

# Estudio numérico del control exacto desde el contorno de la ecuación Korteweg–de Vries lineal

Antonio Capella-Kort

Universitat Politècnica de Catalunya  
Departamento de Matemática Aplicada IV  
Jordi Girona 1–3, Edificio C3, 08034 Barcelona, España  
Tel. 34-93-401 59 49; Fax: 34-93-401 59 81  
e-mail: acapella@mat.upc.es

Josep Sarrate

Universitat Politècnica de Catalunya  
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Departamento de Matemática Aplicada III  
Jordi Girona 1–3, Edificio C2, 08034 Barcelona, España  
Tel. 34-93-401 69 11; Fax: 34-93-401 18 25  
e-mail: jose.sarrate@upc.es

## Resumen

En este artículo primero se desarrolla un esquema en diferencias finitas de segundo orden, tanto en la discretización espacial como temporal, para la resolución de la versión lineal de la ecuación de Korteweg–de Vries (KdV) en dominios acotados. Seguidamente, y basándose en el esquema descrito anteriormente, se presenta un modelo numérico para implementar el método de unicidad de Hilbert (HUM) al control de la ecuación KdV lineal donde el control actúa sobre el contorno del dominio. En particular, se encuentra una solución al problema de control en el subespacio de funciones lineales a trozos definidas sobre la discretización del dominio. Finalmente, se presentan varios ejemplos numéricos que ponen de manifiesto tanto el rango de aplicación del método desarrollado como la exactitud del mismo.

### **Palabras clave:**

*ecuación de Korteweg–de Vries lineal, control exacto desde el contorno, diferencias finitas.*

## NUMERICAL STUDY OF THE EXACT BOUNDARY CONTROLLABILITY FOR THE KORTEWEG-DE VRIES LINEAR EQUATION

## Summary

In this article, we give a second order, in space and time, finite difference scheme for the linear Korteweg–de Vries equation (KdV) on bounded domains. Using this method, a numerical model for the boundary controllability of linear Korteweg–de Vries equation by means of the Hilbert Uniqueness Method (HUM) is proposed. In particular, it is found that the solution of the control problem lies on the piecewise linear functions space defined over the discretization of the domain. Finally, several numerical examples are presented in order to assess the accuracy and the range of application of the developed method.

### **Keywords:**

*linear Korteweg–de Vries equation, boundary controllability, finite difference.*

## INTRODUCCIÓN

La ecuación de Korteweg–de Vries fue originalmente propuesta por D.J. Korteweg y G. de Vries en 1895 para modelar la propagación unidireccional de ondas, con amplitud pequeña y periodo largo, como las que se generan en canales de agua poco profundos. Zabusky y

Kruskal<sup>1</sup> desarrollaron en 1965 el concepto de solitón al analizar los resultados de la resolución numérica de la ecuación KdV. Desde entonces el interés en fenómenos que involucran la propagación de solitones y en la resolución numérica de las ecuaciones en derivadas parciales que los describen ha aumentado de forma espectacular. En este sentido se debe resaltar que este modelo se utiliza para describir una gran variedad de fenómenos, como son: la propagación de ondas en plasmas, cristales y fibras<sup>2</sup>.

Generalmente, la ecuación KdV se escribe como<sup>2,3</sup>

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

donde  $u$  representa el desplazamiento de la superficie del líquido fuera del equilibrio,  $t$  es el tiempo y la coordenada espacial  $x$  se mide en un sistema de referencia en movimiento. De acuerdo con la referencia 3, para describir este tipo de ondas en un sistema de referencia en reposo se debe añadir el término  $u_x$  a la expresin anterior (1). Por consiguiente, la ecuación KdV en dicho sistema de referencia es

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2)$$

Esta ecuación coincide con la presentada originalmente por Korteweg y de Vries<sup>2</sup>. En determinadas aplicaciones, cuando puede considerarse que la amplitud de la onda es relativamente pequeña, el término no lineal de (2) puede ser despreciado, obteniéndose así la versión lineal de la ecuación KdV

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \quad (3)$$

El análisis teórico del control exacto desde el contorno para dominios acotados de la KdV tanto en su versión no lineal como lineal, así como un estudio numérico de éste último caso, pueden encontrarse en las referencias 4 y 5. Concretamente, en la referencia 5 se aplica un método de colocación seudo espectral para modelar numéricamente (3) y estudiar el problema de control.

En este artículo se presenta un esquema en diferencias finitas para resolver numéricamente la versión lineal de la ecuación KdV. Basándose en este esquema, se desarrolla un modelo numérico para implementar el método de unicidad de Hilbert al control desde el contorno de la ecuación de KdV lineal.

La estructura del artículo es la siguiente: en el segundo apartado se revisa el concepto de control exacto para la ecuación KdV lineal y se exponen las características básicas del método de unicidad de Hilbert utilizado para abordar este problema. En el tercer apartado se plantea tanto el modelo en diferencias finitas propuesto para la KdV lineal, prestando especial atención a la implementación de las condiciones de contorno, como el modelo numérico para el HUM. Por último, se muestran diversos experimentos numéricos que corroboran el rango de aplicación del método desarrollado y se detallan las principales conclusiones de este trabajo.

## CONTROL EXACTO Y MÉTODO DE UNICIDAD DE HILBERT

En general, existen distintos planteamientos del problema de control y distintas formas de abordarlo. A continuación, se define con precisión el concepto de control exacto aplicado al problema (3).

