Review: Form of Space: Polygons, Polyhedra and Polytopes

by Koji Miyazaki*

Topologie structurale #10, 1984

Compte rendu: La forme de l'espace: polygones, polyèdres et polytopes

Sommaire

Dans ce livre, on entreprend une aventure graphique dans des mondes fantastiques à deux, trois ou quatre dimensions, en utilisant des polygones (ou 2-polytopes), des polyèdres (ou 3-polytopes) et des polytopes (ou 4-polytopes). Les sujets s'étendent sur plusieurs époques et plusieurs pays, mais une emphase particulière est mise sur le passé du Japon. Les étoiles en sont Platon et les polygones, Kepler et les polyèdres, et Fuller et les polytopes.

Dans la Grèce antique du quatrième siècle avant Jésus-Christ, Platon, fasciné par Pythagore, soutenait dans son *Timaeus* que le cosmos était rempli de polygones, en dépit des objections d'Aristote et des autres. On peut dire qu'il eut une influence certaine sur Euclide et sur plusieurs autres encore. Dans l'Allemagne du dix-septième siècle, Kepler fut ébahi par les découvertes de Copernic et il construisit l'espace à partir de polyèdres dans son *Harmonices Mundi*, en dépit du mépris de Galilée et des autres. Ainsi, il traça la route à Newton et à bien d'autres. Aujourd'hui aux États-Unis, Fuller, influencé par Einstein, imagine dans son *Synergetics* que l'univers est rempli de polytopes, malgré la perplexité de plusieurs personnes, ce qui ne manque pas d'amuser Coxeter ainsi que plusieurs autres.

* Koji Miyazaki, *La forme de l'espace: polygones, polyèdres et polytopes*, Asakura Publishing Company, Tokyo, 1983.

Structural Topology #10, 1984

Outline

A graphic adventure in two-, three- and four-dimensional fantastic worlds is undertaken in this book, using polygons (or 2-polytopes), polyhedra (or 3-polytopes), and polytopes (or 4-polytopes). The topics extend over many epochs and countries, with particular emphasis on the past in Japan. The stars are Plato and polygons, Kepler and polyhedra, and Fuller and polytopes.

Plato in the ancient Greece of the fourth century B.C., who was fascinated by Pythagoras, explained the cosmos filled with polygons in his *Timaeus*, in spite of the objection of Aristotle et al., and had influence on Euclid et al. Kepler in Germany of the 17th century A.D., who was astonished at Copernicus, constructed the space filled with polyhedra in his *Harmonices Mundi* in spite of the disregard of Galileo et al. and gave a hint to Newton et al. Fuller in the U.S.A. of today, who has been impressed with Einstein, is imagining the universe filled with polytopes in his *Synergetics* in spite of the puzzlement of some people, and which amuses Coxeter et al.

* Koji Miyazaki, *Form of Space: Polygons, Polyhedra and Polytopes*, Asakura Publishing Company, Tokyo, 1983.

Au milieu de la civilisation de chaque époque, tous les trois effectuèrent des recherches de façon similaire sur les macro, medio et micro univers, seuls, sans l'aide de télescope ou de microscope et sans tenir compte des suggestions des autres. Finalement, chacun trouva une façon de parvenir à l'espace à quatre dimensions, bien qu'aucun n'en ait donné une description concrète.

Quel spectacle nous offre donc l'espace à quatre dimensions? Les indices permettant de nous le représenter se trouvent dans les polygones de Platon, les polyèdres de Kepler et dans les polytopes de Fuller.

Par exemple, dans l'espace à trois dimensions, un trèfle à trois feuilles est composé de trois feuilles minces et s'inscrit dans le triangle régulier. Mais dans l'espace à quatre dimensions, un tel trèfle sera composé de quatre feuilles épaisses et s'inscrira dans le tétraèdre régulier. De façon similaire, dans l'espace à trois dimensions, un trèfle à quatre feuilles possède quatre feuilles minces et s'inscrit dans le carré. Mais dans l'espace à quatre dimensions, un tel trèfle aura de six à huit feuilles épaisses et s'inscrira dans le cube ou l'octaèdre régulier, les deux étant mutuellement duals. Dans l'espace à trois dimensions, une fleur de cerisier possède cinq pétales minces et s'épanouit dans le pentagone régulier. Mais dans l'espace à quatre dimensions, une fleur de cerisier hyperspatiale aura de douze à vingt feuilles et s'épanouira dans le dodécaèdre régulier ou l'icosaèdre, tous deux étant aussi mutuellement duals. L'arc-en-ciel hyperspatial, dont la forme n'est pas semi-circulaire, mais semi-sphérique, recouvre un jardin de fleurs à quatre dimensions. Les diamants, dans les mines de l'espace à trois dimensions, ont souvent la forme d'un cube ou d'un octaèdre régulier. Mais dans l'espace à quatre dimensions, ils ont la forme de l'hypercube ou de la cellule-16. Les étoiles, dans un ciel de l'espace à trois dimensions, scintillent comme si elles étaient de petits dodécaèdres étoilés. Mais dans l'espace à quatre dimensions, elles scintillent comme si elles étaient de petites cellules-120 étoilées.

