle, square, and regular pentagon (in this paper, all are composed of only edges and have no portion of 2-space) are the regular tetrahedron, cube, and regular dodecahedron (in this paper, all are composed of only faces and have no portion of 3-space) respectively. Then, which polyhedron is the 4-dimensional analogue of the regular hexagon, i.e. 4-dimensional regular hexagon? If this riddle is solved, we can see a 4-dimensional snowflake, honeycomb, pencil, etc.

Propriétés géométriques de l'hexagone régulier. Les principales propriétés géométriques de l'hexagone régulier se rapportant à cet article sont les suivantes:

1. Il possède un cercle inscrit auquel toutes les arêtes sont adjacentes en leur milieu.
2. Il possède un cercle circonscrit auquel tous les sommets touchent.
3. Toutes les arêtes sont d'égale longueur.
4. Tous les angles internes sont égaux.
5. Il peut créer un pavage infini du plan.
6. Tous les sommets sont situés sur les axes isométriques tridimensionnels qui se croisent les uns les autres sur un plan à 120° (**Figure 1**).
7. C'est un parallélogone.
8. Deux triangles réguliers mutuellement duals peuvent y être inscrits (**Figure 2**).
9. On l'obtient par l'intersection de deux triangles réguliers qui sont mutuellement duals (**Figure 2**).
10. Il est étroitement apparenté à la juxtaposition dense de cercles.

Geometrical Properties of Regular Hexagon. The main geometrical properties of the regular hexagon which relate to this paper are as follows:

1. It has an inscribed circle which all midpoints of edges contact.
2. It has a circumscribed circle which all vertices contact.
3. All edges have equal length.
4. All internal angles are equal.
5. It can tessellate infinitely a plane.
6. All vertices are on the 3-dimensional isometric axes which intersect each other in the plane at 120° (**Figure 1**).
7. It is a parallelogon.
8. It contains two inscribed regular triangles which are mutually dual (**Figure 2**).
9. It can be obtained by the intersection of two regular triangles which are mutually dual (**Figure 2**).
10. It closely relates to the closest circle arrangement.

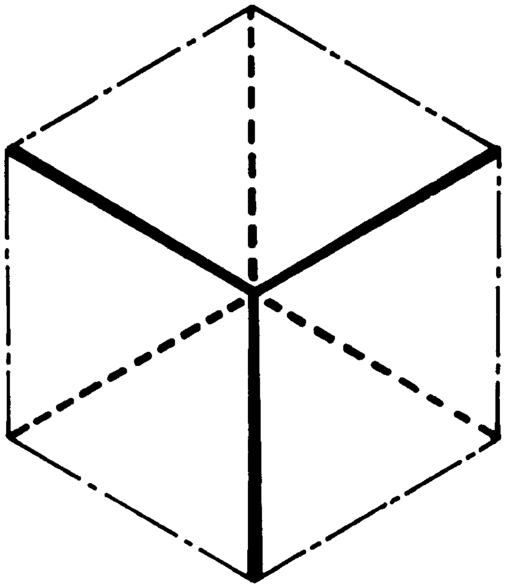


Figure 1

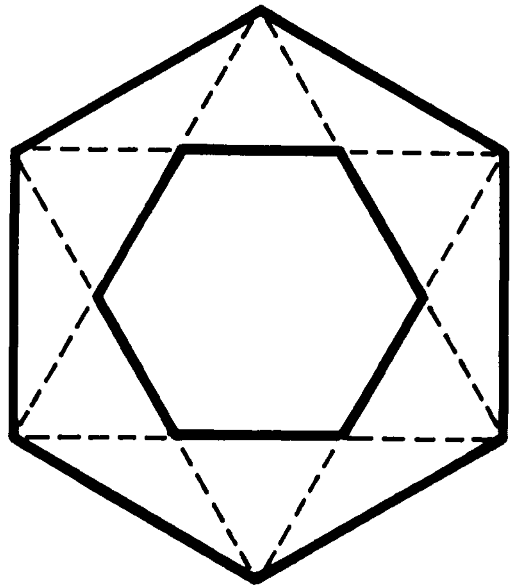


Figure 2

Propriétés géométriques de l'hexagone régulier quadridimensionnel. Les propriétés géométriques de l'hexagone régulier mentionnées ci-dessus peuvent être transposées à l'espace à quatre dimensions comme suit:

