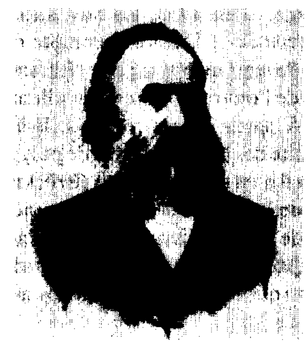
An Introduction to the Theory of Figures: the Geometry of E.S. Fedorov

by Marjorie Senechal and R.V. Galiulin



Topologie structurale #10, 1984

Une introduction à la théorie des figures: la géométrie de E.S. Fédorov

Introduction

Il y a presque cent ans, était publié à Saint-Pétersbourg, en Russie, un curieux livre de géométrie. Son auteur était E.S. Fédorov (1853-1919), un jeune homme de science qui allait devenir un cristallographe de réputation internationale. Il avait intitulé son livre *Nachala Ucheniya o Figurakh* (en français, *Une introduction à la théorie des figures*) (Fédorov, 1885). Encore aujourd'hui, les cristallographes reconnaissent que ce livre a systématisé la cristallographie géométrique, et qu'il renfermait, à l'état embryonnaire, les fondements mathématiques de la théorie de la structure des corps cristallins, laquelle fut l'aboutissement ultime de tous les travaux de Fédorov. Quant aux mathématiciens, ils reconnaissent que ce livre leur a fourni la première dérivation des cinq paralléloèdres convexes, ces polyèdres qui pavent l'espace lorsqu'assemblés faces contre faces en position parallèle (**Figure 1**). «La tradition attribue à Platon la découverte des cinq polyèdres convexes réguliers», écrit B.N. Delone, «à Archimède celle des treize polyèdres convexes semi-réguliers, à Kepler et Poinsot celle des quatre solides réguliers non convexes, et à Fédorov celle des cinq paralléloèdres» (Delone, 1956). En fait, non seulement Fédorov fut-il le premier à dériver les paralléloèdres, mais il fut aussi le premier à suggérer leur existence.

Et pourtant, jamais *Une introduction à la théorie des figures* n'a été traduit dans une langue occidentale. En fait, à notre connaissance, bien que cet ouvrage soit souvent cité, aucune analyse critique détaillée de son contenu mathématique n'a jamais été publiée dans quelle que langue que ce soit. Ceci pourrait être attribué au fait que l'ouvrage fut d'abord publié en russe, comme un des tomes des «Comptes rendus de la Société minéralogique de

Structural Topology #10, 1984

Introduction

Nearly one hundred years ago, a curious geometry book was published in Petersburg, Russia. Its author was a young scientist, E.S. Fedorov (1853-1919) who later became one of the world's leading crystallographers. He called his book *Nachala Ucheniya o Figurakh* (in English, *An Introduction to the Theory of Figures*) (Fedorov, 1885). It is famous today among crystallographers because it systematized geometrical crystallography and because it contains, in embryonic form, the mathematical basis for the theory of crystal structure which was Fedorov's life work. It is famous among mathematicians because it contains the first derivation of the five convex parallelohedra — polyhedra which fill space when arranged face-to-face in parallel position (**Figure 1**). "Tradition ascribes to Plato the discovery of the five regular convex polyhedra", writes B.N. Delone, "to Archimedes the thirteen convex semi-regular polyhedra, to Kepler and Poinsot the four regular nonconvex solids, and Fedorov found the five parallelohedra" (Delone, 1956). Indeed, Fedorov was not only the first to derive the parallelohedra, he was the first to pose the problem of finding them.

Despite this, *An Introduction to the Theory of Figures* has never been translated into a Western language. In fact, although it is often cited, as far as we know no detailed critical evaluation, from a mathematical point of view, has ever been published in any language. One reason may be that the book first appeared in Russian, as a volume of the "Notices of the St. Petersburg Mineralogical Society". (In 1953 it was republished in the Soviet series

Saint-Pétersbourg». (En 1953, les Soviétiques le rééditèrent dans la collection «Les classiques de la science».) Dans son compte rendu de l'histoire des polyèdres, publié en 1900 et qui allait devenir un ouvrage de référence, Max Brückner explique qu'il n'a pu lire que des résumés de l'ouvrage, publiés en allemand, dans une autre revue de cristallographie, en 1893. À partir de ces résumés, Brückner signale que la quatrième partie de l'ouvrage, qui traite des juxtapositions de polygones et de polyèdres, est sans doute la plus importante; mais il n'en dit rien de plus (Brückner, 1900)! Steinitz, dans son compte rendu encyclopédique de la théorie des polyèdres, ne fait que mentionner l'ouvrage en passant (Steinitz, 1922); de toute évidence, Steinitz n'accordait pas aux polyèdres qui engendrent un pavage de l'espace l'importance qu'il accordait aux groupes de symétrie de ces pavages. Il se pourrait aussi que l'ouvrage de Fédorov ait été négligé simplement parce qu'il est très difficile à lire.

"Classics of Science".) In his authoritative 1900 review of the history of polyhedra, Max Brückner explains that he has only been able to read abstracts of the book which were published in German in another crystallographic journal in 1893. Discussing these abstracts, Brückner notes that the fourth part of the book, on space-filling polygons and polyhedra, is undoubtedly the most important, but he says nothing more about it (Brückner, 1900)! The book is given only passing mention in Steinitz's encyclopedic review of the theory of polyhedra (Steinitz, 1922); evidently Steinitz did not consider the space-filling polyhedra themselves to be as important as the symmetry groups of the resulting tessellations. Another reason why Fedorov's book has been neglected may be simply that it is very difficult to read.

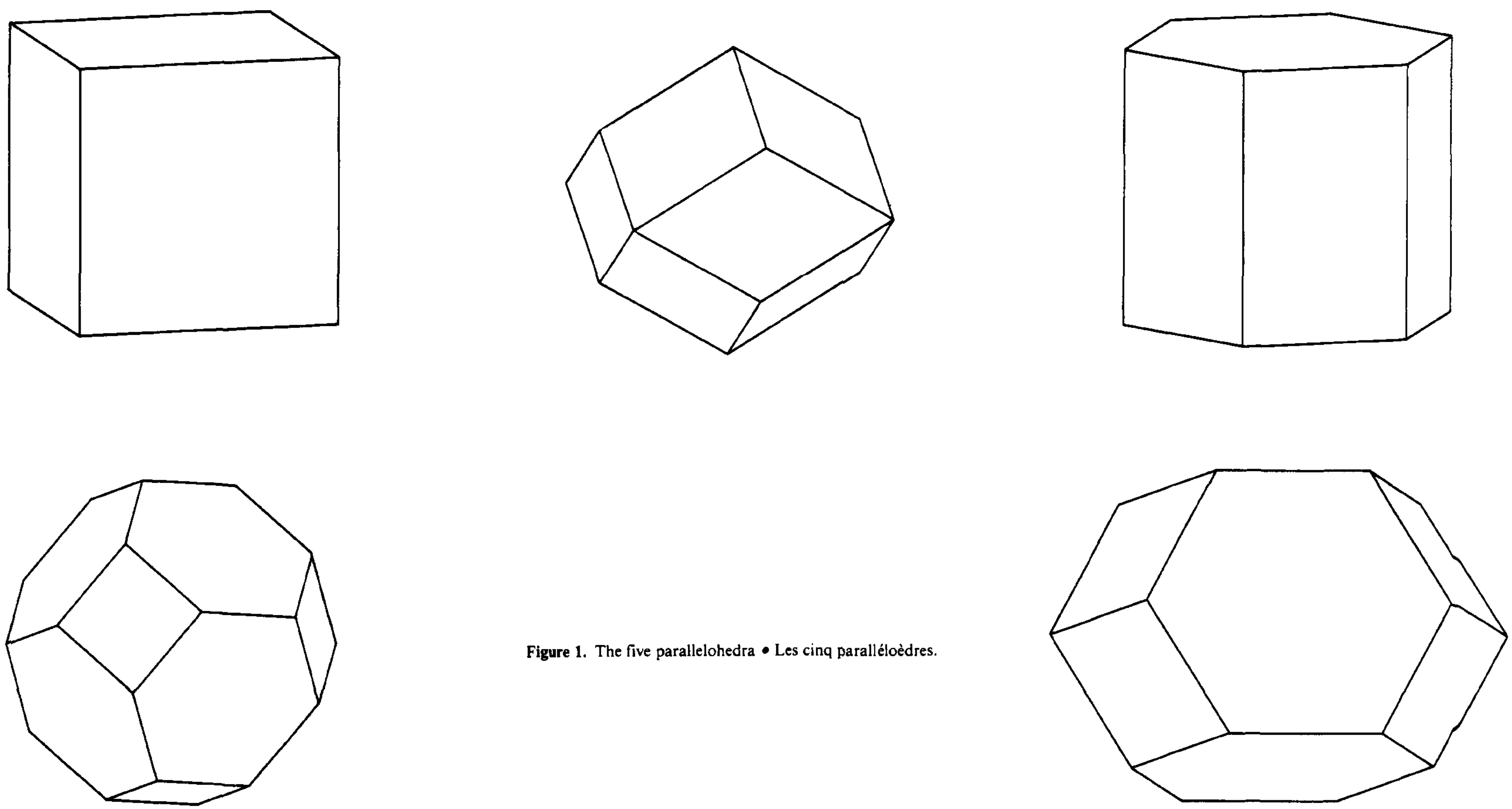


Figure 1. The five parallelohedra • Les cinq parallélloèdres.

Le présent article, qui se veut une ébauche d'analyse du livre de Férodov, est donc en retard de près de cent ans; mais il nous semble constituer une façon appropriée de célébrer ce centenaire. Fédorov aurait aimé voir un tel compte rendu paraître dans *Topologie structurale*, une revue vouée aux études interdisciplinaires. Il était très préoccupé par le manque de communication entre les hommes de science œuvrant dans des champs connexes. Il en discuta dans la préface de son livre: il est inconcevable, écrivait-il, qu'une branche aussi intéressante de la géométrie élémentaire ait été négligée, d'autant plus qu'elle comporte des applications pratiques en minéralogie. Mais les minéralogistes ne se sont intéressés qu'aux aspects pratiques du problème, et ont développé une approche, dont une nomenclature, qui leur est propre. «D'autre part, en mathématiques pures, la question fut abordée d'un point de vue plus général, et conséquemment plus correct; mais étant quelquefois ignorants des progrès des minéralogistes, les mathématiciens en vinrent à une organisation des connaissances radicalement différente...» Par son livre, Fédorov espérait réconcilier les deux approches.

E.S. Fédorov

Evgraf Stépanovich Fédorov, fils d'un ingénieur militaire, naquit en 1853 dans la ville d'Orenbourg, en Russie, et grandit à Saint-Pétersbourg, où sa famille avait déménagé. Sa passion pour la géométrie se manifesta dès l'école élémentaire; à l'âge de 16 ans, il entreprit la rédaction d'*Une introduction à la théorie des figures*. Fidèle à la tradition familiale, il étudia dans un lycée militaire, puis dans une école de génie militaire, et y obtint un diplôme en 1872; il servit alors deux ans en Ukraine, après quoi il présenta sa démission et revint à Saint-Pétersbourg pour y poursuivre ses études. Il étudia d'abord la médecine, puis la chimie, mais ce fut surtout la physique qui l'intéressa à cette époque.