**Definición:** Considérese la ecuación (3) definida sobre el intervalo  $I = [a, b]$ , para  $0 \leq t \leq T$ . Sea  $y_T \in L^2(I)$ . Si existe una función de control  $h(t) \in L^2(0, T)$  tal que, al

evolucionar el sistema

$$\begin{aligned}y_t + y_x + y_{xxx} &= 0 \\y(a, t) = y(b, t) &= 0 \\y_x(b, t) &= h(t) \\y(x, 0) &= y_0(x)\end{aligned}\tag{4}$$

se obtiene que  $y(x, T) \equiv y_T(x)$  para todo estado inicial  $y_0 \in L^2(I)$ ; entonces se dice que el sistema (4) es exactamente controlable. A la función  $y_T(x)$  se le denomina estado prescrito.

Una de las formas de abordar el problema del control exacto para una ecuación en derivadas parciales, como (4), se basa en el método de unicidad de Hilbert<sup>6</sup>. Este método es constructivo, ya que además de utilizarse para demostrar que un sistema dado es exactamente controlable, también permite encontrar la función de control.

A fin de presentar los fundamentos del trabajo realizado, a continuación se describe la parte constructiva del HUM aplicado al control exacto de (4). Un análisis detallado puede encontrarse en las referencias 4, 5, 6 y 7.

Considérese un operador

$$\Lambda : L^2(I) \longrightarrow L^2(I)\tag{5}$$

$$w \longmapsto \Lambda(w) := y(\cdot, T)\tag{6}$$

tal que la función  $y(\cdot, T)$  sea el estado final del problema (4) al instante  $t = T$ . Entonces, dado este operador  $\Lambda$ , el problema de control se transforma en buscar una función  $w(x)$  tal que  $\Lambda(w)$  sea el estado prescrito  $y_T(x)$ , en lugar de buscar directamente la función de control  $h(t)$ . A primera vista parece que no se ha simplificado el problema. Sin embargo, como se comprobará en el siguiente apartado, encontrar la función  $w(x)$  es más sencillo. De acuerdo con la referencia 5, y sin pérdida de generalidad, se supondrá que la condición inicial de (4) es nula, i.e.  $y_0(x) = 0$ .

El HUM establece que la acción de  $\Lambda$  sobre  $w(x)$  se define de la siguiente forma<sup>4</sup>:

1. Se toma  $w(x) \in L^2(I)$  como la condición inicial del problema de Cauchy

$$\begin{aligned}u_t + u_x + u_{xxx} &= 0 \\u(a, t) = u(b, t) &= 0 \\u_x(a, t) &= 0 \\u(x, T) &= w(x)\end{aligned}\tag{7}$$

donde el tiempo transcurre hacia atrás (i.e. desde  $t = T$  hasta  $t = 0$ ) y se resuelve hasta  $t = 0$ .

2. A continuación se toma el valor de la derivada espacial de  $u(x, t)$  en el extremo derecho del intervalo (i.e.  $x = b$ ) y se define  $h(t) := u_x(b, t)$  para el problema de Cauchy

$$\begin{aligned}y_t + y_x + y_{xxx} &= 0 \\y(a, t) = y(b, t) &= 0 \\y_x(b, t) = h(t) &(\text{:= } u_x(b, t)) \\y(x, 0) &= 0\end{aligned}\tag{8}$$

el cual se resuelve desde  $t = 0$  hasta  $t = T$ .

3. Finalmente se asigna la función  $y(x, T) \in L^2(I)$ , obtenida de la solución de (8), como el valor que toma el operador  $\Lambda$  cuando actúa sobre  $w(x)$ , es decir,

$$\Lambda(w) := y(\cdot, T) \quad (9)$$

Obsérvese que  $\Lambda$  es un operador lineal y que dado cualquier  $w$ ,  $\Lambda(w)$  siempre es el estado final de un problema del tipo (8). En el caso de que  $\Lambda$  además fuera invertible, se podría encontrar una  $w_0$  que resuelva

$$\Lambda(w_0)(x) = y_T(x) \quad (10)$$

Aún más, si (10) se satisface, dada la forma en que  $\Lambda$  actúa sobre  $w_0$ , se puede encontrar la función de control  $h(t)$ , como en (8), que resuelve el problema de control (4). Por lo tanto, el problema de demostrar que (4) es exactamente controlable se ha transformado en establecer para qué casos  $\Lambda$  es invertible.

En la referencia 5 se demuestra que bajo determinadas hipótesis es posible controlar exactamente el sistema (4). En particular, se establece que (4) es exactamente controlable, siempre que la longitud  $L > 0$  del intervalo  $I = [a, b]$  no esté en el conjunto

$$\mathcal{N} = \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + kl + l^2}{3}}; k, l \in \mathbb{N}^* \right\}$$

donde  $\mathbb{N}^*$  son los enteros positivos.

## MODELO NUMÉRICO

En este apartado se describe el modelo numérico para el problema de control (4). En la primera parte se describe el esquema en diferencias finitas para las ecuaciones (7) y (8), en tanto que en la segunda parte se explica con detalle la implementación numérica del operador  $\Lambda$  y cómo se resuelve el problema (10).

### Modelo de diferencias finitas para KdV lineal

A continuación se desarrolla el modelo numérico en diferencias finitas para la ecuación KdV lineal. Recuérdese que para satisfacer las condiciones del teorema, la longitud del intervalo debe verificar que  $L = b - a \notin \mathcal{N}$ . Entonces, el problema a resolver es

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0, \quad \text{en } (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \quad (11)$$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad \text{en } t \in [0, T] \quad (12)$$

$$u_x(b, t) = h(t), \quad \text{en } t \in (0, T) \quad (13)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (14)$$

donde  $x \in [a, b]$ .