1. Il possède une sphère inscrite à laquelle sont adjacentes chacune des faces de l'hexagone en leur milieu.
2. Il possède une sphère circonscrite à laquelle tous les sommets touchent.
3. Toutes les faces sont identiques.
4. Tous les angles solides sont égaux.
5. Il peut remplir à l'infini un espace à trois dimensions.
6. Tous les sommets sont situés sur les axes isométriques quadridimensionnels qui se croisent les uns les autres dans un espace à trois dimensions à 109°28′ (**Figure 3**).
7. C'est un parallèloèdre.
8. Deux polyèdres réguliers mutuellement duals peuvent y être inscrits.
9. On l'obtient par l'intersection de deux polyèdres réguliers qui sont mutuellement duals.
10. Il est étroitement apparenté à la juxtaposition dense de sphères.

Comparaison de certains polyèdres considérés comme des hexagones réguliers quadridimensionnels. Certains polyèdres peuvent être considérés comme des hexagones réguliers quadridimensionnels. Le **Tableau 1** les compare en tenant compte des propriétés géométriques mentionnées ci-haut. Les intersections marquées par des astérisques indiquent que les propriétés géométriques ont été satisfaites.

Geometrical Properties of 4-Dimensional Regular Hexagon. The above mentioned geometrical properties of the regular hexagon can be extended into 4-space as follows:

1. It has an inscribed sphere which all central points of faces contact.
2. It has a circumscribed sphere which all vertices contact.
3. All faces are identical.
4. All solid-angles are equal.
5. It can fill infinitely a 3-space.
6. All vertices are on the 4-dimensional isometric axes which intersect each other in a 3-space at 109°28′ (**Figure 3**).
7. It is a parallelohedron.
8. It contains two inscribed regular polyhedra which are mutually dual.
9. It can be obtained by the intersection of two regular polyhedra which are mutually dual.
10. It closely relates to the closest sphere arrangement.

Comparison of some Polyhedra as 4-Dimensional Regular Hexagon. There are some polyhedra which can be thought of as the 4-dimensional regular hexagon. **Table 1** shows their comparison according to the above mentioned geometrical properties. The crossings having asterisk show that the geometrical properties are satisfied.

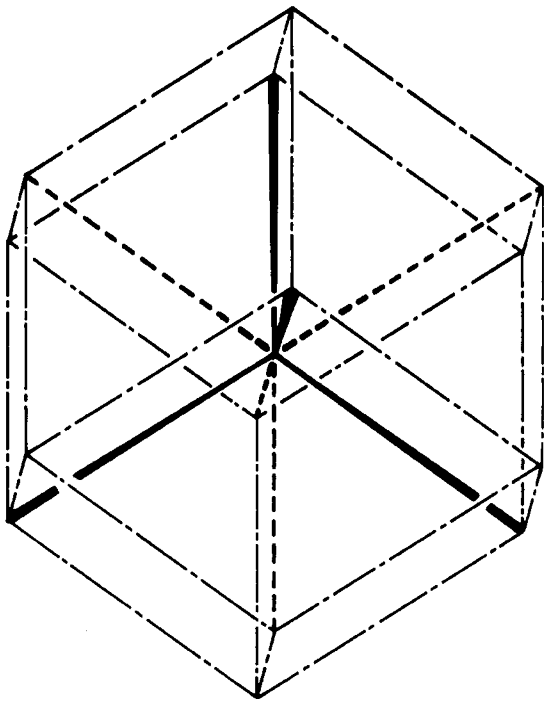


Figure 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Cube	*	*	*	*	*	*	*	*			Cube
Octaèdre régulier	*	*	*	*					*		Regular Octahedron
Prisme hexagonal		*		*	*		*				Hexagonal Prism
Tétraèdre tronqué		*		*					*		Truncated Tetrahedron
Octaèdre tronqué		*		*					*	*	Truncated Octahedron
Cuboctaèdre		*		*					*		Cuboctahedron
Rhombidodécaèdre	*		*		*	*	*	*		*	Rhombic Dodecahedron