En 1879, après y avoir travaillé durant dix ans, Fédorov compléta son livre. De toute évidence, alors même qu'il poursuivait les différentes activités que nous venons d'énumérer, il était en phase de devenir un érudit et un penseur original tant en géométrie qu'en minéralogie. Ses notes infra-paginales nous révèlent, chez ce jeune individu qui travaillait principalement dans d'autres champs, une étonnante familiarité avec la littérature mathématique. Et, bien que son livre ne traite pas de minéralogie comme telle, son choix de sujets indique qu'il avait déjà ébauché la théorie de la structure des corps cristallins qui fut au cœur de ses recherches sa vie durant.

Toutefois, n'ayant encore jamais poursuivi d'études reconnues en cristallographie, il s'inscrivit en 1880 au troisième cycle de l'Institut des mines de Saint-Pétersbourg. Il y présenta au corps professoral sa théorie des paralléloèdres et la théorie de la structure des corps cristallins qui en découlait. Bien que sa théorie fournit une explication simple de plusieurs phénomènes, «l'establishment» ne la prisa guère.

Il eut à surmonter de grandes difficultés pour faire publier son livre. Par exemple, «Quand pour la première fois (en 1881) je le présentai à l'académicien Chebyshev de l'Académie des sciences locale», écrit Fédorov dans la préface en note infra-paginale, «ce dernier le refusa, alléguant que la science contemporaine se désintéressait de ce champ.» Finalement, il fut publié en 1885 dans la revue de minéralogie par les bons offices du cristallographe Axel Gadolin, et alla éventuellement joindre les rangs des classiques empoussiérés.

The present article, an introduction to the study of Fedorov's book, is nearly one hundred years overdue, but still seems to us to be an appropriate way to mark its centennial. Fedorov would have been pleased to have such a review appear in *Structural Topology*, which is devoted to interdisciplinary studies. The lack of communication among scientists in related fields was of great concern to him. He discusses this in the preface to his book: it is amazing, he writes, that such an interesting branch of elementary geometry could have been neglected, all the more so since it has practical applications in mineralogy. But mineralogy has been interested only in the practical side of the problem, and has developed its own nomenclature and so on. "On the other hand, pure mathematicians, developing the questions of this field from a more general, and consequently more correct, point of view, were sometimes unacquainted with the results obtained by mineralogists, and thus arrived at a completely different organization of the material..." He hoped that his book would bring the two viewpoints closer together.

E.S. Fedorov

Evgraf Stepanovich Fedorov was born in 1853 in the Russian town of Orenburg. His father was a military engineer. The family moved to Petersburg where the boy grew up. His lifelong interest in geometry began in elementary school; by the age of 16 he had begun working on *An Introduction to the Theory of Figures*. In the family tradition, he attended a military gymnasium and then a school of military engineering. Upon graduation in 1872 he served in the Ukraine, but resigned two years later to return to Petersburg and continue his studies. He first attented medical school and then studied chemistry, but his principal interest at that time was physics.

Fedorov finished his book in 1879, after working on it for ten years. Evidently, while pursuing the various activities described above, he was also becoming a scholarly and original thinker in both geometry and mineralogy. The footnotes show that for a young person working mainly in other fields he was astonishingly familiar with the mathematical literature. And although the book is not concerned with mineralogy *per se*, it is clear from his choice of topics that he had already sketched out the theory of crystal structure which was the basis of his life's work.

Nevertheless he had not yet studied crystallography in a formal way, so in 1880 he enrolled in the third course of the Petersburg Mining Institute. There he explained, to the professors, his theory of parallelohedra and the theory of crystal structure which was based on it. However, although his theory provided a simple explanation of many crystallographic phenomena, the "establishment" did not appreciate it.

He has great difficulty in publishing the book. For example, "When for the first time (in 1881) I presented it to the local Academy of Sciences, to Academician Chebyshev", writes Fedorov in a footnote to the preface, "the latter refused to accept it, explaining that contemporary science was not interested in this field." Finally, it appeared in 1885 in the mineralogical journal through the good offices of the crystallographer Axel Gadolin, and eventually joined the ranks of rarely read classics.

Pour bien apprécier l'apport de Fédorov, il faut se remémorer l'état des connaissances en cristallographie géométrique à cette époque. Avant la découverte, en 1912, de la diffraction des rayons X par les cristaux, tous les concepts sur la structure des solides étaient purement hypothétiques. Toutefois, les formes polyédriques de plusieurs cristaux, le fait que certains éléments de ces formes subsistent durant la croissance des cristaux, et le phénomène du clivage (une fracture nette selon certains plans) incitaient à croire que les cristaux étaient des assemblages ordonnés d'éléments identiques. Au début, ces éléments furent conçus soit comme de minuscules polyèdres par les tenants de la théorie polyédrique, soit comme des sphères identiques réunies en assemblages compacts par les tenants de la théorie des assemblages de sphères. À l'époque de Fédorov, ces concepts rudimentaires avaient évolué et engendré des modèles de la structure des corps cristallins plus sophistiqués qui tentaient d'expliquer les propriétés tant physiques et chimiques que géométriques des cristaux. Cent ans plus tôt, le cristallographe français J.B.L. Romé de L'Isle avait publié un traité magistral en quatre volumes dans lequel il démontrait empiriquement que les différentes formes qu'adoptent les cristaux d'une même substance découlaient les unes des autres par troncature (Romé de L'Isle, 1783). Cela résultait, selon lui, de la «loi» de la constance des angles dièdres. Les faces d'un cristal peuvent être divisées en familles dont les membres sont symétriquement équivalents les uns aux autres. La taille des faces d'une famille donnée peut varier d'un cristal à l'autre, mais les angles dièdres entre ces faces sont toujours les mêmes (**Figure 2**). René Just Haüy tenta alors d'expliquer les observations de Romé de L'Isle par une théorie polyédrique de la structure (Haüy, 1822). Il proposa l'existence pour chaque espèce cristalline d'un polyèdre caractéristique, appelé la «molécule intégrante», dont des copies sont assemblées de différentes façons pour constituer une structure polyédrique. Les travaux de Haüy firent l'objet de critiques, surtout du point de vue physique et chimique, ce qui amena A. Bravais à formuler à son tour une nouvelle théorie de la structure des corps cristallins (Bravais, 1850). Sa théorie était abstraite: quels qu'ils soient, les éléments de ces structures constituaient des arrangements tridimensionnels répétitifs. Un tel arrangement est structuré selon un réseau de points tridimensionnel dans lequel les éléments structuraux de base («les molécules des corps cristallins») sont groupés en ensembles identiques qui peuvent être représentés par les sommets du réseau. À partir des groupes de symétrie et de la façon dont ces groupes sont appliqués aux points du réseau, Bravais démontra qu'il existait 14 types de réseaux tridimensionnels. À l'époque de Fédorov, aucun raffinement adéquat de cette énumération n'avait encore été trouvé. Si nous représentons les éléments individuels d'une structure par des points, nous obtenons un «système régulier de points». Un système régulier est infini et discret, et, par définition, n'importe quel point de celui-ci peut être appliqué sur n'importe quel autre par une isométrie qui applique l'ensemble entier sur lui-même. Restait à déterminer les systèmes tridimensionnels; Fédorov le fit le premier (cf. la postface).

La théorie de structure de Fédorov, qui était une synthèse de concepts déjà connus, comblait certaines de leurs lacunes. Il démontra que la théorie des réseaux était compatible avec le concept d'éléments de structure polyédriques si, dans un premier temps, un cristal était représenté comme une partition de l'espace en polyèdres congruents juxtaposés faces contre faces en position parallèle. Ces «paralléloèdres» peuvent, dans un deuxième temps, être subdivisés en polyèdres congruents représentant les «molécules cristallographiques». Lors de la rédaction de son livre, l'objectif principal de Fédorov

In order to appreciate Fedorov's achievement, it is necessary to recall the state of geometrical crystallography at that time. Until the discovery, in 1912, that crystals diffract x-rays, all views on the structure of the solid state were purely hypothetical. However, the polyhedral shapes of many crystals, the fact that certain features of these shapes are strictly conserved during crystal growth, and the phenomenon of cleavage (clean fracture along plane surfaces) strongly suggested that crystals are built of identical units arranged in orderly juxtaposition. Early views on the nature of these units alternated between a polyhedral theory, which assumed that the units were minute polyhedra, and a sphere-packing theory, which assumed that they were closely-packed identical spheres. By Fedorov's time, these views had evolved into more sophisticated models of crystal structure which attempted to account for the physical and chemical as well as the geometrical properties of crystals. One hundred years earlier, the French crystallographer J.B.L. Romé de L'Isle had published his four volume masterpiece in which he showed empirically that the various forms which crystals of the same substance can assume are all formally related by geometrical truncation (Romé de L'Isle, 1783). This is due, he explained, to the "law" of constancy of interfacial angles. The faces of a crystal can be divided into families, the members of which are symmetrically equivalent to one another. The size of the faces of a family may vary among individual crystals but the angles between them will always be the same (**Figure 2**). René Just Haüy then tried to explain Romé's results by a polyhedral structure theory (Haüy, 1822). For each crystal species there is a characteristic polyhedron called its "molecule integrant"; copies of this polyhedron are juxtaposed in various ways to build a polyhedral structure. Haüy's work was criticized on physical and chemical grounds, and this in turn led A. Bravais to propose a new theory of crystal structure (Bravais, 1850). His theory was abstract: whatever the structure units are, they are arranged repetitively in three dimensions. The framework of such a pattern is a three-dimensional point lattice, in which the elementary structural units ("crystal molecules") are grouped together in identical sets which can be represented by the lattice nodes. Bravais showed that the three-dimensional lattices can be classified into fourteen types, according to their symmetry groups and the ways in which these groups act on the lattice points. Finding the appropriate refinement of this enumeration was an open problem in Fedorov's time. If we represent the individual structure units by points we obtain a "regular system of points". A regular system is infinite and discrete, and by definition any point in it can be mapped onto any other by an isometry which maps the whole set onto itself. The problem was to determine the three-dimensional systems; Fedorov was the first to solve it (see postscript).

Fedorov's structure theory was a synthesis of earlier views which resolved some of the difficulties they encountered. He showed that the lattice theory was compatible with polyhedral structure units if we represent a crystal in the first approximation by a partition of space into congruent polyhedra juxtaposed face-to-face in parallel position. These "parallelohedra" could then be subdivided into congruent polyhedra representing the "crystallographic molecules". His principal goal in the book was to lay the mathematical foundation for his theory and to determine the parallelohedra and their properties; as we shall see it contains all this and a great deal more.

était d'établir les fondements mathématiques de sa théorie, et d'énumérer les parallélloèdres et d'en déterminer les propriétés; comme nous allons le voir, le livre renferme tout cela et bien davantage.