Debido a que la implementación de las condiciones de contorno (12) y (13) es delicada, la presentación del modelo se divide en tres partes. En la primera se discretiza (11), en la segunda se implementa (12) y en la última se impone (13).

**Discretización de la ecuación KdV lineal**

La discretización del problema (11) se realiza considerando la partición  $\mathcal{P} = \{x_k = x_0 + k\Delta x, | k = 0, \dots, M+1, x_0 = a, x_{M+1} = b \text{ y } \Delta x = \frac{x_{M+1} - x_0}{M+1}\}$ , lo que divide al intervalo  $[a, b]$  en  $M+1$  segmentos de longitud  $\Delta x$ , con  $M$  puntos interiores. Asimismo, se discretiza el dominio temporal en intervalos de valor  $\Delta t$ . La ecuación (11) se discretiza utilizando un esquema de Crank–Nicolson, donde la discretización de los operadores diferenciales que aparecen en (11) es

$$\begin{aligned} u_x|_k^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left( u_x|_k^{n+1} + u_x|_k^n \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ u_{xxx}|_k^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left( u_{xxx}|_k^{n+1} + u_{xxx}|_k^n \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ u_t|_k^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta t} (u_k^{n+1} - u_k^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} u_x|_k^n &= \frac{1}{2\Delta x} (-u_{k-1}^n + u_{k+1}^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ u_{xxx}|_k^n &= \frac{1}{8\Delta x^3} (-u_{k-3}^n + 3u_{k-1}^n - 3u_{k+1}^n + u_{k+3}^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned}$$

Sustituyendo las aproximaciones (15) en (11) y reorganizando los términos, se obtiene la versión discreta de (11)

$$\begin{aligned} -qu_{k-3}^{n+1} - (p-3q)u_{k-1}^{n+1} + u_k^{n+1} + (p-3q)u_{k+1}^{n+1} + qu_{k+3}^{n+1} = \\ = qu_{k-3}^n + (p-3q)u_{k-1}^n + u_k^n - (p-3q)u_{k+1}^n - qu_{k+3}^n + \mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2) \end{aligned}$$

donde

$$p = \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad q = \frac{1}{16} \frac{\Delta t}{\Delta x^3}$$

Finalmente, la aproximación numérica  $U(x, t)$  a la función  $u(x, t)$  verifica

$$\begin{aligned} -qU_{k-3}^{n+1} - (p-3q)U_{k-1}^{n+1} + U_k^{n+1} + (p-3q)U_{k+1}^{n+1} + qU_{k+3}^{n+1} = \\ = qU_{k-3}^n + (p-3q)U_{k-1}^n + U_k^n - (p-3q)U_{k+1}^n - qU_{k+3}^n \end{aligned} \quad (16)$$

**Condiciones de contorno de Dirichlet**

Las condiciones de contorno afectan a la ecuación (16) para los valores del índice  $k = [1, 2, 3]$  en el extremo derecho del intervalo ( $x = a$ ) y  $k = [M-2, M-1, M]$  en el extremo izquierdo del mismo ( $x = b$ ). Considérese primero el caso del lado izquierdo, i.e.

$$\begin{aligned} k = 1 \quad -qU_{-2}^{n+1} - (p-3q)U_0^{n+1} + U_1^{n+1} + (p-3q)U_2^{n+1} + qU_4^{n+1} = \\ = qU_{-2}^n + (p-3q)U_0^n + U_1^n - (p-3q)U_2^n - qU_4^n \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} k = 2 \quad -qU_{-1}^{n+1} - (p-3q)U_1^{n+1} + U_2^{n+1} + (p-3q)U_3^{n+1} + qU_5^{n+1} = \\ = qU_{-1}^n + (p-3q)U_1^n + U_2^n - (p-3q)U_3^n - qU_5^n \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} k = 3 \quad -qU_0^{n+1} - (p-3q)U_2^{n+1} + U_3^{n+1} + (p-3q)U_4^{n+1} + qU_6^{n+1} = \\ = qU_0^n + (p-3q)U_2^n + U_3^n - (p-3q)U_4^n - qU_6^n \end{aligned} \quad (19)$$

Nótese que se deben usar las condiciones de contorno (12) para estimar los valores de  $U_{-2}^m$ ,  $U_{-1}^m$  y  $U_0^m$  que aparecen en (17)–(19) en términos de  $U_k^m$  para  $1 \leq k \leq M$ .

La condición de Dirichlet en  $x = 0$  (12) implica  $U_0^n \equiv 0$ . Por consiguiente, la ecuación (19) puede evaluarse completamente. Además, esta condición aplicada a la discretización de primer orden en diferencias hacia adelante y hacia atrás de la primera derivada espacial implica que

$$\begin{aligned} u_x|_0^n &\cong \frac{1}{\Delta x} (U_1^n - U_0^n) \cong \frac{U_1^n}{\Delta x} \\ u_x|_0^n &\cong \frac{1}{\Delta x} (U_0^n - U_{-1}^n) \cong -\frac{U_{-1}^n}{\Delta x} \end{aligned} \quad (20)$$

de donde se deduce

$$U_1^n = -U_{-1}^n \quad (21)$$

Obsérvese que existe una condición similar para el otro extremo del intervalo. Es decir, dado que  $U_{M+1}^n = 0$ , por la condición de contorno de Dirichlet, entonces

$$U_M^n = -U_{M+2}^n \quad (22)$$

Al sustituir (21) en (18) resulta la siguiente expresión que sólo incluye valores de la incógnita en puntos interiores del dominio

$$-(p-4q)U_1^{n+1} + U_2^{n+1} + (p-3q)U_3^{n+1} + qU_5^{n+1} = (p-4q)U_1^n + U_2^n - (p-3q)U_3^n - qU_5^n \quad (23)$$