Tableau 1 — Table 1

Le cube considéré comme hexagone régulier quadridimensionnel. D'après le **Tableau 1**, le cube possède le plus grand nombre d'astérisques. Par conséquent, on peut penser que le cube est celui qui se rapproche le plus de l'hexagone quadridimensionnel régulier. Feu David Brisson a dessiné des flocons de neige quadridimensionnels inscrits dans des cubes comme on peut le voir à la **Figure 4**. Il a d'abord compris que les flocons de neige tridimensionnels sont des étoiles de David subdivisées selon la théorie fractale de Mandelbrot. Ensuite, il a imaginé des flocons quadridimensionnels produits par une subdivision similaire de la stella octangula de Kepler. Il semble que, pour lui, l'hexagone régulier quadridimensionnel était le cube. Toutefois, le cube ne peut pas satisfaire aux propriétés géométriques 9 et 10, et de plus, il est de manière certaine l'analogue du carré.

Le rhombidodécaèdre considéré comme hexagone régulier quadridimensionnel. Dans cet article, le rhombidodécaèdre dont toutes les faces ont des diagonales de rapport 1: $\sqrt{2}$ et son dual, le cuboctaèdre, sont considérés comme les hexagones quadridimensionnels réguliers. Ensemble, ils peuvent satisfaire à toutes les propriétés géométriques. En ce qui concerne les propriétés 8 et 9, la **Figure 5** illustre comment elles sont satisfaites. De plus, toutes les arêtes et les segments de droite reliant le centre du cuboctaèdre à tous ses sommets sont mutuellement égales à la longueur du rayon de la sphère circonscrite, ce qui était aussi le cas pour l'hexagone régulier. Dépendant des circonstances, l'on adopte le rhombidodécaèdre ou le cuboctaèdre, bien que le premier soit satisfaisant dans la plupart des cas.

Cube as 4-Dimensional Regular Hexagon. According to **Table 1**, the cube has the largest number of the asterisks. Therefore, it may be thought that the cube is closest to a 4-dimensional regular hexagon. The late David Brisson designed 4-dimensional snowflakes inscribed in cubes as in **Figure 4**. First, he grasped that 3-dimensional snowflakes are the stars of David subdivided according to the fractal theory of Mandelbrot. And next, he imagined 4-dimensional snowflakes such that the Kepler's stella octangula is subdivided. It seems that the 4-dimensional regular hexagon for him was the cube. However, the cube can not satisfy the geometrical properties 9 and 10, and furthermore, it is surely the analogue of the square.

Rhombic Dodecahedron as 4-Dimensional Regular Hexagon. In this paper, the rhombic dodecahedron all of whose faces have the diagonals of the ratio 1: $\sqrt{2}$ and its dual, the cuboctahedron, are thought of as the 4-dimensional regular hexagons. They can satisfy all of the geometrical properties by helping one another. Concerning properties 8 and 9, the situations are as in **Figure 5**. And moreover, all of the edges and lines connecting the body-center with all the vertices of the cuboctahedron are mutually equal to the length of the radius of the circumscribed sphere, as in the condition for the regular hexagon. It depends upon circumstances which of the rhombic dodecahedron or cuboctahedron is adopted, though the former may be suitable in most cases.

