



SUPER AND SUPERB COLOURINGS OF TILINGS

Geoffrey C. Shephard
University of East Anglia
Norwich NR4 7TJ
England

1. INTRODUCTION

There exists an extensive literature concerning colour groups and the related colourings of the motifs of a plane pattern [2, Chapter 8], [6], [8]. It is strange that none of this work seems to refer directly to the problems of colouring tilings as such. To be more specific, though colour groups are often displayed as the colour symmetry groups of tilings, careful examination will show that it is only the patterns of the tiles in the tilings which are under consideration; other essential properties of a tiling such as its topological type, and the adjacencies of certain pairs of tiles, are ignored. If the latter are taken into account, several interesting (and difficult) problems emerge. It is the purpose of the present paper to consider some of these.

In particular, we shall be concerned with what are called *super* colourings of *isohedral tilings*. (These words and other essential terminology, will be explained shortly.) Besides being mathematically interesting, super colourings are very attractive from an aesthetic point of view, and have been used by artists such as M.C. Escher. In fact, in the published collections of Escher's

French translation:
Traduction française :
Jean-Luc Raymond



DES COLORIAGES DE PAVAGES SUPER ET SUPERBES

1. INTRODUCTION

Il existe une vaste littérature sur le sujet des groupes de couleurs et des coloriages des motifs dans le plan [2, chapitre 8], [6], [8]. Il est toutefois étrange qu'aucun de ces travaux ne semble porter directement sur les problèmes du coloriage des pavages comme tel. Plus particulièrement, bien que les groupes de couleurs soient souvent présentés comme des groupes de symétrie de couleurs des pavages, un examen approfondi révélera que ce ne sont que les motifs des pavés du pavage qui sont considérés; d'autres propriétés essentielles d'un pavage tel que son type topologique et l'adjacence de certaines paires de pavés sont ignorées. Si, par contre, on en tient compte, plusieurs problèmes intéressants (et complexes) se présentent. Le but de cet article est d'aborder quelques-uns de ces problèmes.

On s'intéressera plus particulièrement à ce qu'on appelle les *super* coloriages de *pavages isoédriques*. (On expliquera ci-dessous les termes essentiels.) Au-delà de l'intérêt mathématique, les super coloriages sont très attrayants d'un point de vue esthétique et, à ce titre, ils ont été utilisés par des artistes comme M.C. Escher. En fait,

works, *all* his colourings of isohedral tilings are super. (See, for example, [1, Plates E2-E23, E32-E31, E36-E51, E55, E62-E66, E70, E73-E79, E86, E88-E92, E94-E98, E102-E109, E116-E119, E124, E127, E128].) This fact motivated the present paper, which is a sequel to the talk given by the author at the *Escher Symposium* in Rome in March 1985, and reported in the Proceedings of that meeting [7]. However, for the convenience of the reader, essential terminology will be repeated here and the presentation will be self-contained. The author wishes to express his gratitude to Marjorie Senechal and Tom Wieting for supplying him with corrections to [6], and, more especially to Branko Grünbaum for helpful discussions and for his comments on preliminary versions of this paper which led to many improvements.

2. TERMINOLOGY AND DEFINITIONS

An **isohedral tiling** \mathfrak{S} is a tiling in which all the tiles belong to one transitivity class under the group of symmetries $S(\mathfrak{S})$ of \mathfrak{S} . It is known ([2], [3]) that such tilings can be classified in a natural way (by homeomerism) into 93 types. It is not necessary to give details of this classification here since it is fully described in [2, Chapter 6]; it suffices to say that it is “natural” in the sense that it fits our intuitive concept of when two isohedral tilings should be regarded as of the same type or not. Each of the 93 types can be displayed as one of the eleven Laves Tilings in which a “marking” or “motif” has been added to each tile ([3], [2, Chapter 6]); 81 types can also be displayed using unmarked tiles of suitable shapes. Examples of all types appear in **Figures 9 and 11**. It will be convenient to refer to the types by their list numbers IH1 to IH93 in the tables of [3, pp. 183–186] or [2, pp. 285–287].