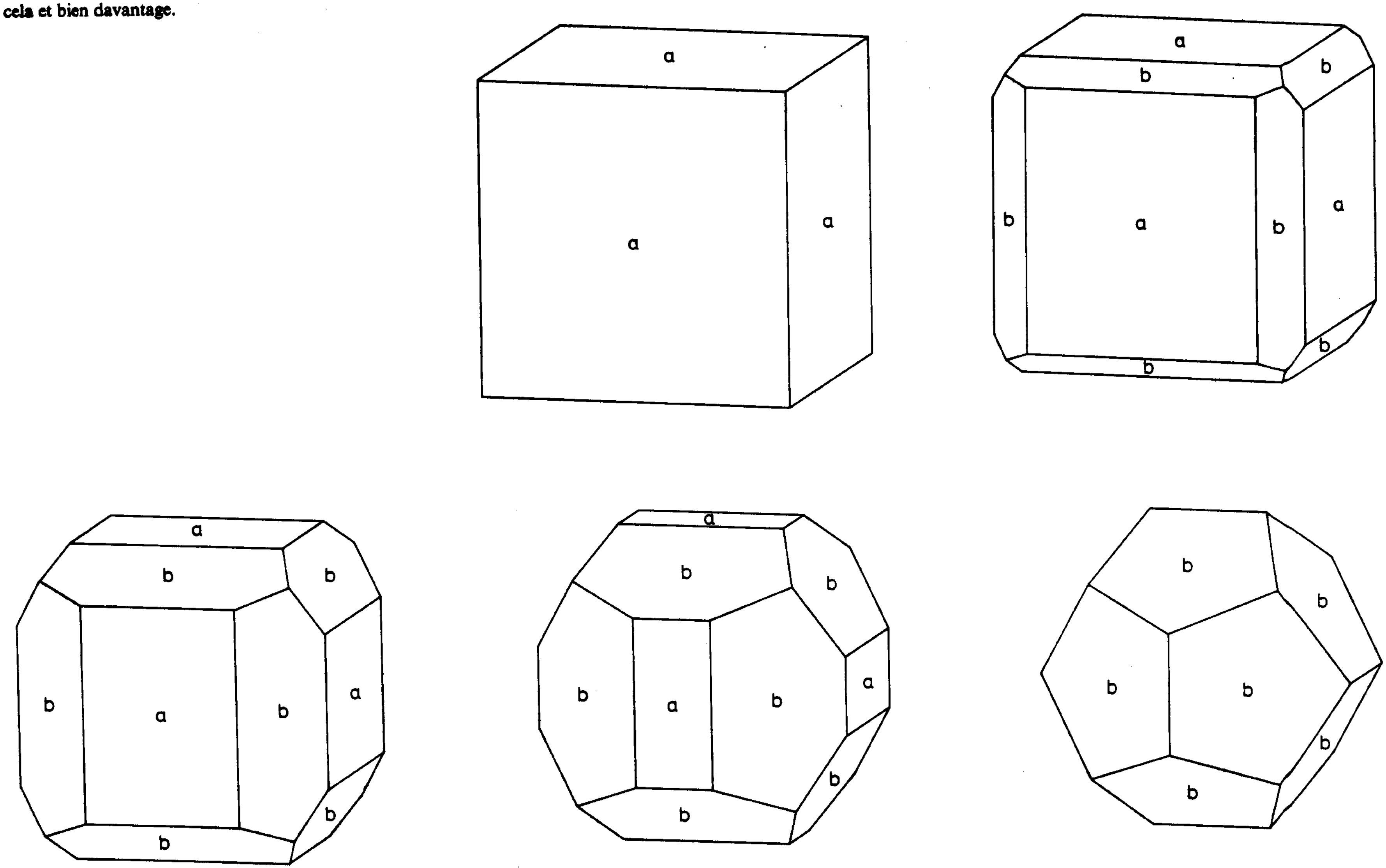


Figure 2. Adapted from Goldschmidt's *Atlas der Kristallformen*. The law of constancy of interfacial angles asserts that the angles between the faces of family a (or b) are always the same • Adapté de l'*Atlas der Kristallformen* de Goldschmidt. La loi de la constance des angles dièdres stipule que les angles entre les faces appartenant à une famille a (ou b) sont toujours les mêmes.

Une introduction à la théorie des figures

En dépit de ses nombreux défauts (dont certains seront discutés plus loin), le livre de Fédorov porte la marque de l'originalité, voire du génie. Motivé par sa fascination pour les figures capables de paver le plan, et guidé par les besoins de la minéralogie, Fédorov écrivit un texte qui mène le lecteur pas à pas à travers les propriétés des polyèdres qu'il estimait les plus importantes. Un rapide coup d'œil à la table des matières nous le laisse voir. Le livre est divisé en cinq parties; chaque partie est subdivisée en chapitres, et chaque chapitre en sections. (Pour abréger, nous avons omis les titres des sections. La pagination est celle de l'édition de 1953.)

En bref, la première partie traite des propriétés des angles polyédriques; la seconde est consacrée à la classification des polyèdres et, en particulier, des isoèdres et de leurs duals, et la troisième est une brève discussion de la symétrie. La quatrième partie est celle qui a valu au livre sa renommée: Fédorov y développe la théorie des pavages du plan, présente et énumère les zonaèdres tridimensionnels, et, grâce à ces notions, décrit les cinq parallé-loèdres. La cinquième partie, une discussion des polyèdres uniformes, semble superflue.

An Introduction to the Theory of Figures

Despite its many defects (some of which are discussed below), Fedorov's book is a work of originality and genius. Motivated by his fascination with plane-filling figures and guided by the needs of mineralogy, Fedorov wrote a text which leads the reader step by step through the properties of polyhedra which he deemed most significant. This is easily seen by a glance at the table of contents. The book is divided into five parts, each of which is subdivided into chapters and these into sections. (For brevity, we omit the section headings. The page numbers refer to the 1953 edition.)

Stated briefly, the first part is concerned with the properties of polyhedral angles; the second is devoted to the classification of polyhedra and, in particular, to the enumeration of the isohedra and their duals, and the third is a brief discussion of symmetry. The fourth part is the one for which the book is famous: in it, Fedorov develops the theory of plane tilings, introduces and enumerates the three-dimensional zonohedra, and then uses these results to describe the five parallelohedra. The fifth part, a discussion of uniform

Fédorov l'a peut-être inclue à cause de la ressemblance marquée des polyèdres uniformes non convexes avec les formes des macles.

La lecture d'*Une introduction à la théorie des figures* exige d'un mathématicien une certaine dose de patience et d'indulgence. C'est peut-être là une des raisons qui retardèrent la publication de cet ouvrage. Faisant allusion aux déboires que Fédorov relate, B.N. Delone remarque: «Il me semble que d'autres raisons peuvent expliquer le rejet de Chebyshev: l'ouvrage de Fédorov, bien que mathématique pour le fond, avait une forme bizarre pour un mathématicien.» Le livre laisse perplexe: «Ses définitions et ses démonstrations sont, dans une large mesure, imprécises et incomplètes du point de vue mathématique.» (Delone, 1956). Nous ajouterions que le style de Fédorov est lourd, et qu'il est facile de s'y perdre dans la profusion de définitions, de classifications, de théorèmes, de longues remarques et de corollaires (sans parler des nombreuses digressions). De plus, ses rares illustrations sont confuses.

C'est dans ce contexte que nous allons maintenant tenter de décrire plus en détail chaque section afin d'expliquer les plus importantes des idées et des thèses de Fédorov (dans la mesure où nous les comprenons) et de mettre en évidence leurs forces et leurs faiblesses, les unes y foisonnant tout comme les autres.

Dans la première partie, Fédorov discute de l'analogie entre les figures planes et spatiales. Tout comme l'angle plan est le point de départ de l'étude des figures planes, le «gonaèdre» ou angle polyédrique est le point de départ de l'étude des figures spatiales. Dans le premier chapitre (qui comporte 26 définitions et 15 théorèmes, eux-mêmes dotés de nombreux corollaires), Fédorov discute les gonaèdres *ab initio*. Il présente sa propre théorie sur la mesure des angles, laquelle, comme toujours, se fonde sur les triangles sphériques. Ses démonstrations, d'ailleurs difficiles à suivre, l'amènent à conclure que (Théorème 10, Corollaire e): «la mesure du gonaèdre est la moitié de l'aire du polygone sphérique correspondant». (Le facteur une demie n'est pas standard.) Il en découle (chapitre 2) que si α_1, α_2 et α_3 sont les mesures des angles dièdres d'un trigonaèdre, alors la mesure de l'angle trigonaédrique est $(1/2)(\Sigma\alpha_i - \pi)$. Le reste du chapitre est une discussion des conséquences de cette formule. Ces résultats préliminaires, comme le souligne Brückner, étaient connus depuis longtemps.

Des idées nouvelles commencent à apparaître dans la deuxième partie du livre. Celle-ci débute avec une description détaillée des propriétés des sphénoïdes (ou tétraèdres, le tétraèdre régulier n'étant qu'un cas particulier des sphénoïdes). La plus grande partie du chapitre 3 traite du calcul des sommes d'angles. Au chapitre 4, nous rencontrons la première étape d'une démarche menant à une classification des polyèdres selon leurs propriétés topologiques. La définition 9 se lit comme suit: «Un polyèdre typique, associé à un polyèdre donné, est obtenu en traçant, à partir du centre d'une sphère de rayon arbitraire disposée arbitrairement, des droites normales à toutes les faces du polyèdre donné, et en construisant, par les points de percée de ces droites sur la surface de la sphère, des sections de plan tangentes à la sphère et limitées par leurs intersections mutuelles». (Fédorov indiqua plus tard qu'il entendait par ceci construire un polyèdre topologiquement quivalent au polyèdre donné, mais circonscrivant une sphère. De toute évidence, il supposait, et ceci à tort, qu'un tel polyèdre existe toujours.) Dans une digression, il montre que, par un mouvement arbitrairement petit que nous appellerions aujourd'hui

polyhedra, seems somewhat out of place. Perhaps Fedorov included it because the nonconvex uniform polyhedra strongly resemble the forms of twinned crystals.

Reading *An Introduction to the Theory of Figures* requires patience and generosity on the part of a mathematician. This may be one reason it took so long to be published. Referring to Fedorov's account of his difficulties, B.N. Delone remarks, "It seems to me that the rejection by Chebyshev can be explained by other reasons: Fedorov's work was mathematical, but its writing was somewhat strange for a mathematician." The book is perplexing: "Its definitions and proofs are, in large measure, imprecise and incomplete from the mathematical point of view." (Delone, 1956). We would add that Fedorov's style is weighty, and one easily becomes lost in the welter of definitions, classifications, theorems, lengthy remarks, and corollaries (and there are many digressions). Furthermore, his illustrations are few and confusing.

With this in mind, we will now try to describe each of these sections in more detail in order to explain Fedorov's principal ideas and arguments (as far as we understand them) and to assess their strengths and weaknesses, both of which abound.