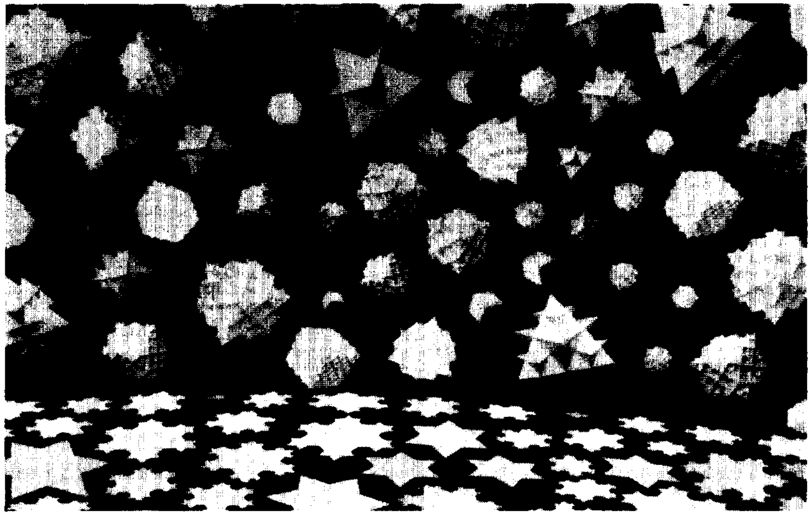


Figure 4

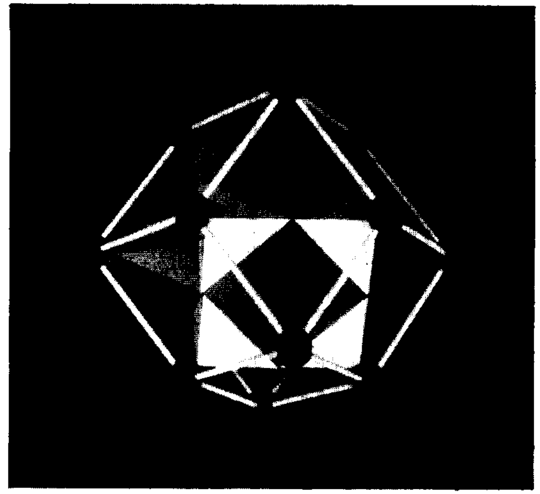


Figure 5

Flocon de neige quadridimensionnel. La **Figure 6** présente des constructions de flocons de neige quadridimensionnels à partir de rhombidodécaèdres. Le 7 avril 1983, à la suggestion d'un japonais, la navette spatiale «Challenger» a tenté de faire des flocons de neige dans l'espace pour les soustraire à l'action de la gravité. Malheureusement, cela n'a pas réussi. Mais si cela avait réussi, les flocons de neige seraient tels qu'à la **Figure 6**, parce qu'une goutte d'eau circulaire devient sphérique dans l'espace, lorsqu'elle n'est pas soumise à l'action de la gravité. C'est la même chose dans l'espace à quatre dimensions.

Nid d'abeille quadridimensionnel. La **Figure 7** présente un nid d'abeille quadridimensionnel et une abeille quadridimensionnelle.

Dans un espace tridimensionnel, un nid d'abeille est composé de tubes, chacun ayant la forme d'un rhombidodécaèdre, c'est-à-dire la forme extérieure d'un cube à quatre dimensions allongé le long d'un ensemble d'arêtes mutuellement parallèles. Et quand ce nid d'abeille à trois dimensions est coupé par un plan perpendiculairement aux arêtes allongées, le pavage régulier qui apparaît est composé uniquement d'hexagones réguliers; en d'autres mots, nous apercevons une juxtaposition dense de cercles. Dans ce cas, chaque hexagone régulier devient un parallélo-hexagone lorsqu'il est projeté obliquement sur un plan. Au contraire, la base de chaque tube devient un hexagone régulier composé de trois losanges lorsqu'il est projeté orthogonalement sur un plan perpendiculaire aux arêtes allongées.

4-Dimensional Snowflake. **Figure 6** shows 4-dimensional snowflakes built according to the rhombic dodecahedra. On April 7, 1983, the space shuttle "Challenger" attempted to make snowflakes in space having no gravity according to a proposal by a Japanese. Regretfully, it ended in a failure. But, if it proved successful, the snowflakes might have become as in **Figure 6** because a circular drop of water would become spherical in space, having no gravity. So also in 4-space.

4-Dimensional Honeycomb. **Figure 7** shows a 4-dimensional honeycomb and a 4-dimensional bee.

In 3-space, a honeycomb is composed of some tubes each of which has the shape of a rhombic dodecahedron, i.e. the outer shape of the 4-cube, elongated along one set of mutually parallel edges. And when this 3-honeycomb is cut perpendicular to the elongated edges by a plane, the regular tessellation created uses only regular hexagons; in other words, the closest circle arrangement appears as the section. Here, each regular hexagon becomes a parallelo-hexagon when it is obliquely projected onto a plane. On the contrary, the base of each tube becomes a regular hexagon composed of three rhombi when it is orthogonally projected onto a plane which is perpendicular to the elongated edges.