In an isohedral tiling \mathfrak{S} , two tiles T_1, T_2 are said to be of the **same aspect** if there exists a translation $s \in S(\mathfrak{S})$ such that $sT_1 = T_2$. This is an equivalence relation on the set of all tiles in \mathfrak{S} , and for a given isohedral tiling \mathfrak{S} , there is clearly only a finite number of equivalence classes. This number will be denoted by $a(\mathfrak{S})$. In **Table 1** we list all 93 types of isohedral tilings and give additional information for each, such as its topological type in Column 2, its pattern type in Column 3, its symmetry group in Column 4, and the aspects of its tiles in Column 5. Later columns, which relate to possible

dans l'ensemble des collections publiées d'oeuvres d'Escher, *tous* les coloriages de pavages isoédriques sont super. (On peut consulter, par exemple, [1, Planches E2-E23, E32-E31, E36-E51, E55, E62-E66, E70, E73-E79, E86, E88-E92, E94-E98, E102-E109, E116-E119, E124, E127, E128].) Ce fait fut à l'origine du présent article, il est la suite d'une présentation de l'auteur au *Escher Symposium* de Rome en mars 1985 (un rapport en a été donné dans les Comptes-rendus de cette rencontre [7]). Toutefois, dans l'intérêt du lecteur, on répétera ici la terminologie jugée essentielle et cette présentation sera auto-suffisante. L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance à Marjorie Senechal et à Tom Wieting pour lui avoir suggéré les corrections à [6], et, plus particulièrement à Branko Grünbaum pour nos discussions utiles et les commentaires qu'il porta sur les versions préliminaires de cet article, commentaires qui menèrent à plusieurs améliorations.

2. TERMINOLOGIE ET DÉFINITIONS

Un **pavage isoédrique** \mathfrak{S} est un pavage dans lequel chaque pavé appartient à une classe de transitivité sous le groupe des symétries $S(\mathfrak{S})$ de \mathfrak{S} . On sait ([2], [3]) que de tels pavages peuvent être classifiés de façon naturelle (par homéomérisme) en 93 types. Il n'est pas nécessaire de donner ici les détails de cette classification car elle est décrite de façon exhaustive dans [2, chapitre 6]; il suffira de dire qu'elle est « naturelle » en ce sens qu'elle est compatible avec notre conceptualisation intuitive de l'équivalence en type de deux pavages isoédriques. Chacun des 93 types peut être représenté comme l'un des onze pavages de Laves dans lequel un « marquage » ou un « motif » a été ajouté à chaque pavé (voir [3], [2, chapitre 6]); 81 types peuvent aussi être représentés en utilisant des pavés non marqués de formes adéquates. Aux **figures 9 et 11**, on trouvera des exemples de tous les types. Pour des questions pratiques, on conviendra d'utiliser les numéros de liste IH1 à IH93 des tableaux de [3, p. 183–186] ou [2, p. 285–287] pour nommer les types.

Dans un pavage isoédrique \mathfrak{S} , deux pavés T_1 et T_2 sont dits de **même aspect** s'il existe une translation $s \in S(\mathfrak{S})$ telle que $sT_1 = T_2$. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble de tous les pavés de \mathfrak{S} , et pour un pavage isoédrique donné \mathfrak{S} , il n'existe qu'un

TABLE 1

The first column gives the isohedral type IH1 – IH93 in the notation of [3, Table I] or [2, Table 6.2.1]. Columns (2), (3), (4) give the corresponding topological type, pattern type and symmetry group. If the pattern type is in parentheses, then the isohedral type can only be realised using marked tiles. Column (5) lists the aspects of the tiles; an entry such as nD , mR means that there are n direct aspects and m reflected aspects in the tiling. An integer without D or R is used if the tile has reflective symmetry, so direct and reflected aspects coincide. In Column (6) we give the numbers of colours that can occur in a perfect colouring of an isohedral tiling of the given type: Here p , q represent any positive integers. This information is adapted from Senechal's paper [6, Table 4]. The final column lists the numbers of colours that can actually occur in a super colouring. A number in heavy type means that it is equal to either the upper bound or the lower bound given in the main theorem. An asterisk (*) against any entry implies that there is a discrepancy between the information recorded here and that tabulated in [6, Table 4]. See also the footnote to the table, page 47.

TABLEAU 1

La première colonne donne les types isoédriques IH1 – IH93 en employant la notation de [3, tableau I] ou [2, tableau 6.2.1]. Les colonnes (2), (3) et (4) donnent les types topologiques, les types de motifs et les groupes de symétries correspondants. Si le type de motif est entre parenthèses, le type isoédrique ne peut être réalisé qu'en employant des pavés marqués. On trouve à la colonne (5) la liste des aspects des pavés; une donnée comme nD , mR signifie qu'il existe n aspects directs et m aspects réfléchis dans le pavage. Un entier sans D ou R est utilisé lorsque le pavé possède une symétrie de réflexion, dans ce cas, les aspects directs et réfléchis coïncident. Dans la colonne (6), on trouve les nombres de couleurs que peut comporter un coloriage parfait d'un pavage isoédrique du type donné. Ici, p , q représentent n'importe quel entier positif. Cette information est adaptée de l'article de Senechal [6, tableau 4]. La dernière colonne donne la liste des nombres de couleurs que peut comporter un super coloriage. Un nombre est en caractère gras lorsqu'il est égal à la borne supérieure ou à la borne inférieure du théorème principal. Un astérisque (*) accompagne une donnée lorsqu'il y a contradiction entre l'information donnée ici et celle provenant de [6, tableau 4]. Voir aussi la note à la fin du tableau, page 47.