In the first part, Fedorov discusses the analogy between plane and spatial figures. Just as the plane angle is the starting point for the study of plane figures, the "gonohedron" or polyhedral angle is the starting point for the study of spatial figures. In the first chapter (which contains 26 definitions and 15 theorems, which in turn have numerous corollaries) Fedorov discusses gonohedra *ab initio*. He introduces his own theory of angle-measurement based, as usual, on spherical triangles. His arguments, which are difficult to follow, lead him to the result (Theorem 10, Corollary e) that "the measure of a gonohedron is half the area of the spherical polygon corresponding to it". (The factor one-half is nonstandard.) It follows (chapter 2) that if α_1, α_2 and α_3 are the measures of the dihedral angles of a trigonohedron then the measure of the trigonohedral angle is $(1/2)(\Sigma\alpha_i - \pi)$. The rest of the chapter is a discussion of the consequences of this formula. These preliminary results, as Brückner points out, had long been known.

New ideas begin to appear in Part II, which opens with a detailed description of the properties of sphenoids (or tetrahedra; the regular tetrahedron is a special case of the sphenoid). Most of chapter 3 is concerned with the calculation of angle sums. In chapter 4 we find the first step toward a classification of polyhedra by their topological properties. Definition 9 reads as follows: "A typical polyhedron, coresponding to a given one, is that which we obtain if, from the center of an arbitrarily placed sphere with arbitrary radius we draw straight lines perpendicular to all the faces of the given one, to the intersection with the surface of the sphere and at these points we construct planes tangent to the sphere, to their mutual intersection". (Fedorov indicated later that by this he meant to construct a polyhedron topologically equivalent to the given one, but circumscribed about a sphere. He evidently assumed, incorrectly, that such a polyhedron always exists.) He digresses to show that any typical polyhedron can, by an arbitrarily small motion that we would now call "vertex splitting", be transformed into a typical polyhedron all of whose vertices are trivalent; he does not appear to have realized that different topological types may result «fendage du sommet», tout polyèdre typique peut être transformé en un autre polyèdre typique dont tous les sommets sont trivalents; il ne semble pas avoir été conscient du fait que des types topologiquement différents pouvaient résulter de cette opération, selon la façon dont le fendage est effectué. Il dérive aussi les polyèdres réguliers grâce à la formule d'Euler. Ayant admis une augmentation illimitée du nombre de faces, il dénombre neuf de ces polyèdres, plutôt que cinq: les polyèdres supplémentaires comprennent, dit-il, trois sphères, qui sont des polyèdres ayant un nombre infini de faces triangulaires, carrées ou hexagonales, et un tétraèdre régulier additionnel relié au premier par une inversion centrale. Fédorov admet que du point de vue géométrique les deux tétraèdres sont identiques, mais explique qu'ils peuvent jouer des rôles différents dans les structures des corps cristallins. Il retourne alors au problème de la classification, et définit le «type» d'un polyèdre (définition 18) comme étant «l'ensemble des polyèdres dont les représentants typiques ont un seul et même nombre de faces arrangées de la même manière et ayant les mêmes noms». (Par «noms», il entend triangle, quadrilatère, etc.) De la plus importante catégorie spéciale, il donne la définition suivante (définition 20): «Les équifaciaux, ou mieux, les isoèdres, sont des polyèdres dont les faces sont égales ou symétriques», c'est-à-dire proprement ou improprement congruentes. D'après le contexte, sinon d'après la définition elle-même, il semble clair que, pour Fédorov, les faces d'un isoèdre sont équivalentes par rapport à son groupe de symétrie plutôt que simplement congruentes, puisque le théorème 15 stipule que «Les points de tangence d'un isoèdre typique sont des points correspondants», alors que le chapitre 6 est une brève discussion des polyèdres équifaciaux qui n'ont pas cette propriété. Fédorov accorde une attention toute spéciale aux isoèdres; leur importance en cristallographie, où ils servent de base à l'étude des formes des cristaux, l'y a sans doute incité.

Toujours au chapitre 4, Fédorov discute ensuite les isogones, qui sont les duals des isoèdres, et utilise la formule d'Euler pour démontrer que le nombre de types d'isoèdres (et donc d'isogones) est fini. Au chapitre 5, il produit, à l'aide des formules du chapitre précédent, la dérivation détaillée des isogones et des isoèdres. (Il croyait ainsi faire œuvre de pionnier, mais en fait d'abord Hessel et, plus tard, Hess avaient déjà publié ces résultats.) Au chapitre 7, il poursuit sa discussion de la classification des polyèdres, et y présente plusieurs tableaux détaillés des propriétés des isoèdres. L'appendice à ce chapitre revêt un intérêt spécial puisqu'il y expose ses vues sur la classification. Selon Fédorov, une classification des polyèdres basée sur la symétrie ne convient pas, car la symétrie peut être détruite par une déformation arbitrairement petite. Il avait aussi été proposé de classifier les polyèdres selon le nombre de leurs arêtes, car ce nombre est le même pour le polyèdre comme pour son dual, alors qu'une classification selon le nombre de faces, ou de sommets, est en ce sens «biaisée». Mais Fédorov répond que la loi de la constance des angles dièdres manifeste la primauté des faces tant sur les sommets que sur les arêtes; le biaisage d'une telle classification n'est qu'apparent. De plus, ajoute-t-il, «la supériorité d'une classification selon les faces se révèle lors du calcul des angles des éléments, lesquels sont déterminés par les directions normales aux faces, et n'ont aucun rapport avec la position accidentelle des sommets ou des arêtes... Je considère qu'il s'agit là de la classification **naturelle**, c'est-à-dire, celle qui surclasse toutes les autres **à tout point de vue**». Donc, d'après lui, les isoèdres méritent l'attention qu'il leur accorde.

La troisième partie traite de la symétrie; elle ne comporte que 49 pages. Comme nous l'avons vu, Fédorov ne considérait pas la symétrie des polyèdres comme étant particulièrement caractéristique, puisque «la symétrie est une propriété des figures individuelles».

from this, depending on how the splitting is done. He also derives the regular polyhedra by means of Euler's formula. Allowing the number of faces to increase without bound, he finds nine of them, rather than five: the extra four, he says, include three spheres, which are polyhedra with infinitely many triangular, square, or hexagonal faces, and an additional regular tetrahedron related to the first by central inversion. Fedorov admits that from the geometrical point of view the two tetrahedra are identical, but explains that they can play different roles in crystal structures. Now he returns to the classification problem, defining the "type" of a polyhedron (definition 18) to be "the set of polyhedra whose typical representatives have one and the same number of faces arranged in the same way and with the same names". (By "names", he means triangle, quadrilateral, etc.) As the most important special category, he defines (definition 20): "Equifaced, or better, isohedra are polyhedra all of whose faces are equal or symmetric", i.e., properly or improperly congruent. It seems clear from the context, though not from the definition itself, that Fedorov intends the faces of an isohedron to be equivalent with respect to its symmetry group rather than simply congruent, since Theorem 15 states that "The points of tangency of a typical isohedron are corresponding points" and chapter 6 is a brief discussion of equifaced polyhedra which do not have this property. Fedorov singles out the isohedra for special attention; their importance for crystallography, where they are the basis for the study of crystal forms, is undoubtedly the reason why he does so.

Still in chapter 4, Fedorov next discusses the isogons, which are the duals of the isohedra, and uses Euler's formula to prove that the number of types of isohedra (and hence isogons) is finite. Then in chapter 5 he applies the formulas of the previous chapter to the detailed derivation of the isogons and isohedra. (He believed that these results were new, but in fact first Hessel and, later, Hess had published them earlier.) In chapter 7, he continues his discussion of the classification of polyhedra, with many detailed tables of the properties of the isohedra. The appendix to this chapter is of special interest; here he explains his views on classification. According to Fedorov, a classification of polyhedra based on symmetry is inappropriate because symmetry can be destroyed by an arbitrarily small deformation. Another suggestion had been to classify polyhedra by their numbers of edges, since this number is the same for a polyhedron and its dual, while a classification by numbers of faces, or vertices is, accordingly "one-sided". But Fedorov argues that the law of constancy of interfacial angles indicates the primacy of faces over either vertices or edges; the one-sidedness of such a classification is only apparent. Furthermore, he adds, "the advantage of a classification by faces appears in relation to the calculation of the angles of the elements which are determined by the directions normal to the faces and are not found in relation to the accidental position of the vertices or edges... I consider it to be the **natural** classification, that is, the one which has the advantages over all the others **in every respect**." Thus, in his view, the isohedra deserve the attention he gives them.

Part III is concerned with symmetry; it is only 49 pages long. As we have seen, Fedorov did not consider the symmetry of polyhedra to be particularly characteristic since "symmetry is a property of individual figures". In this part he discusses symmetry operations

Dans cette partie, il discute des opérations de symétrie et des éléments de symétrie, et, à travers une déduction assez confuse, identifie correctement les groupes de symétrie des isoèdres typiques et des isogones sous-typiques.

La quatrième partie du livre est de loin la plus importante. Une discussion très détaillée en sera faite, parce qu'elle met clairement en évidence le génie de Fédorov en géométrie, et ses faiblesses comme mathématicien. Il est important de se rappeler que la plupart des concepts de la quatrième partie sont entièrement originaux: nul n'avait jamais posé de telles questions auparavant, et encore moins tenté d'y répondre.

Le chapitre 11 est consacré au pavage du plan, et la théorie qui y est développée est capitale pour le reste de la quatrième partie. Fédorov définit (définition 1) un pavage («remplissage») du plan comme étant «une combinaison de figures planes dans le plan telle que chaque côté de chaque figure est commun à deux de ces figures». D'après le contexte, il est clair que pour lui le terme «figure» veut dire «polygone». Il semble aussi qu'il sous-entende que le pavage est du type arêtes contre arêtes, et son texte devient plus compréhensible si nous admettons ces interprétations. À la définition 3 se trouvent les concepts fondamentaux de planigone et de parallélogone: «Des polygones égaux ou symétriques, qui pavent le plan en position non parallèle, sont appelés des planigones; s'ils pavent le plan en position parallèle, ils sont appelés des parallélogones». Il démontre alors que dans tout pavage du plan par des parallélogones au moins trois angles se rencontrent à chaque sommet, et conclut qu'un parallélogone ne peut avoir plus de six côtés. Puisqu'un parallélogone doit avoir un nombre pair de côtés, il ne peut être qu'un quadrilatère ou un hexagone. Il montre que les parallélogones sont situés sur les sommets d'un réseau plan, et que l'aire de tout parallélogone est égale à l'aire d'un parallélogramme du réseau correspondant. Suit alors une longue discussion des «parallélogones de second ordre», ceux qui pavent le plan en position parallèle par la combinaison d'une figure de type α et d'une figure de type β différente de la première. (L'importance que Fédorov accordait à ce concept n'est pas claire, et sa liste est incomplète.) Il montre alors que les parallélogones demeurent des parallélogones sous des transformations affines.