Donc, dans l'espace à quatre dimensions, un nid d'abeille peut être composé de tubes ayant chacun la forme d'un rhombicosaèdre, c'est-à-dire la forme extérieure du cube à cinq dimensions allongé le long d'un ensemble d'arêtes mutuellement parallèles. Et lorsque ce nid d'abeille quadridimensionnel est coupé par un hyper-plan, perpendiculairement aux arêtes allongées, le réseau d'alvéoles qui apparaît possède uniquement des rhombidodécaèdres; donc, nous apercevons une juxtaposition dense de sphères. Ici, chaque rhombidodécaèdre devient un parallélo-dodécaèdre, par exemple, le «second rhombidodécaèdre» de Bilinski, lorsqu'il est projeté obliquement dans un espace à trois dimensions. Au contraire, la base de chaque tube devient un rhombidodécaèdre composé de quatre rhomboïdes lorsqu'il est projeté de façon orthogonale dans un espace à trois dimensions perpendiculaire aux arêtes allongées.

Une abeille quadridimensionnelle possède une tête et un corps, mais trois yeux, trois antennes et trois ailes épaisses comme des carottes.

Therefore, in 4-space, a honeycomb may be composed of some tubes each of which has the shape of a rhombic icosahedron, i.e. the outershape of the 5-cube, elongated along one set of mutually parallel edges. And when this 4-honeycomb is cut perpendicular to the elongated edges by a hyper-plane, the «honeycomb» has only rhombic dodecahedra; so the closest sphere arrangement appears as the section. Here, each rhombic dodecahedron becomes a parallelo-dodecahedron, e.g. Bilinski's «second rhombic dodecahedron», when it is obliquely projected onto 3-space. On the contrary, the base of each tube becomes a rhombic dodecahedron composed of four rhomboids when it is orthogonally projected into a 3-space which is perpendicular to the elongated edges.

A 4-dimensional bee has one head and one body, but three each of eyes, antennae, and wings thick like carrots.

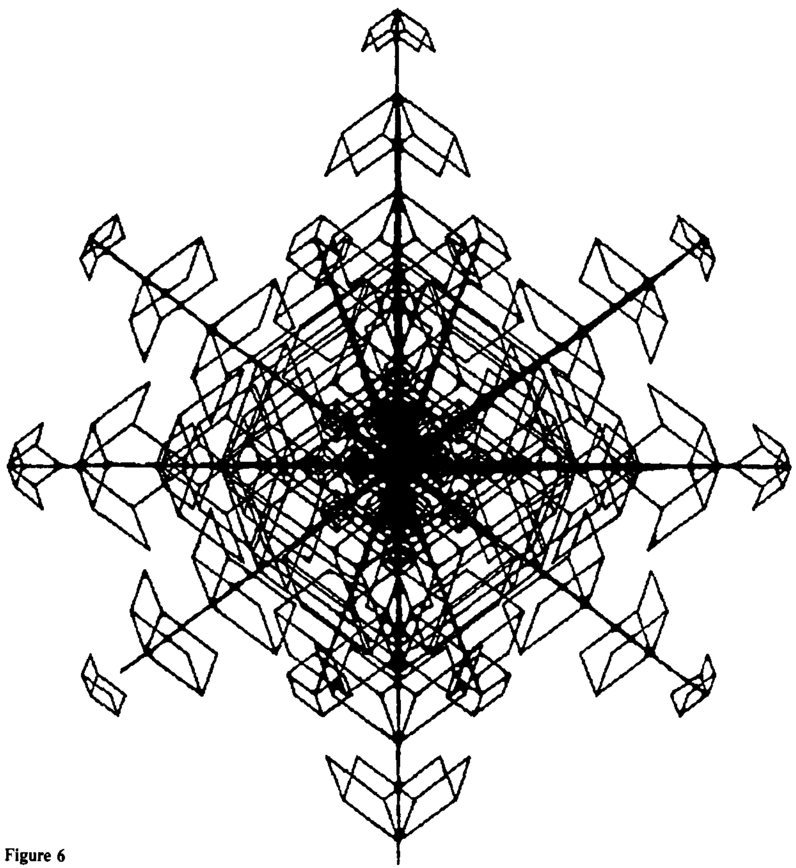
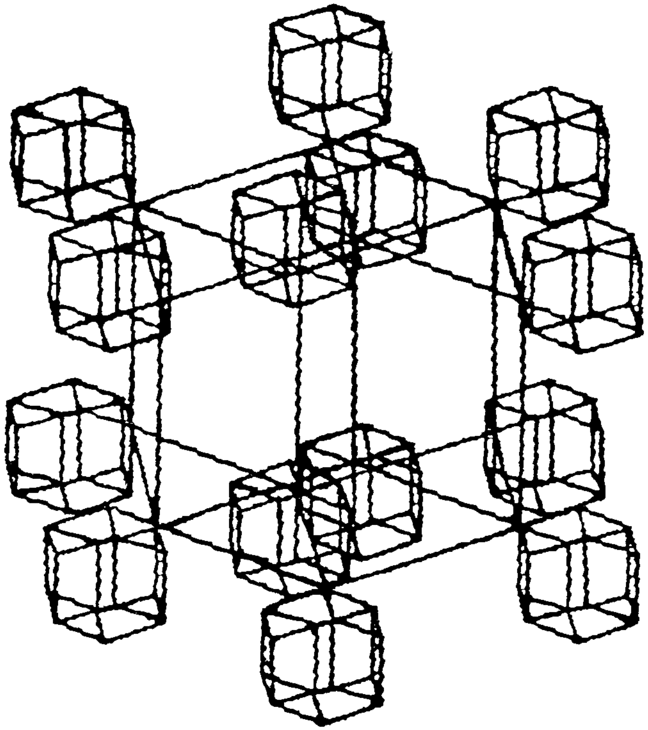