Para poder evaluar la ecuación (17) de forma que sólo aparezcan nodos internos de la discretización, es necesario encontrar una expresión que aproxime a  $U_{-2}^m$ . Con este fin considérense las siguientes aproximaciones de orden  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$  para la tercera derivada

$$u_{xxx}|_0^m \cong \frac{1}{2\Delta x^3} (-U_{-2}^m + 2U_{-1}^m - 2U_1^m + U_2^m) \quad (24)$$

$$u_{xxx}|_0^m \cong \frac{1}{8\Delta x^3} (-U_{-3}^m + 3U_{-1}^m - 3U_1^m + U_3^m) \quad (25)$$

Al restar (24) de (25), sustituir en el resultado la relación (21) y despejar  $U_{-2}^m$  se obtiene

$$U_{-2}^m = -\frac{5}{2}U_1^m + U_2^m + \frac{1}{4}(U_{-3}^m - U_3^m) \quad (26)$$

La ecuación (26) permite calcular el valor de  $U_{-2}$ , siempre que se conozca  $U_{-3}$ . Este último valor se estima suponiendo que la ecuación (16) es válida para  $k = 0$ , i.e.

$$\begin{aligned} -qU_{-3}^{n+1} - (p-3q)U_{-1}^{n+1} + U_0^{n+1} + (p-3q)U_1^{n+1} + qU_3^{n+1} \\ = qU_{-3}^n + (p-3q)U_{-1}^n + U_0^n - (p-3q)U_1^n - qU_3^n \end{aligned}$$

Utilizando la relación (21) e imponiendo la condición de contorno de Dirichlet en  $x = 0$ , (12), la ecuación anterior se transforma en

$$-U_{-3}^{n+1} + U_3^{n+1} + \frac{2(p-3q)}{q}U_1^{n+1} = U_{-3}^n - U_3^n - \frac{2(p-3q)}{q}U_1^n \quad (27)$$

Sustituyendo ahora (26) en (27), se obtiene

$$qU_{-2}^{n+1} - qU_2^{n+1} + \left(\frac{p-8q}{2}\right)U_1^{n+1} = -qU_{-2}^n + qU_2^n - \left(\frac{p-8q}{2}\right)U_1^n \quad (28)$$



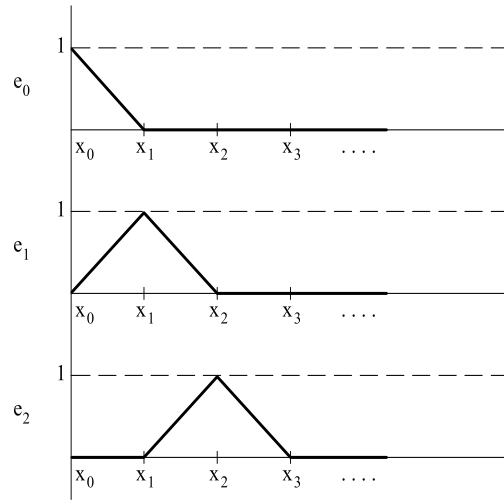


Figura 1. Elementos  $e_i$  de la base de  $\mathcal{F}$

### Modelo numérico para $\Lambda$ y aplicación al HUM

En este subapartado se presenta la aplicación del modelo numérico descrito anteriormente para el algoritmo del HUM. Concretamente, se detalla la implementación numérica del operador  $\Lambda$  y cómo se resuelve el problema (10).

El primer paso consiste en implementar numéricamente el operador  $\Lambda$ . Para ello, de acuerdo con los tres pasos introducidos en el apartado anterior, primero se debe resolver el problema (7), donde el tiempo corre hacia atrás, desde  $t = T$  hasta  $t = 0$ . Nótese que el cambio de variables  $s = T - t$  y  $z = -x$ , transforma al problema (7) en un problema similar a (11)–(13). Por consiguiente, en este caso es posible aplicar el esquema descrito en el subapartado anterior para su resolución. Seguidamente, se debe resolver (8) aplicando el mismo esquema numérico, puesto que también coincide con el problema definido por las ecuaciones (11)–(13).

Dado que el algoritmo numérico propuesto para hallar la imagen de  $w(x)$  mediante el operador  $\Lambda$  no es fácilmente invertible, en este trabajo se propone encontrar la solución del problema (10) en el subespacio de funciones

$$\mathcal{F} = \{P_1(x) \forall x \in (x_i, x_{i+1}), \mid x_i, x_{i+1} \in \mathcal{P}\} \subset L^2(I)$$

correspondiente a las funciones lineales  $P_1(x)$  a trozos, definidas sobre la partición  $\mathcal{P}$ . Nótese que una base para el espacio  $\mathcal{F}$  está dada por las funciones

$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x}(x - x_{i-1}), & \text{si } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{1}{\Delta x}(x_{i+1} - x), & \text{si } x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

En la Figura 1 se representan los primeros tres elementos de dicha base.