Vient ensuite le théorème que Fédorov considérait évidemment comme fondamental, puisque toute sa théorie de la structure des corps cristallins repose sur son analogue tridimensionnel: «**Théorème 17.** Les planigones peuvent toujours être réunis en groupes formant des parallélogones.» Plusieurs des lecteurs de *Topologie structurale* sont probablement conscients qu'il s'agit là d'un problème non résolu, et que conséquemment la démonstration de Fédorov doit être déficiente. Nous la reproduisons intégralement plus loin, et nous mettons le lecteur au défi d'y trouver l'erreur. La démonstration repose sur un lemme (théorème 1) qui stipule que «l'angle entre deux segments de droite donnés appartenant à une quelconque droite brisée est égal à la somme algébrique des angles entre les segments de droite adjacents à cette dernière et situés à l'intérieur des limites constituées par (c'est-à-dire, entre) les deux segments donnés.» Quelle que soit la signification de cet énoncé, Fédorov soutient, à raison, que l'angle cherché est fonction, modulo π, de la somme des angles intermédiaires. Sa démonstration du théorème 17 est la suivante: «Soit abcd, un planigone donné (**Figure 3**). Nous allons d'abord démontrer qu'à l'intérieur d'un ensemble arbitrairement grand de figures qui pavent le plan, nous pouvons toujours trouver un nombre arbitraire de celles-ci qui sont en position parallèle à ce planigone abcd. Car, s'il n'y en avait aucune en position parallèle, alors toutes les figures

and symmetry elements and deduces, correctly if somewhat confusingly, the symmetry groups of the typical isohedra and subtypical isogons.

The fourth part of the book is by far the most significant. We will discuss it in considerable detail, because in it we find the most striking evidence of Fedorov's geometric genius, and also his weaknesses as a mathematician. It is important to remember that most of the concepts of Part IV are entirely original: no one had ever asked such questions before, let alone tried to answer them.

Chapter 11 is devoted to tiling the plane, and the theory developed here is fundamental to the rest of the Part IV. Fedorov defines (definition 1) a tiling ("filling") of the plane to be "a combination of plane figures in the plane such that every side of every figure is common to two of them". From the context it appears that by "figure" he means "polygon". It also seems that he intends the tiling to be edge-to-edge, and the material is more comprehensible if we assume this to be the case. In definition 3 we find the fundamental concept of planigon and parallelogon: "Equal or symmetric polygons, filling the plane not in parallel position, are called planigons; if they fill it in parallel position then they are called parallelogons." He then proves that in any tiling of the plane by parallelogons at least three angles meet at every vertex, and concludes that the number of sides of a parallelogon is at most six. Since a parallelogon must have an even number of sides, it is a quadrilateral or a hexagon. He shows that parallelogons are located at the nodes of a plane lattice, and that the area of any parallelogon is equal to the area of a parallelogram of the corresponding lattice. There then follows a lengthy discussion of "parallelogons of the second order", which are those consisting of two distinct figures α and β. (The significance of this concept for Fedorov is not clear, and his list is incomplete.) Then he shows that parallelogons remain parallelogons under affine transformations.

Next we come to the theorem which Fedorov evidently considered to be fundamental, since his entire theory of crystal structure rests on its three-dimensional analogue: "**Theorem 17.** Planigons can always be joined into groups forming parallelogons." Many readers of *Structural Topology* are probably aware that this remains an open problem, and therefore something must be wrong with Fedorov's proof. We quote it in full below, and challenge the reader to find the error. The proof rests on a lemma (Theorem 1) which states that "the angle between two given straight line segments belonging to any broken line is equal to the algebraic sum of the angles between its adjacent line segments, taken in the limit of (i.e., between) the two given ones." Whatever this may mean, Fedorov correctly argues that the desired angle is a function, modulo π, of the sum of the intermediate angles. His proof of Theorem 17 is then the following: "Let abcd be a given planigon (**Figure 3**). We will show first that from an arbitrarily large set of plane-filling figures we can always find arbitrarily many which are in parallel position to it. For if there were none in parallel position, then all the figures would differ from one another in position, but in such a case, from an arbitrarily large number n of these figures we could choose one whose position differs from the given one by an arbitrarily small angle; let such a figure be a′b′c′d′ and let the angle between da and d′a′ be less than any given angle. Join the points a and d′ by straight auraient des positions différentes les unes des autres, mais dans un tel cas, de n de ces figures, n étant un nombre arbitrairement grand, nous pourrions en choisir une dont la position ne différerait de celle de la figure donnée que par un angle arbitrairement petit; soit donc cette figure a'b'c'd' telle que l'angle entre da et d'a' soit moindre que tout angle donné. Joignez les points a et d' par des segments de droite qui constituent des côtés de figures dans le système donné; alors, d'après le théorème 1, l'angle entre da et d'a' est égal à la somme algébrique des angles entre tous les côtés de la droite brisée (définie par ces segments); mais puisque les segments de droite dont elle est constituée sont des côtés des figures données, les angles entre ces droites supplémentent, pour donner π, soit un des angles internes de la figure donnée, soit une somme de plusieurs de ces angles internes. Puisque la somme d'une quantité définie ne peut pas être rendue arbitrairement petite, il en découle que l'angle entre da et d'a' ne peut pas être arbitrairement petit. En conséquence, les figures ne peuvent toutes avoir des positions différentes les unes des autres, et donc le nombre de positions est lui-même un nombre défini m. Donc, de la régularité de l'arrangement des figures nous concluons que si nous choisissons dans toutes les figures qui sont en position parallèle des points correspondants, nous obtenons un réseau plan par rapport auquel toutes les autres figures en position parallèle constituent des éléments d'aire correspondants. L'ensemble de m systèmes de ces éléments pave le plan, et conséquemment chacun de ces éléments couvre une aire égale à 1/m fois celle d'un parallélogramme du réseau plan; avec m de ces éléments, il est possible de former un parallélogone égal au parallélogramme du réseau plan.»

L'erreur principale consiste à assumer, comme le fait Fédorov, que le pavage est régulier. Il entend par là, comme il l'indique plus tard (à la page 308; nous n'en sommes pour l'instant qu'à la page 254), que les éléments de pavage sont équivalents par rapport au groupe de mouvements qui produiraient une application du pavage sur lui-même. Ce n'est que lorsque cette régularité est présupposée, qu'il est possible de conclure, avec Fédorov, que le pavage est doublement périodique. Fédorov réalisa toutefois, ce qui est tout à son honneur, qu'il est nécessaire de **démontrer** que la régularité implique la périodicité.

lines which are sides of figures in the given system; in this case, on the basis of Theorem 1, the angle between da and d'a' is equal to the algebraic sum of the angles between all sides of the broken line (defined by these lines); but since the straight line segments of which it consists are sides of the given figures, the angles between these lines are supplementary to π by one or a sum of several internal angles of the given figure. Since the sum of a definite quantity cannot be made arbitrarily small, it follows that the angle between da and d'a' cannot be arbitrarily small. Consequently, all the figures cannot differ from one another in position and thus the number of positions is itself some definite number m. Thus, by the regularity of the arrangement of the figures we conclude that if we choose in all the figures which are in parallel position corresponding points, we obtain a plane lattice with respect to which all other figures in parallel position appear as coresponding elements of area. The set of m systems of these elements fills the plane and therefore each such element, by size, is 1/m part of a parallelogram of the net; from m such elements, it is possible to form a parallelogon, equal to the parallelogram of the net."

The principal error is of course Fedorov's assumption that the tiling is regular. By this he means, as he indicates later (on page 308; we are now on page 254) that the tiles are equivalent with respect to the group of motions which may map the tiling onto itself. Only under this assumption can one conclude, as Fedorov does, that the tiling is doubly periodic. It is to his credit, however, that he realized that it is necessary to **prove** that regularity implies periodicity.

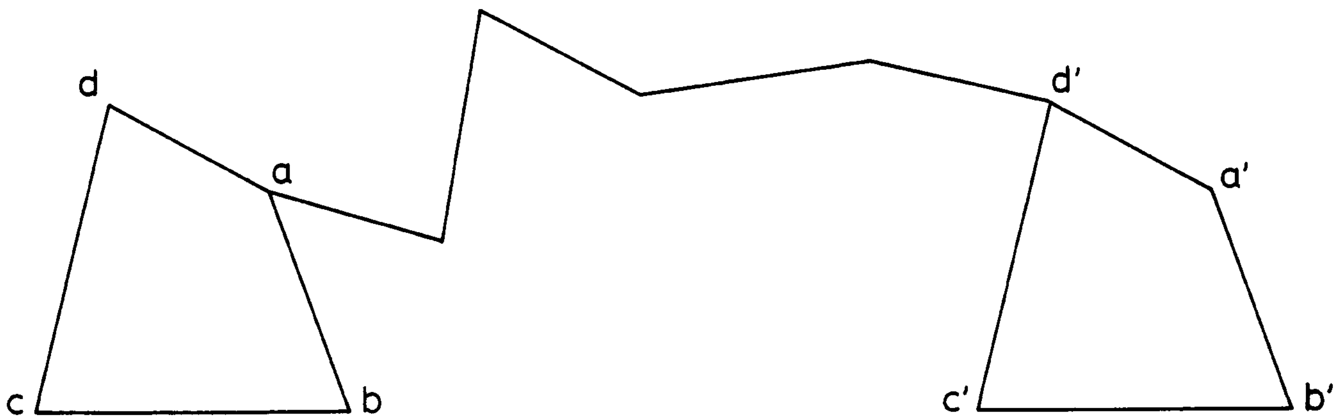


Figure 3. Fedorov's Figure 104 • La figure 104 de Fédorov.

Afin de généraliser de deux à trois dimensions la théorie des planigones, Fédorov définit (au chapitre 12) un type de polyèdre qu'il nomme zonaèdre, «un polyèdre dont les faces sont disposées sur les zones principales». (Une zone principale est une ceinture fermée de faces avec laquelle les faces adjacentes forment des intersections disposées sur des arêtes parallèles et de longueurs égales du polyèdre.) Les zonaèdres avaient été définis par Kepler, mais dans un sens plus restreint. Fédorov démontre que, pour tout zonaèdre donné, $(p-1)p = (1/2)(1 \bullet 2f_2 + 2 \bullet 3f_3 + \ldots + (n-1)nf_n + \ldots)$, où p est le nombre de zones, et f_i est le nombre de faces qui sont des 2i-gones. Avec cette formule pour principal outil, il effectue alors son énumération. Fédorov démontre d'abord qu'il existe deux familles infinies de zonaèdres ayant des axes n-gonaux et des parallélogrammes pour faces: la première, pour laquelle $p = n$, comprend le cube, le rhombidodécaèdre et le rhombicosaèdre, lequel n'était «évidemment pas connu auparavant» (**Figure 4**). La seconde, pour laquelle $p = n + 1$, comprend le rhombidodécaèdre et le triacontaèdre. Il discute ensuite les zonaèdres constitués à la fois de faces hexagonales et de faces en forme de parallélogrammes, donnant comme exemples le prisme hexagonal, l'octaèdre tronqué et quatre zonaèdres additionnels.