Figure 6



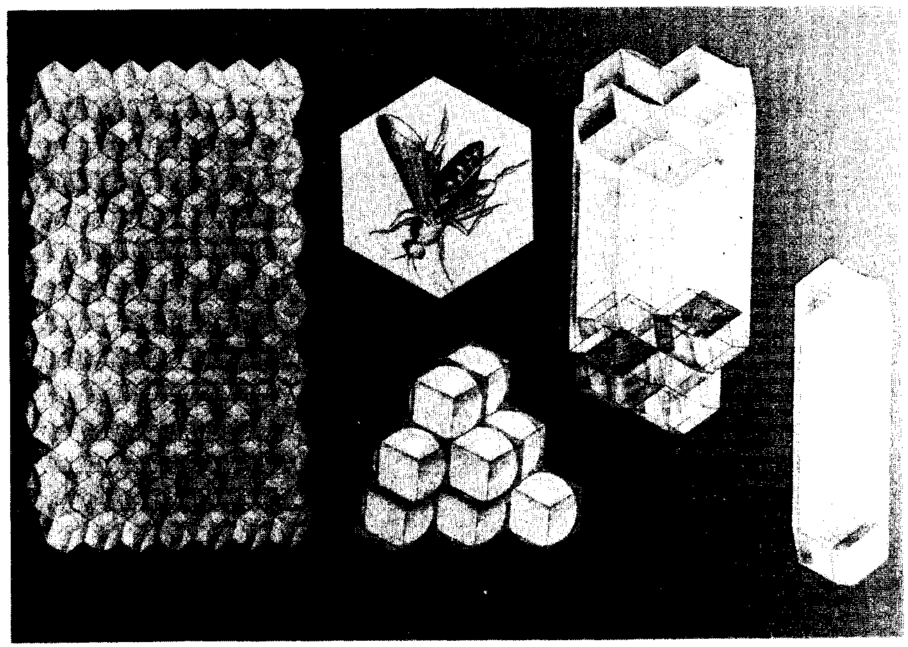


Figure 7

Un crayon quadridimensionnel. La **Figure 8** présente un crayon quadridimensionnel. Dans un espace à trois dimensions, un crayon a la forme d'un prisme hexagonal régulier dont un des bouts est l'hexagone régulier ou n'importe quel parallélo-hexagone et dont l'autre bout est aiguisé en forme d'un cône circulaire dont la base a six hyperboles comme arêtes. Alors, dans un espace à quatre dimensions, un crayon a la forme d'un hyper-prisme hexagonal dont un des bouts est le rhombidodécaèdre ou tout parallélo-dodécaèdre et dont l'autre bout est aiguisé en forme d'un hyper-cône circulaire dont la base possède douze hyperboloïdes comme faces (des hyper-arêtes).