Por lo tanto, se debe hallar la expresión matricial del operador  $\Lambda$  en el subespacio  $\mathcal{F}$ . Para ello, se calcula la acción de  $\Lambda$  sobre cada  $e_i$ , con  $i = 1, \dots, M$  y se asigna

$$\Lambda_{i,j} = (\Lambda(e_i))_j$$

Nótese que esta matriz es de dimensión  $M \times M$ , ya que por las condiciones de Dirichlet (12) los elementos de la base  $e_0, e_{M+1} \in \mathcal{F}$  no se utilizan para representar ninguna solución del problema numérico (30). Es importante resaltar las siguientes observaciones:



1. El teorema<sup>4</sup> que establece la controlabilidad exacta de (4) implica, que el operador  $\Lambda$  es invertible en  $L^2(I)$ . Dado que  $\mathcal{F} \subset L^2(I)$ , la invertibilidad de la matriz  $\mathbf{\Lambda}$  queda asegurada, siempre que el algoritmo numérico para resolver (7) y (8) sea estable.
2. En referencia al comentario final sobre la condición de Neumann; obsérvese que si, al resolver el problema (7) para  $e_1(x)$  se hubiera impuesto la condición de Neumann (33) nula desde el instante  $n = 0$ , la primera columna de la matriz  $\Lambda_{i,j}$  sería idénticamente cero y, por lo tanto, la matriz  $\mathbf{\Lambda}$  no sería invertible. Por lo tanto, y como se ha comentado anteriormente, para el instante inicial  $n = 0$  y sólo para ese instante, no se define ninguna condición sobre la derivada.
3. Dada una función  $y(x) \in L^2(I)$ , su proyección,  $Y(x)$ , en el subespacio  $\mathcal{F}$  está dada por

$$Y(x) = P_{\mathcal{F}}(y(x)) = \sum_{i=0}^{M+1} y(x_i) e_i(x)$$

Finalmente, para resolver el problema de control (4) se calcula la proyección  $Y_T \in \mathcal{F}$  del estado prescrito  $y_T$  y se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$(\mathbf{\Lambda})W_0 = Y_T$$

que corresponde al problema (10) y donde  $W_0$  es la proyección de  $w_0$  en  $\mathcal{F}$ . A partir de  $W_0 \in \mathcal{F}$ , se resuelve el problema (7) con el esquema en diferencias finitas desarrollado anteriormente y se encuentra la función discreta de control  $h^n = h(t^n) = u_x(b, t^n)$ , con  $n = 1, \dots, [T/\Delta t]$ .

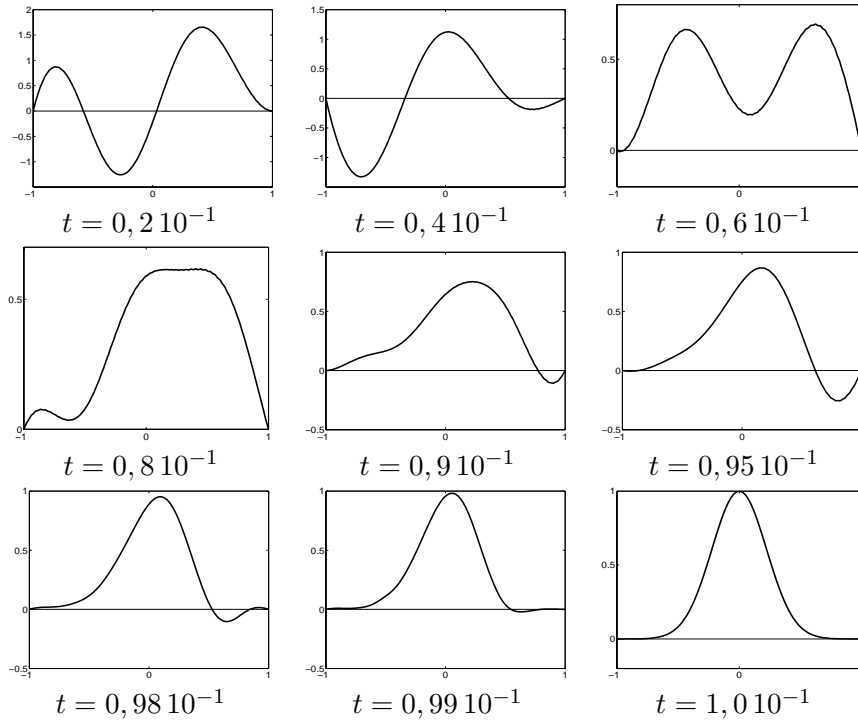
## EJEMPLOS NUMÉRICOS

Con el propósito de verificar la exactitud el rango de aplicación del método propuesto, en este apartado se presentan cuatro ejemplos numéricos. En todos ellos, la ecuación KdV se resuelve en el intervalo  $x \in (-1, 1)$ . Los primeros tres ejemplos se caracterizan por un estado prescrito,  $y_T(x)$  regular, mientras que en el último se impone un estado prescrito continuo, pero no derivable. Además, cada uno de estos ejemplos se ha resuelto utilizando dos discretizaciones diferentes,  $M = 50$ ,  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$  y  $M = 100$ ,  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$ .