En résumé, les polygones, les polyèdres et les polytopes sont les outils efficaces ou les hiéroglypes permettant d'explorer et de décrire les macro, medio et micro mondes ou le monde multidimensionnel sans aucun télescope ou microscope, et sans avoir à tenir compte des suggestions des autres.

At the center of the civilization of each time, each of these three investigated in a similar manner on the macro, medio, and micro universes, by themselves, without any telescope or microscope and without paying any attention to suggestions by others. And at last, each found his way to the entrance of the four-dimensional space, though none gave any concrete description of the scene.

What spectacle does spread out in the four-dimensional space? The clues to show it are in Plato's polygons, Kepler's polyhedra, and Fuller's polytopes.

For example, in 3-space, a three-leaf clover has three thin leaves and opens in the regular triangle. So in 4-space, such a clover may have four thick leaves and open in the regular tetrahedron. Similarly, in 3-space, a four-leaf clover has four thin leaves and opens in the square. So in 4-space, such a clover may have six or eight thick leaves and open in the cube or regular octahedron, both of which are mutually dual. In 3-space, a cherry blossom has five thin petals and blooms in the regular pentagon. So in 4-space, a hyper-cherry blossom has twelve or twenty thick leaves and blooms in the regular dodecahedron or icosahedron, both of which are also mutually dual. The hyper-rainbow, whose shape is not semi-circular, but semi-spherical, covers a four-dimensional flower garden. Diamonds in three-dimensional mines have often the cubic or regular octahedral shapes. So in 4-space, they have the shapes of the hyper-cube or 16-cell. Stars in three-dimensional sky sparkle as if they were the small stellated dodechaedra. So in 4-space, they sparkle as if they were the small stellated 120-cell.

To sum up, the polygons, polyhedra, and polytopes are the effective tools or hieroglyphs to investigate and describe the macro, medio, and micro worlds or the multi-dimensional world without any telescope or microscope, and without paying any attention to suggest-ions by others.

Table des matières

Contents

4. **La famille d'Archimède.** Les polyèdres réguliers de Platon sont déformés de manière symétrique par Archimède, etc.

5. **L'orbite de Kepler.** La coupe cosmique de Kepler en tant que réceptacle des planètes et les dômes géodésiques de Fuller en tant que réceptacles des êtres humains, tous les deux étant déterminés par les polyèdres réguliers, sont comparés les uns aux autres.

6. **Le secret de Kukai.** Les polyèdres réguliers dont on fait mention dans l'histoire ancienne du Japon se retrouvent dans les reliques saintes ou dans les légendes à la mémoire de Kukai, etc.

7. **La synergie de Fuller.** Le monde microscopique construit selon les *Synergetics* de Fuller est expliqué par l'utilisation d'arrangements polyédriques de sphères.

8. **Le palais de Kelvin.** Les juxtapositions périodiques de polyèdres symétriques de Kelvin, etc. sont construites et comparées aux formes que l'on retrouve dans la nature.

9. **La formule d'Euler.** On classifie ici tous les polyèdres qui satisfont à la formule d'Euler et parmi ceux-ci, les pavages réguliers de Pythagore, les polyèdres réguliers de Platon et les éponges régulières de Coxeter sont respectivement reliés à l'univers plan, sphérique et hyperbolique.

10. **Le labyrinthe de Möbius.** Les polyèdres réguliers sont curieusement déplacés, pivotés et étoilés, et de plus, ils sont transformés en polyèdres à un seul côté comme la bande de Möbius.

11. **La mélancolie de Dürer.** Les arrangements planaires et spatiaux utilisant des pentagones réguliers et des pentagrammes sont décrits par Dürer, Kepler, Penrose, etc.

12. **L'horizon de Penrose.** Des pavages non-périodiques et des réseaux d'hexagones sont conçus par Penrose, etc., en utilisant le nombre d'or.

13. **Le vecteur de Descartes.** On présente ici une projection dans un espace à trois dimensions des axes coordonnés quadridimensionnels que l'on retrouve dans les oeuvres d'art et dans la nature, et on la compare aux axes coordonnés tridimensionnels de Descartes.

14. **La création de Schläfli.** Les six polytopes réguliers à quatre dimensions, ayant tous été décrits déjà par Schläfli, sont représentés par leurs modèles symétriques.