In order to generalize the theory of planigons from two dimensions to three, Fedorov introduces (chapter 12) a type of polyhedron which he calls a zonohedron, "a polyhedron whose faces occur in principal zones". (A principal zone is a closed ring of faces in which adjacent faces intersect along equal and parallel edges of the polyhedron.) Zonohedra had been introduced by Kepler, but in a more restricted sense. Fedorov proves that for any given zonohedron, $(p - 1)p = (1/2)(1 \bullet 2f_2 + 2 \bullet 3f_3 + \ldots + (n-1)nf_n + \ldots)$, where p is the number of zones, and f_i is the number of faces which are 2i-gons. This formula is the principal tool in his enumeration. Fedorov first shows that there are two infinite families of zonohedra with n-gonal axes and parallelogram faces: the first, for which $p = n$, includes the cube, the rhombic dodecahedron, and the rhombic icosahedron, which was "evidently not known before" (**Figure 4**). The second, for which $p = n + 1$, includes the rhombic dodecahedron and the triacontahedron. Next he discusses zonohedra with both parallelogram and hexagonal faces, giving as examples the hexagonal prism, the truncated octahedron and four additional zonohedra.

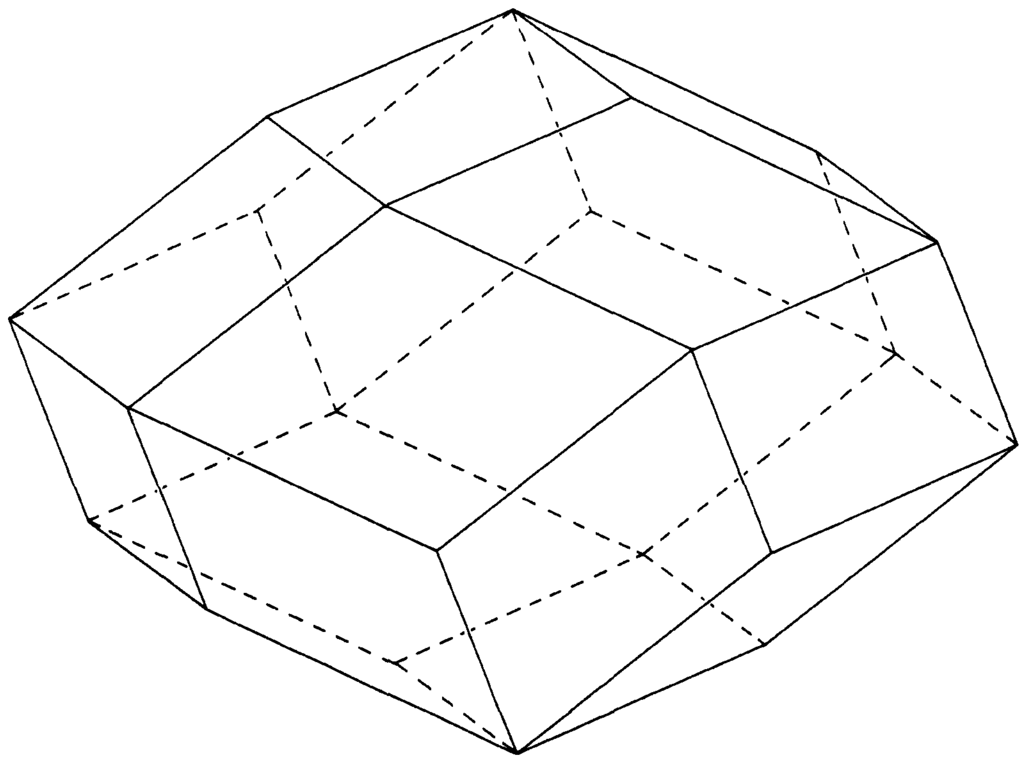


Figure 4. The rhombic icosahedron, discovered by Fedorov in his enumeration of the zonohedra. (Fedorov's Figure 105) • Le rhombicosaèdre, découvert par Fédorov au cours de son énumération des zonaèdres. (La figure 105 de Fédorov)

Fédorov démontre alors quelques théorèmes additionnels: par exemple, si les faces d'un polyèdre sont disposées en paires parallèles mais inversées, alors le polyèdre a un centre de symétrie. Coxeter fait remarquer que Fédorov n'avait évidemment pas réalisé qu'un zonaèdre est complètement caractérisé par le fait que toutes ses faces ont des centres de symétrie (Coxeter 1973).

Nous arrivons enfin au chapitre 13, lequel peut être résumé très brièvement. Fédorov y donne d'abord une définition du pavage de l'espace analogue à sa définition du pavage du plan, puis des définitions des stéréoèdres et des parallèloèdres analogues à celles des planigones et des parallélogones. Il soutient alors qu'un parallèloèdre convexe est un zonaèdre. Ceci implique que les faces d'un parallèloèdre convexe sont convexes, centrosymétriques et quadrilatérales ou hexagonales. De plus, si, à l'ensemble des parallèloèdres adjacents à un parallèloèdre donné par les faces qui appartiennent à une seule zone, nous ajoutons les parallèloèdres adjacents à ceux de cet ensemble par les faces qui appartiennent à cette même zone, nous obtenons une couche infinie de parallèloèdres. Une section plane passant par leurs centres est un pavage par les parallélogones, dont les arêtes, toujours au nombre de quatre ou six, sont l'intersection de cette section plane avec les faces des parallèloèdres qui appartiennent à la zone génératrice. Donc, écrit Fédorov, «il est nécessaire de déterminer quels sont les zonaèdres convexes dont les zones et les faces sont d'un ordre égal ou inférieur à six». Pour effectuer cette énumération, il utilise la formule énoncée plus tôt. (Les cinq parallèloèdres sont illustrés à la **Figure 1**.)

Finalement, après avoir discuté les propriétés des parallèloèdres, il «démontre» l'analogue tridimensionnel du théorème 17, et discute les systèmes de points réguliers tridimensionnels.

La cinquième et dernière partie du livre traite des polyèdres isoédriques et isogonaux de «degré supérieur». Bizarrement, la formule théorème-démonstration-corollaire-remarque est abandonnée et remplacée par une narration plutôt bavarde. Au chapitre 14, Fédorov examine les «koïlaèdres», ou les polyèdres à «surfaces solides» — aujourd'hui nous dirions de «génus zéro»; c'est la classe des polyèdres auxquels la formule d'Euler s'applique. Les isokoïlaèdres, dont les faces sont équivalentes, possèdent les mêmes groupes de symétrie que les isoèdres; à chaque groupe correspond un pavage de la sphère en régions fondamentales (des triangles de Möbius). Une face d'un isoèdre, note Fédorov, est l'intersection d'un plan tangent à la sphère inscrite en un point situé à l'intérieur d'une région fondamentale, avec les plans qui délimitent cette région. Les koïlaèdres sont construits d'une manière similaire, sauf que les points de tangence sont situés à l'extérieur de la région fondamentale; seulement certains points peuvent jouer ce rôle. Fédorov se sert de cette observation pour énumérer les koïlaèdres des groupes de symétrie des systèmes cubique et icosaédrique. (Brückner note que cela n'avait pas été fait auparavant.) Finalement, au chapitre 15, Fédorov traite des polyèdres de «degré supérieur», qui sont des unions de koïlaèdres, de la même façon que le pentagramme est l'union d'un pentagone régulier et d'une étoile à cinq branches. Fédorov définit E, le degré d'un polyèdre, comme le nombre maximum d'intersections d'une droite issue d'un point à l'intérieur du polyèdre avec le périmètre de celui-ci; conséquemment, $r + 2E = \Sigma\varepsilon_j - \Sigma e_i$, où r est le nombre de sommets, ε_j est le degré du $j^{\text{ième}}$ gonaèdre (figure des sommets), et e_i est le degré de la $i^{\text{ème}}$ face. (Cette définition et cette formule, qui étaient déjà connues, sont pour l'essentiel encore valables, mais ne tiennent pas compte de plusieurs cas exception-

Fedorov then proves some additional theorems: for example, if the faces of a polyhedron occur in parallel but inverted pairs, then the polyhedron has a center of symmetry. Coxeter has pointed out that Fedorov evidently did not realize that a zonohedron is completely characterized by the fact that all its faces have centers of symmetry (Coxeter, 1973).

Now at last we come to chapter 13, which can be summarized very briefly. Fedorov first defines a space filling, analogous to his definition of plane filling, and then defines stereohedra and parallelohedra, analogous to the planigons and parallelogons. He then argues that a convex parallelohedron is a zonohedron. This implies that the faces of a convex parallelohedron are convex, centrosymmetric, quadrilaterals or hexagons. Further, if we consider the set of parallelohedra which meet a given one along the faces of a single zone, and add the parallelohedra which meet them along the faces of this same zone, we obtain an infinite layer of parallelohedra. A plane cross section through their centers is a tiling by parallelogons, whose edges, of which there are four or six, are its intersection with the faces of the parallelohedra belonging to this zone. Thus, Fedorov writes, "it is necessary to determine the convex zonohedra whose zones and faces are of order not greater than six." To carry out this enumeration, he employs the formula stated above. (The five parallelohedra are shown in **Figure 1**.)

Finally, after a discussion of the properties of parallelohedra, he "proves" the three-dimensional analogue of Theorem 17, and discusses three-dimensional regular systems of points.

The fifth and last part of the book is concerned with isohedral and isogonal polyhedra of "higher degree". Oddly, now the theorem-proof-corollary-remark format is abandoned and replaced by a rather chatty narrative. In chapter 14 Fedorov considers "koilohedra", or polyhedra with "solid surfaces" — today we would say "genus zero"; this is the class of polyhedra to which Euler's formula applies. Isokoilohedra, those with equivalent faces, have the same symmetry groups as isohedra; to each group there corresponds a tessellation of the sphere into fundamental regions (Möbius triangles). A face of an isohedron, Fedorov notes, is the intersection of a plane which is tangent to the inscribed sphere at a point inside the fundamental region, with the planes that bound that region. The koilohedra are constructed in a similar manner, except that the points of tangency lie outside the fundamental region; only certain points can play this role. Fedorov uses this observation to enumerate the koilohedra for the symmetry groups of the cubic and icosahedral systems. (Brückner notes that this had not been done before.) Finally, in chapter 15, Fedorov considers polyhedra of "higher degree", which are unions of koilohedra, just as the pentagram is the union of a regular pentagon and a five-pointed star. Fedorov defines the degree E of a polyhedron to be the maximum number of times a straight line drawn from a point in its interior intersects the perimeter; consequently $r + 2E = \Sigma\varepsilon_j + \Sigma e_i$, where r is the number of vertices, ε_j is the degree of the jth gonohedron (vertex figure), and e_i is the degree of the ith face. (This definition and formula, which were known at the time, are essentially the modern ones, but they ignore several exceptional cases.) His goal in this chapter is to show how to find all isogonal polyhedra of higher degree, that is, all non-convex uniform polyhedra. His method consists in "assembling all nels.) Dans ce chapitre, il tente de montrer comment trouver tous les polyèdres isogonaux de degré supérieur, c'est-à-dire, tous les polyèdres uniformes non convexes. Sa méthode consiste à «assembler tous les gonaèdres du premier degré possibles à partir des gonaèdres élémentaires du système, [puisqu'] une face d'un isoèdre de degré E est constituée de E faces d'un isoèdre du premier degré.» Il s'attache alors à trouver les polygones sphériques convexes correspondants pour le système cubique, et à démontrer que les polyèdres cubiques uniformes découverts plus tôt par A. Badoureau (Badoureau, 1881) peuvent être tirés de cette liste (**Figure 5**). Bien que sa liste soit beaucoup plus longue que celle de Badoureau, il ne discute pas les polyèdres que ce dernier n'avait pas découverts.

possible gonohedra of the first degree from the elementary gonohedra of the system, [since] a face of an isohedron of degree E consists of E faces of an isohedron of the first degree." He then proceeds to find the corresponding convex spherical polygons for the cubic system, and to show that the uniform cubic polyhedra found earlier by A. Badoureau (Badoureau, 1881) can be obtained from his list (**Figure 5**). Although his list is much longer than Badoureau's, he does not discuss the polyhedra which were not found by the latter.