4-Dimensional Pencil. **Figure 8** shows a 4-dimensional pencil. In 3-space, a pencil has the shape of the regular hexagonal prism of which one end is the regular hexagon or any parallelo-hexagon and the other end is shaved in the form of a circular cone whose base has six hyperbolas as the edges. So, in 4-space, a pencil has the shape of the hyper-hexagonal prism of which one end is the rhombic dodecahedron or any parallelo-dodecahedron and the other end is shaved in the form of a hyper-circular cone whose base has twelve hyperboloids as the faces (hyper-edges).

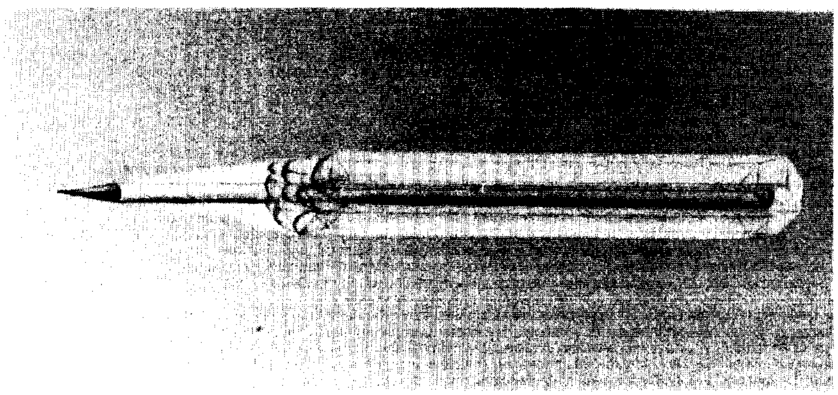


Figure 8

Addendum. Lors de la seconde tentative, le 1er septembre 1983, «Challenger» réussit à fabriquer des flocons de neige dans l'espace, en état d'apesanteur. Bien que la définition des images obtenues sur un écran de Braun laisse à désirer (**Figure 9**), il est possible de constater la ressemblance de celles-ci avec nos dessins par ordinateur de flocons de neige quadridimensionnels rhombidodécaédriques (**Figure 10**).

Addendum. On September 1, 1983, "Challenger" proved successful in the second attempt to make snowflakes in space having no gravity, though the pictures on a Braun tube were not so clear (**Figure 9**). They resemble our computer graphics of rhombic dodecahedral 4-dimensional snowflakes (**Figure 10**).

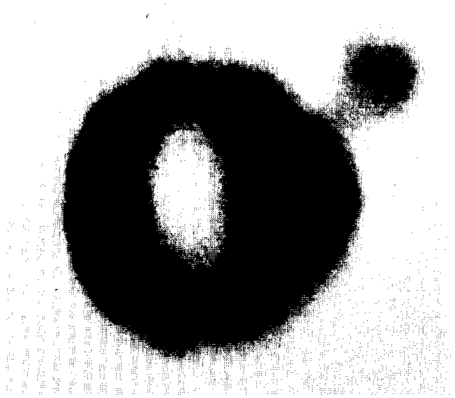


Figure 9*

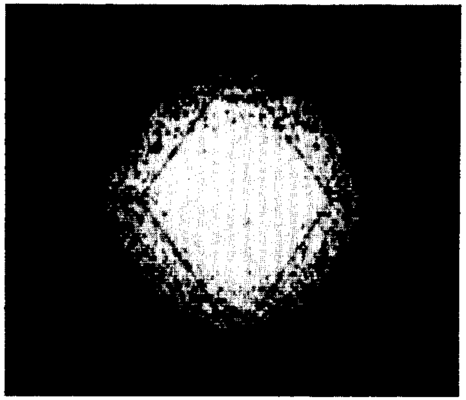


Figure 10*

Adresse de l'auteur:

Koji Miyazaki
Kobe University
1-2-1 Tsurukabutu Nada-Ku
Kobe-Shi 657
Japan

Address of the author:

Koji Miyazaki
Kobe University
1-2-1 Tsurukabutu Nada-Ku
Kobe-Shi 657
Japan

* Une gracieuseté du Journal Asahi

* By the courtesy of the Asahi Newspaper