15. **La nature de Coxeter.** Les polytopes réguliers sont déformés par Coxeter et par d'autres, ce qui nous permet de concevoir des étoiles, des flocons de neige, des fleurs, des diamants, etc., tous quadridimensionnels.

16. **La sphère d'Einstein.** On trace à rebours l'histoire des figures quadridimensionnelles en Orient et en Occident en partant d'Einstein, notre contemporain, jusqu'à Platon dans l'Antiquité, et finalement, on substitue au cosmos dodécaédrique régulier et tridimensionnel de Platon le cosmos quadridimensionnel dont la forme est déterminée par la cellule-120.

4. **Family of Archimedes.** Plato's regular polyhedra are symmetrically deformed by Archimedes, etc.

5. **Orbit of Kepler.** The cosmic cup of Kepler as the vessel of the planets and the geodesic domes of Fuller as the vessel of the human beings, both of which are determined by the regular polyhedra, are compared with each other.

6. **Secret of Kukai.** The regular polyhedra seen in the past of Japan are traced by the holy relics or legends in memory of Kukai, etc.

7. **Synergy of Fuller.** The microscopic world constructed according to Fuller's *Synergetics* is explained by using the polyhedric arrangements of spheres.

8. **Palace of Kelvin.** Periodic space fillings by symmetrical polyhedra of Kelvin, etc. are constructed in relation with the designs of nature.

9. **Formula of Euler.** Polyhedra, all of which satisfy the Euler's formula, are classified, and of them, Pythagorean regular tessellations, Plato's regular polyhedra, and Coxeter's regular sponges are related to the plane, spherical, and hyperbolic universe respectively.

10. **Labyrinth of Möbius.** The regular polyhedra are curiously moved, rotated, and stellated, and moreover, changed to the one-sided polyhedra like the Möbius strip.

11. **Melancholy of Dürer.** The planar and spatial arrangements using regular pentagons and pentagrams are shown by Dürer, Kepler, Penrose, etc.

12. **Horizon of Penrose.** Non-periodic tessellations and honeycombs are designed by Penrose, etc., using the golden-ratio.

13. **Vector of Descartes.** A projection into 3-space of the four-dimensional co-ordinate axes, which are seen in arts and nature, is introduced in comparison with the three-dimensional cartesian co-ordinate axes.

14. **Creation of Schläfli.** The six regular polytopes in 4-space, all of which were already described by Schläfli, are shown by their symmetrical models.

15. **Nature of Coxeter.** The regular polytopes are deformed by Coxeter et al., and according to them, four-dimensional stars, snowflakes, flowers, diamonds, etc., are designed.

16. **Shpere of Einstein.** A history of four-dimensional figures in the East and West are traced backwards from Einstein of the present to Plato of the past, and lastly, the Plato's three-dimensional regular dodecahedral cosmos is replaced with the four-dimensional cosmos whose form is determined by the 120-cell.

Les principaux apports originaux de ce livre

1. La présentation d'exemples où l'on retrouve des polyèdres dans l'histoire ancienne du Japon (dans chaque section).

2. La construction de réseaux d'hexagones non-périodiques utilisant les iso-zonaèdres d'or (section 12).

3. La suggestion de l'existence réelle d'une quatrième dimension dans la nature par l'utilisation de quatre lignes qui relient le centre du tétraèdre régulier à ses quatre sommets (section 13).

4. La construction des modèles symétriques de polytopes réguliers quadridimensionnels (section 14).

5. La déformation des polytopes réguliers en des polytopes semi-réguliers et étoilés (section 15).

6. La suggestion de l'aspect des oeuvres d'art et de la nature en quatre dimensions à travers des polygones, polyèdres et polytopes symétriques (sections 13-16).

Main Original Works in this Book

1. Introduction of the polyhedral traces in the past of Japan (each section).

2. Construction of non-periodic honeycombs using the golden iso-zonohedra (section 12).

3. Suggestion of the four-dimensionality of actual nature using four lines which connect the body-center and four vertices of the regular tetrahedron (section 13).

4. Construction of the symmetrical models of four-dimensional regular polytopes (section 14).

5. Deformation of the regular polytopes into the semi-regular and stellated polytopes (section 15).

6. Suggestion of the four-dimensional arts and nature through symmetrical polygons, polyhedra, and polytopes (sections 13-16).

Adresse de l'auteur:

Koji Miyazaki
Kobe University
1-2-1 Tsurukabutu Nada-Ku
Kobe-Shi 657
Japan

Address of the author:

Koji Miyazaki
Kobe University
1-2-1 Tsurukabutu Nada-Ku
Kobe-Shi 657
Japan