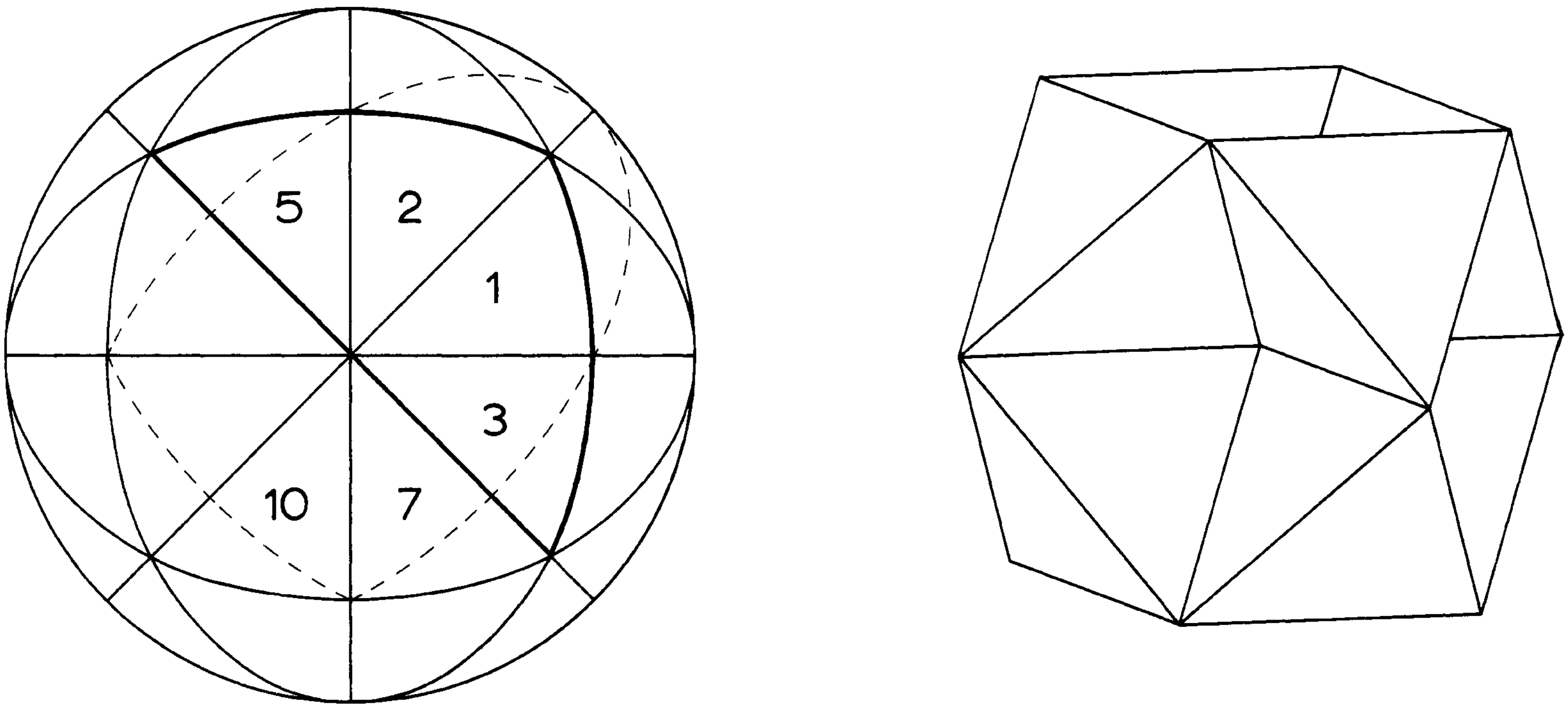


Figure 5. Fedorov's Figures 141 and 161. In 141, the sphere is subdivided into triangles, four of which (5, 2, 1, 3) are grouped together to form a larger triangle which yields a finite network covering the sphere 4 times. 161 is the corresponding uniform polyhedron (Badoureau, Figure 97, Coxeter et al., Figure 37) • Les figures 141 et 161 de Fédorov. À la figure 141, la sphère est subdivisée en triangles, dont quatre (5, 2, 3, 1) sont réunis pour former un plus grand triangle qui génère un réseau fini qui couvre la sphère 4 fois. La figure 161 montre le polyèdre uniforme correspondant (Badoureau, figure 97, Coxeter et al., figure 37).

Beaucoup plus tard, en 1954, H.S.M. Coxeter, M.S. Longuet-Higgins, et J.C.P. Miller décrivirent les 75 polyèdres uniformes; 74 d'entre eux furent obtenus en appliquant la construction de Wythoff aux triangles de Schwarz, qui sont des unions de triangles de Möbius. Mais un quadrilatère fut requis pour construire le dernier de ces polyèdres, laissant supposer qu'il «n'existe pas de raison générale pour la restriction aux triangles. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que les polygones sphériques de degré supérieur devraient satisfaire à différentes conditions qui sont presque toujours incompatibles.» (Coxeter et al., 1954). Fédorov, qui ne semble pas avoir eu connaissance des travaux de Möbius et de Schwarz, utilisa effectivement de tels polygones de degré supérieur, mais la façon dont il le fit nous échappe en partie. Une étude plus en profondeur de la cinquième partie pourrait être fort intéressante. Quels sont les détails de la méthode de Fédorov? Quelles furent exactement les conditions qu'il appliqua à ses polygones? Sa liste est-elle complète? Et quels sont les polyèdres uniformes qui peuvent être obtenus à partir de ces polygones?

Much later, in 1954, H.S.M. Coxeter, M.S. Longuet-Higgins, and J.C.P. Miller described the 75 uniform polyhedra; 74 of them were obtained by applying Wythoff's construction to Schwarz triangles, which are unions of Möbius triangles. But the last uniform polyhedron required a quadrilateral, suggesting that "there is no general reason for the restriction to triangles. We can only say that higher spherical polygons would have to satisfy various conditions which are almost always incompatible." (Coxeter, et al., 1954). Fedorov, who seems to have been unaware of the work of Möbius and Schwarz, did use such higher polygons, but it is not entirely clear to us how he did so. A deeper study of Part V could be very interesting. What are the details of Fedorov's method? What exactly were the conditions he imposed on his polygons? Is his list complete? And which of the uniform polyhedra can be obtained from them?

Postface

Une partie importante de la carrière scientifique de Fédorov fut consacrée à développer les implications de la théorie qu'il avait ébauchée à un si jeune âge. Quelques années plus tard, en 1891, il publia la première dérivation des 230 groupes cristallographiques tridimensionnels, lesquels correspondent aux groupes de symétrie des systèmes de points réguliers. Ce fut surtout grâce à cette contribution que Fédorov acquit sa renommée. Déjà, dans une remarque de la quatrième partie de son livre, Fédorov en entrevoyait la possibilité, et indiquait que la subdivision de l'espace en polyèdres congruents, comme il la proposait, pouvait être représentée par des systèmes de points réguliers dont les groupes de symétrie admettent aussi bien les mouvements impropres que les mouvements propres (avant lui, seuls les mouvements propres avaient été pris en considération). Fédorov ne se limita toutefois pas aux travaux théoriques; il prit part à plusieurs expéditions scientifiques en Oural, et contribua de façon appréciable au développement de la minéralogie et de la cristallographie. Sa vie durant, il poursuivit son étude de la symétrie et de la subdivision des paralléloèdres. Celle-ci aboutit à la publication posthume, en 1921, de *Das Krystallreich*, ouvrage monumental dans lequel il proposait une façon de déduire la structure chimique des corps cristallins de leur forme extérieure. Malheureusement, la diffraction des rayons X révèle que, dans plusieurs cristaux, les «molécules des corps cristallins», ces éléments distincts que Fédorov présupposait, n'existent pas. De ce fait, sa théorie de structure est aujourd'hui déchue. Mais plusieurs des découvertes qu'il fit alors qu'il œuvrait à l'édifier sont encore valables, et l'origine de la plupart peut être retracée jusqu'à son premier livre.

Postscript

Much of the rest of Fedorov's scientific life was devoted to developing the implications of the theory he had initiated at such an early age. A few years later, in 1891, he published the first derivation of the 230 three-dimensional crystallographic groups, which are the symmetry groups of the regular systems of points. This is the work for which Fedorov is most famous. It was anticipated in a remark in the fourth part of the book, in which he pointed out that the subdivisions of space into congruent polyhedra that he envisioned can be represented by regular systems of points whose symmetry groups include improper as well as proper motions (the improper motions had not been included by earlier authors). In addition to theoretical work, Fedorov took part in many scientific expeditions to the Urals, and made notable contributions to mineralogy and crystallography. Throughout his life he continued to develop his ideas on symmetry and on the subdivision of parallelohedra. The latter theory was the basis of his monumental *Das Krystallreich*, published posthumously in 1920, in which he attempted to deduce the chemical structures of crystals from their external forms. Unfortunately x-ray studies show that in many crystals the discrete units corresponding to "crystal molecules", which Fedorov had presupposed, do not exist. For this reason his structure theory is not accepted today. But many of the discoveries he made in the course of constructing this great edifice are of lasting value, and most of them had their roots in his early book.

Le livre renferme aussi de nombreuses idées qui furent ensuite développées par d'autres. Arthur Schoenflies, qui le premier démontra que, dans le cas tridimensionnel, la régularité implique la périodicité, et qui présenta presqu'en même temps que Fédorov sa propre énumération des groupes cristallographiques tridimensionnels, travailla en étroite collaboration avec ce dernier pour établir leur nombre à exactement 230 (Schoenflies, 1891). C'est en se fondant sur la généralisation de ce théorème à n dimensions que Bieberbach répondit à la première partie du 18$^{\text{ième}}$ problème de Hilbert, démontrant qu'il existe, pour chaque valeur de n, un nombre fini de groupes cristallographiques en n dimensions. Fédorov fut évidemment le premier à ébaucher une théorie générale des pavages. Au chapitre 11, il nous présente une tentative d'énumération des planigones à côtés inégaux, figures auxquelles il accordait cette attention spéciale parce qu'elles ne pavent le plan que d'une seule façon. Sous une forme rudimentaire, les symboles d'adjacence y apparaissent. (Pour un compte rendu sur l'état actuel de la théorie des pavages du plan, cf. Grünbaum et Shephard, 1985.) Lorsqu'ils entreprirent d'établir la cristallographie géométrique sur une base solide d'axiomes, Delone et ses collègues complétèrent, affinèrent et développèrent plusieurs des idées ébauchées par Fédorov dans *Une introduction à la théorie des figures* (par exemple, cf. Delone et al., 1979). La dérivation des cinq parallélloèdres par Delone est reproduite dans *Regular Figures* de Fejes Tóth. Rappelons que le théorème 17 du chapitre 11 n'a toujours pas été démontré: celui-ci équivaut à affirmer la non-existence d'un proto-élément de pavage apériodique.