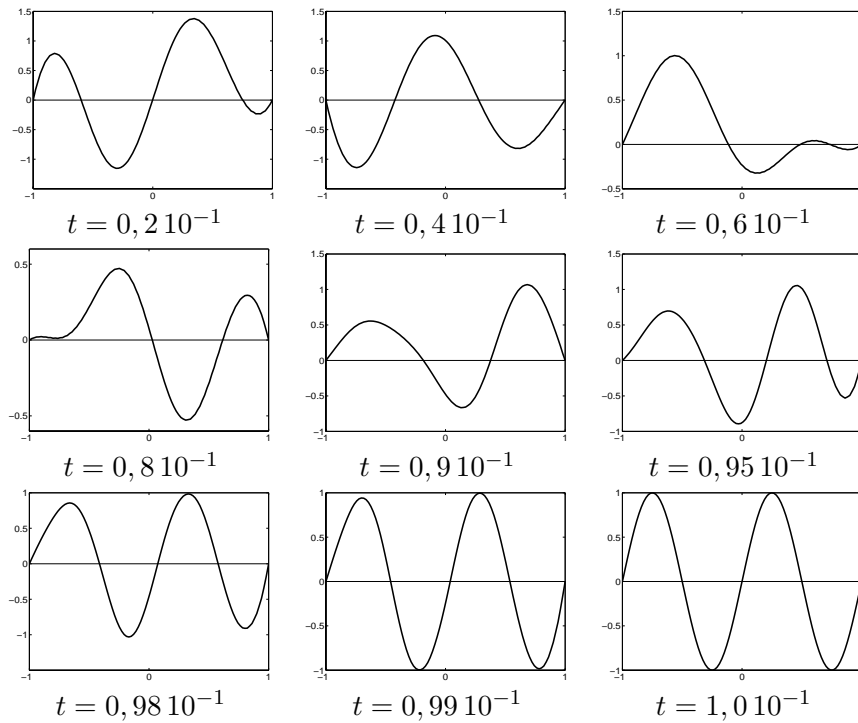
En el primer ejemplo la función que describe el estado prescrito es:  $y_T^1(x) = \exp(-10x^2) - \exp(-10)$ . En la Figura 2 se presenta la animación de la evolución de la función  $y(x, t)$  para la discretización  $M = 100$ ,  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$ . En esta animación se presentan nueve estados de la evolución de la función  $y(x, t)$ , asociados a los instantes de tiempo  $t_1 = 0, 2 \cdot 10^{-1} < 0, 4 \cdot 10^{-1} < 0, 6 \cdot 10^{-1} < 0, 8 \cdot 10^{-1} < 0, 9 \cdot 10^{-1} < 0, 95 \cdot 10^{-1} < 0, 98 \cdot 10^{-1} < 0, 99 \cdot 10^{-1} < t_9 = 1 \cdot 10^{-1}$ . Nótese que se ha omitido el estado inicial y que, con el propósito de representar con mayor claridad las funciones  $y(x, t)$ , en cada figura se utiliza una escala diferente.

En el segundo ejemplo el estado prescrito es:  $y_T^2(x) = \sin(2\pi x)$ . Como en el ejemplo anterior, en la Figura 3 se presenta la animación de la evolución de la función  $y(x, t)$  para la misma discretización. Los instantes de tiempo correspondientes a las imágenes de la animación coinciden con los utilizados en el ejemplo anterior.

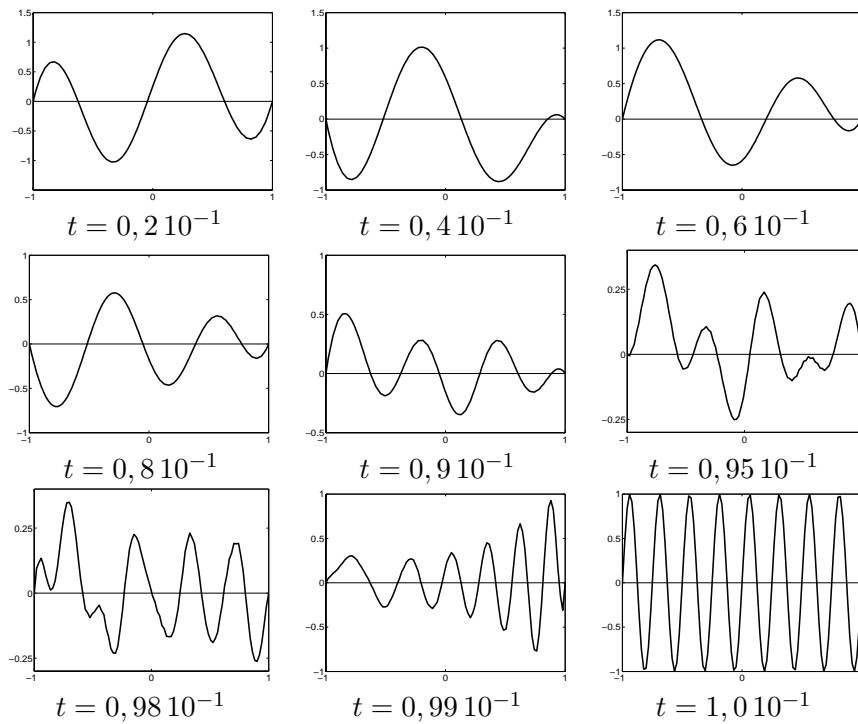
A fin de verificar el comportamiento del algoritmo desarrollado cuando el estado prescrito contiene altas frecuencias, en el tercer ejemplo se ha impuesto que el estado prescrito sea:  $y_T^3(x) = \sin(8\pi x)$ . En la Figura 4 se muestra la animación de la función  $y(x, t)$  para los mismos instantes que en los casos anteriores, cuando también se utiliza la misma discretización.



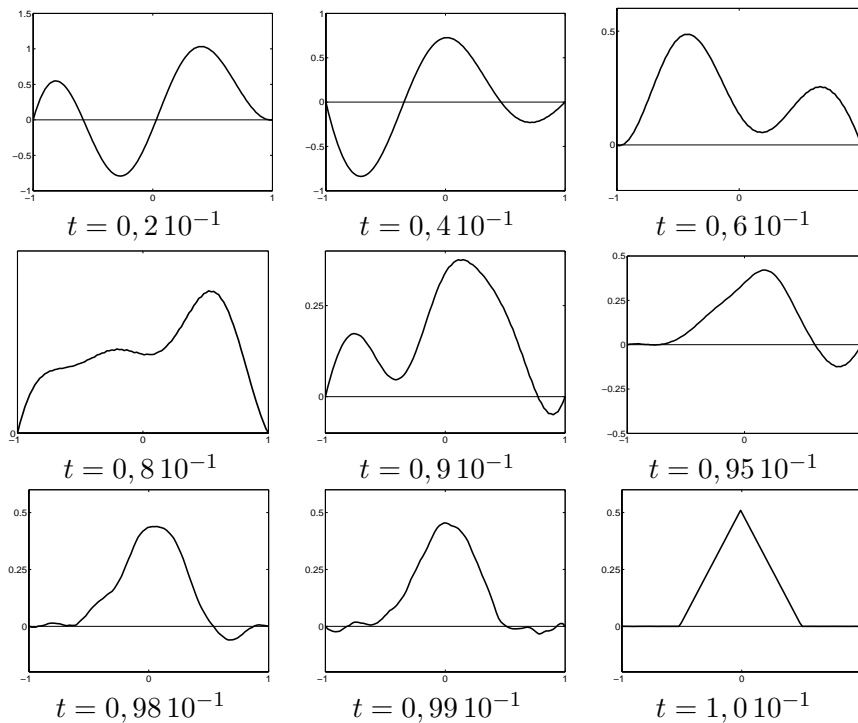
**Figura 2.**  $y(x, t)$  para la discretización  $M = 100$ ,  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$  y el estado prescrito  $y_T^1(x) = \exp(-10x^2) - \exp(-10)$



**Figura 3.**  $y(x, t)$  para la discretización  $M = 100$ ,  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$  y el estado prescrito  $y_T^2(x) = \sin(2\pi x)$



**Figura 4.**  $y(x, t)$  para la discretización  $M = 100$ ,  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$  y el estado prescrito  $y_T^3(x) = \sin(8\pi x)$



**Figura 5.**  $y(x, t)$  para la discretización  $M = 100$ ,  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$  y el estado prescrito  $y_T^4(x)$

El teorema que establece la controlabilidad exacta de la KdV lineal permite elegir como estado prescrito un elemento cualquiera de  $L^2(I)$ . Para ejemplificar este caso, en el cuarto ejemplo se impone un pulso triangular como estado prescrito

$$y_T^4(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2}, & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ -x + \frac{1}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

En la Figura 5 se muestra la animación correspondiente de la función  $y(x, t)$  para los mismos instantes que en los casos anteriores y la misma discretización. Nótese que a pesar de la no diferenciabilidad de esta función, el algoritmo propuesto genera resultados satisfactorios. Obsérvese que en todos los casos, como era de esperar, las ondas se generan en el lado derecho donde actúa la función de control y se absorben en el extremo izquierdo del dominio.

Para medir la exactitud con que se alcanza el estado prescrito, se ha utilizado el error relativo  $\varepsilon_X$ , entre el estado prescrito  $y_T(x)$  y la solución obtenida  $y(x, T)$ , es decir

$$\varepsilon_X = \frac{\|y_T - y(\cdot, T)\|_X}{\|y_T\|_X}$$

donde  $\|\cdot\|_X$  representa la norma del máximo,  $L^\infty(I)$ , o la norma  $L^2(I)$ . En la Tabla I se presentan los resultados obtenidos para los tres ejemplos y las dos discretizaciones utilizadas en cada uno de ellos.

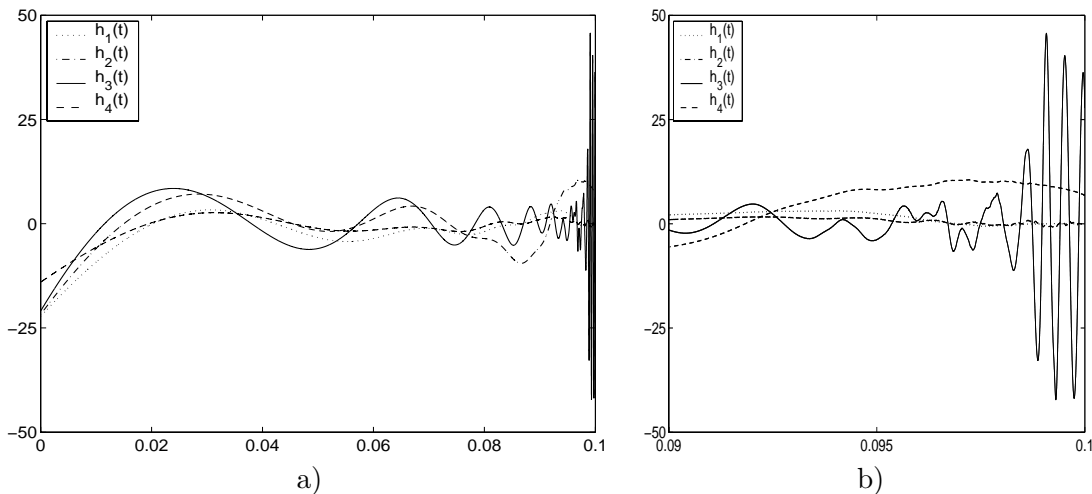
Estado prescrito	Norma			
	$\varepsilon_{L^2(I)}$		$\varepsilon_{L^\infty(I)}$	
	$M = 50$ $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}$	$M = 100$ $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$	$M = 50$ $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}$	$M = 100$ $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$
$y_T^1(x) = \exp(-10x^2) - \exp(-10)$	$4,4 \cdot 10^{-3}$	$7,58 \cdot 10^{-4}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$9,32 \cdot 10^{-4}$
$y_T^2(x) = \sin(2\pi x)$	$6,2 \cdot 10^{-4}$	$1,04 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$2,04 \cdot 10^{-4}$
$y_T^3(x) = \sin(8\pi x)$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$2,84 \cdot 10^{-6}$	$2,29 \cdot 10^{-4}$	$5,56 \cdot 10^{-6}$
$y_T^4(x)$	$2,75 \cdot 10^{-2}$	$5,31 \cdot 10^{-4}$	$3,08 \cdot 10^{-2}$	$6,06 \cdot 10^{-4}$