Le livre de Fédorov demeure important non seulement à cause des idées qu'il renferme, mais aussi parce qu'il constitua un vaillant effort visant à réunir plusieurs disciplines pour le plus grand bien de chacune. Il y réussit au moins en partie; cet ouvrage contribua tant à l'enrichissement des mathématiques qu'à celui de la cristallographie. Mais, en géométrie, la tendance à limiter le champ d'exploration prédomine encore, alors que, comme le nota Fédorov, «des questions importantes, voire des champs complets, demeurent intouchés». Fédorov fit voir que certaines de ces questions intouchées étaient fascinantes, importantes et résolubles. Ceci est encore vrai aujourd'hui. La meilleure façon de célébrer le 100$^{\text{ième}}$ anniversaire d'*Une introduction à la théorie des figures* serait peut-être d'écrire un autre livre, un manuel de géométrie dont l'auteur explorerait les nombreux champs qui se prêtent à des applications de la géométrie, parce que fondés sur des concepts de nature géométrique, et contribuerait en retour au développement de ces champs.

Remerciements. Nous désirons remercier H.S.M. Coxeter pour ses précieux commentaires sur la cinquième partie du livre de Fédorov, ainsi que Branko Grünbaum, le professeur Coxeter et le critique désigné par la revue pour leurs critiques de la version préliminaire de cet article.

The book contains many ideas which later were developed by others. The fact that regularity implies periodicity was first established in the three-dimensional case by Arthur Schoenflies, whose enumeration of the three-dimensional crystallographic groups was almost simultaneous with Fedorov's, and who worked closely with him to determine their exact number 230 (Schoenflies, 1891). The generalization of this theorem to n dimensions was the basis for Bieberbach's affirmative answer to the first part of Hilbert's 18th problem, which asked whether the number of crystallographic groups in n dimensinons is finite for every n. Fedorov was evidently the first to attempt a general theory of tessellations. In chapter 11, he tried to enumerate all planigons with unequal sides, choosing this special case because these figures can tile the plane in only one way. Here we see adjacency symbols in a rudimentary form. (For a survey of the contemporary theory of plane tilings, see Grünbaum and Shephard, 1985.) In connection with their program of placing geometrical crystallography on a firm axiomatic basis, Delone and his colleagues completed, polished, and extended many of the ideas that Fedorov had sketched in *An Introduction to the Theory of Figures* (see, for example, Delone et al., 1979). Delone's derivation of the five parallelohedra is reproduced in L. Fejes Tóth's *Regular Figures*. We note again that Theorem 17 of chapter 11 remains an open problem: it is equivalent to asserting the nonexistence of an aperiodic prototile.

Fedorov's book remains important not only for the ideas that it contains, but also because it was a valiant effort to bring different disciplines together for the benefit of them all. He was at least partially successful; both mathematics and crystallography were substantially enriched by his work. But in large measure geometry still tends to look inward, while as Fedorov noted, "important questions and even entire areas have remained untouched". Fedorov showed that some of the untouched questions were fascinating, significant, and solvable. This is still true today. Perhaps the best way to celebrate the 100th anniversary of *An Introduction to the Theory of Figures* would be to write a new one, a text for a geometry course which would draw its inspiration from, and in turn contribute to, some of the many fields for which geometry is the basis and to which it can be applied.

Acknowledgements. We would like to thank H.S.M. Coxeter for helpful comments on Part V of Fedorov's book, and Branko Grünbaum, Professor Coxeter, and the referee for their criticisms of the preliminary version of this paper.

Adresses des auteurs:

Marjorie Senechal
Department of Mathematics
Smith College
Northampton, MA 01063
U.S.A.

R.V. Galiulin
Institute of Crystallography
Academy of Sciences of the USSR
Lenin Prospect 59
117333 Moscow
U.S.S.R.

Addresses of the authors:

Marjorie Senechal
Department of Mathematics
Smith College
Northampton, MA 01063
U.S.A.

R.V. Galiulin
Institute of Crystallography
Academy of Sciences of the USSR
Lenin Prospect 59
117333 Moscow
U.S.S.R.

Bibliographie

Le code qui apparaît dans la première colonne de chaque entrée bibliographique est constitué de trois parties séparées par des tirets. La première partie indique s'il s'agit d'un livre (Book), d'un Article, d'une Pré-impression ou de notes de cours (Course notes). La deuxième partie indique si le texte a été rédigé pour des Cristallographes, des Mathématiciens, des Architectes ou des ingénieurs (Engineers). La partie finale indique si le texte touche un ou plusieurs des thèmes principaux de la topologie structurale: Géométrie (en général), Polyèdres, Juxtaposition ou Rigidité.

Les mots-clés ou les annotations de la colonne finale signalent la pertinence de l'ouvrage à la recherche en topologie structurale, mais ne témoignent pas nécessairement de l'ensemble du contenu ou de l'intention de l'auteur.

Bibliography

The Code in the first block of each bibliographic item consist of three parts, separated by dashes. The first letter indicates whether the item is a Book, Article, Preprint or Course notes. The middle letter(s) indicates whether the piece was intended primarily for an audience of Crystallographers, Mathematicians, Architects or Engineers. The final letter(s) indicates if the piece touches on one or more of the principal themes of structural topology: Geometry (in general), Polyhedra, Juxtaposition or Rigidity.

The key-words or other annotations in the third column are intended to show the relevance of the work to research in structural topology, and do not necessarily reflect its overall contents or the intent of the author.

Badoureau 1881 A. Badoureau A-M-P	**Mémoire sur les figures isocèles** Journal de l'École Polytechnique 49 (1881), 47-172.	(Incomplete) derivation of the nonconvex uniform polyhedra • Une dérivation (incomplète) des polyèdres uniformes non convexes.
Bravais 1850 Auguste Bravais B-CM-J	**Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace** Journal de l'École Polytechnique 19 (1850), 1-128. English translation by Amos J. Shaler, The Crystallographic Society of America, 1949, *On the Systems Formed by Points Regularly Distributed on a Plane or in Space.*	Derivation of the 14 space lattices • La dérivation des 14 réseaux spatiaux.
Brückner 1900 Max Brückner B-M-P	**Vielecke und Vielflache** Leipzig, Teubner, 1900.	Definitive history of the theory of polyhedra up to 1900 • L'histoire complète de la théorie des polyèdres jusqu'à 1900.

Coxeter et al. 1954 H.S.M. Coxeter, M.S. Longuet-Higgins, J.C.P. Miller A-M-P	**Uniform Polyhedra** Royal Society, Philosophical Transactions, 246A (1954), 401-450.	Detailed derivation of the 75 uniform polyhedra, with illustrations • La dérivation détaillée des 75 polyèdres uniformes, avec illustrations.
Coxeter 1973 H.S.M. Coxeter B-M-P	**Regular Polytopes** 3[rd] edition, Dover, N.Y. 1973.	Regular polytopes, uniform polyhedra, zonohedra • Les polytopes réguliers, les polyèdres uniformes et les zonaèdres.
Delone 1956 B.N. Delone A-CM-G	**Fedorov as a geometer** Akademiiia nauk S.S.S.R. Institut istori estestvoznania i techniki Trudy, 10 (1956), 5-12. In Russian.	Brief discussion of Fedorov's work on symmetry and on polyhedra • Une brève discussion des travaux de Fédorov sur la symétrie et les polyèdres.
Delone et al. 1979 B.N. Delone, R.V. Galiulin, M.I. Shtogrin A-CM-J	**The Contemporary Theory of Regular Partitions of Euclidean Space** E.C. Fedorov, *Regular Division of the Plane and of Space*, Classics of Science, Moscow, 1979, 234-265. In Russian.	N-dimensional treatment of the problems considered by Fedorov • Un traitement à N dimensions des problèmes étudiés par Fédorov.
Fedorov 1885 E.S. Fedorov B-CM-PJ	**An Introduction to the Theory of Figures** Notices of the Imperial Petersburg Mineralogical Society (1885), 2[nd] series, vol. 21, 1-279.	This book is the subject of the present article • Ce livre sert de sujet au présent article.
Fedorov 1891 E.S. Fedorov B-CM-GJ	**The Symmetry of Regular Systems of Figures** Notices of the Imperial Petersburg Mineralogical Society (1891), vol. 28, 1-146. In Russian. English translation by D. Harker and K. Harker, American Cryst. Assoc., *Symmetry of Crystals*.	Enumeration of the 230 three-dimensional crystallographic groups • Une énumération des 230 groupes cristallographiques tridimensionnels.
Fedorov 1920 E.S. Fedorov B-C-PJ	**Das Kristallreich** Mem. Acad. Sci. Russ. VIII[e], Ser 36, 1920.	Deduction of structure and composition of crystals from their forms • La déduction de la structure et de la composition des corps cristallins à partir de leurs formes.
Fejes Tóth 1965 L. Fejes Tóth B-M-PJ	**Regular Figures** Pergamon Press 1965, 114-119, 121-123.	The only account available in English of Delone's derivation of the five parallelohedra • Le seul compte rendu disponible en anglais de la dérivation des cinq paralléloèdres par Delone.
Grünbaum and Shephard 1985 B. Grünbaum and G.S. Shephard B-M-J	**Tilings and Patterns** W.F. Freeman, San Francisco, 1985.	Contemporary theory of tilings and patterns in the Euclidean plane • La théorie actuelle des pavages et des motifs dans le plan euclidien.

Haüy 1822 René Just Haüy B-C-PJ	**Traité de Cristallographie, 3 volumes.** Paris, 1822.	Haüy's famous polyhedral theory of crystal structure • La célèbre théorie polyédrique de la structure des corps cristallins de Haüy.
Romé de L'Isle 1783 J.B.L. Romé de L'Isle B-C-P	**Cristallographie, ou description des formes propres à tous les corps du règne minéral, 4 volumes** Paris, 1783.	Law of constancy of interfacial angles; truncation as the relation among crystals of the same species • La loi de la constance des angles dièdres; la troncature comme relation entre les cristaux des mêmes espèces.
Schoenflies 1891 Arthur Schoenflies B-M-GJ	**Krystallsysteme and Krystallstrucktur** Leipzig, Tuebner, 1981.	Derivation of the 230 three-dimensional crystallographic groups • La dérivation des 230 groupes cristallographiques tridimensionnels.
Steinitz 1922 Ernst Steinitz A-M-PJ	**Polyeder und Raumeinteilungen** Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band III, Heft 9, 1922, Teubner, Leipzig.	The theory of polyhedra, with historical remarks • La théorie des polyèdres, avec remarques historiques.