**Tabla I.** Error relativo  $\varepsilon_X$  para las normas  $L^\infty(I)$  y  $L^2(I)$

Como puede observarse en la Tabla I, el algoritmo numérico propuesto para el HUM obtiene aproximaciones al estado prescrito con un error relativo  $\varepsilon_X$  pequeño en todos los casos. Además, el error relativo decae con el refinamiento de la discretización. Nótese que, a diferencia de la referencia 5, los errores no aumentan cuando la función oscila con mayor frecuencia. Esta diferencia se debe a que el método propuesto en [5], tiene un carácter espectral y, por lo tanto, es muy sensible a un aumento en la frecuencia, en tanto que el método aquí propuesto es robusto bajo estos cambios, como se puede constatar en el ejemplo del pulso triangular.

La Figura 6a muestra las funciones de control para los casos estudiados. Obsérvese que para la primera mitad del intervalo temporal (i.e.  $t < 0,05$ ), las funciones de control son similares en forma y frecuencia de oscilación para todos los casos. En tanto que para la otra mitad del intervalo, estas funciones cambian y aumentan su frecuencia de oscilación. En la Figura 6b se presenta el detalle de la evolución de las funciones de control para  $t \in (0,9;0,1)$ . Este comportamiento es consistente con las gráficas presentadas en las

Figuras 2, 3, 4 y 5, donde puede observarse que durante los primeros instantes de tiempo (hasta  $t = 0,4 \cdot 10^{-1}$ ) la forma de la función  $y(x, t)$  es bastante similar en todos los casos. Es decir, durante los instantes iniciales de la evolución, la acción de la función de control  $h(t)$  consiste básicamente en poner en movimiento al sistema. En tanto que durante los instantes finales la función de control realiza las correcciones más finas que le permiten llegar al estado prescrito.



**Figura 6.** Funciones de control  $h(t)$  para  $y_T^1(x)$ ,  $y_T^2(x)$ ,  $y_T^3(x)$  y  $y_T^4(x)$ : a) evolución durante el intervalo  $(0; 0, 1)$ ; b) detalle en el intervalo  $(0, 09; 0, 1)$

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un modelo numérico basado en el método de diferencias finitas para el control exacto de la ecuación KdV lineal en dominios acotados, con controles actuando desde el contorno. Los experimentos numéricos realizados corroboran que tanto el esquema en diferencias finitas, como el algoritmo para la obtención de la matriz que representa al operador  $\Lambda$ , permiten obtener el estado prescrito con buena precisión. Concretamente, es importante señalar que se obtiene precisiones de  $10^{-6}$  para estados prescritos que oscilan con frecuencias elevadas. Asimismo, se debe resaltar que durante los instantes iniciales la acción de la función de control se concentra en poner en movimiento al sistema, mientras que en los instantes finales oscila con mayor frecuencia a fin de obtener el estado prescrito.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México (CONACyT) y parcialmente por los proyectos DPI2001-2204 y REN2001-0925-C03-01 del Ministerio de Ciencia y Tecnología de España.

## REFERENCIAS

- 1 N.J. Zabusky y M.D. Kruskal, "Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. **185**, pp. 240–243, (1965).
- 2 R.M. Miura, "The Korteweg–de Vries equation: a survey of results", *Siam Rev.*, Vol **18**, pp. 412–459, (1976).

- 3 J. Bona y R. Winther, “The Korteweg–de Vries equation, posed in a quarter-plane”, *Siam J. Math. Anal.*, Vol. **14**, pp. 1056–1106, (1983).
- 4 L. Rosier, “Exact boundary controllability for the Korteweg–de Vries equation on bounded domain”, *ESAIM, Control, Optimisation and Calculus of Variations*, Vol. **2**, pp. 33–55, (1997).
- 5 L. Rosier, “Exact boundary controllability for the linear Korteweg–de Vries equation: a numerical study”, *ESAIM, Proceedings*, Vol. **4**, pp. 255–267, (1998).
- 6 J.L. Lions, “Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed system”, *Siam Rev.*, Vol. **30**, pp. 1–68, (1988).
- 7 M. Pedersen, “*Functional analysis in applied mathematics and engineering*”, Chapman & Hall/CRC, (1999).