Isohedral Type (1) Type isoédrique	Topological Type (2) Type topologique	Pattern Type (3) Type de motif	Symmetry Group (4) Groupe de symétrie	Aspects of tiles (5) Aspects des pavés	Numbers of colours in a perfect colouring (6) Nombres de couleurs dans un coloriage parfait	Numbers of colours in a super colouring (7) Nombres de couleurs dans un super coloriage
IH1	[3 ⁶]	PP1	$p1$	$1D$	p	3, 4, 5, 6, 7
IH2		PP2	pg	$1D, 1R$	p	3, 4, 5
IH3		PP2	pg	$1D, 1R$	p	3, 4, 5, 6, 7
IH4		PP7	$p2$	$2D$	p	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
IH5		PP9	pgg	$2D, 2R$	p	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
IH6		PP9	pgg	$2D, 2R$	p	3, 4, 5, 6, 7
IH7		PP21	$p3$	$3D$	$3p$ or $p^2 - pq + q^2$	3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19
IH8		PP8	$p2$	$1D$	p	3, 4, 5, 6, 7
IH9		PP10	pgg	$1D, 1R$	p	3, 4, 5
IH10		PP22	$p3$	$1D$	$p^2 - pq + q^2$	3, 4, 7
IH11		PP45	$p6$	$1D$	$p^2 - pq + q^2$	3, 4, 7
IH12		PP6	cm	1	p	3, 4, 5
IH13		PP13	pmg	2	p	3, 4, 5, 6, 7
IH14		PP6	cm	1	p	3, 4, 5
IH15		PP13	pmg	2	p	3, 4, 5
IH16		PP25	$p31m$	3	$3p$ or p^2	3, 4, 9
IH17		PP20	$p6m$	1	p	3, 4, 5
IH18		PP26	$p31m$	1	p^2 or $3p^2$	3, 4
IH19		(PP29)	$p3m1$	1	p^2 or $3p^2$	3, 4
IH20		PP51 *	$p6m$	1	p^2 or $3p^2$	3, 4
IH21	[3 ⁴ .6]	PP42	$p6$	$6D$	$3p$ or $p^2 - pq + q^2$ or $2(p^2 - pq + q^2)$	3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 19
IH22	[3 ³ .4 ²]	PP5	cm	$1D, 1R$	p	4, 6
IH23		PP7	$p2$	$2D$	p	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
IH24		PP11	pmg	$2D, 2R$	p	4, 6
IH25		PP9	pgg	$2D, 2R$	p	4, 6
IH26		PP19	$cm m$	2	p	4, 6
IH27	[3 ² .4.3.4]	PP9	$c1$	$2D, 2R$	p	4, 5, 6, 7, 9
IH28		PP30	$c1$	$4D$	$2p$ or $p^2 + q^2$	4, 5, 6, 9, 10, 13
IH29		PP35	$p4g$	4	$2p$ or $(2p+1)^2$	4, 6, 9
IH30	[3.4.6.4]	PP23	$p31m$	$3D, 3R$	$3p$ or p^2 *	3, 9

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
IH31	[3.4.6.4]	PP 42	$p6$	$6D$	$3p$ or p^2-pq+q^2 or $2(p^2-pq+q^2)$	3, 4, 7, 9, 13
IH32		PP 48	$p6m$	6	$3p$ or p^2 or $2p^2$	3, 9
IH33	[3.6.3.6]	PP 21	$p3$	$3D$	$3p$ or p^2-pq+q^2	3, 4, 7, 13
IH34		PP 43	$p6$	$3D$	$3p$ or p^2-pq+q^2 if $\neq 0 \pmod{2}$	3, 7
IH35		(PP 28)	$p3m1$	3	$3p$ or p^2	3 (superb)
IH36		PP 25	$p31m$	3	$3p$ or p^2	3, 4
IH37		PP 49 *	$p6m$	3	$3p$ or $(2p+1)^2$	3 (superb)
IH38	[3.12 ²]	PP 23	$p31m$	$3D, 3R$	$3p$ or p^2 *	4, 6, 9
IH39		PP 42	$p6$	$6D$	$3p$ or p^2-pq+q^2 or $2(p^2-pq+q^2)$	3, 4, 6, 7, 9, 13
IH40		PP 48 *	$p6m$	6	$3p$ or p^2 or $2p^2$	4, 6, 9
IH41	[4 ¹]	PP 1	$p1$	$1D$	p	2, 3, 4, 5
IH42		PP 3	pm	$1D, 1R$	p	2, 4, 6
IH43		PP 2	pg	$1D, 1R$	p	2, 3, 4, 5
IH44		PP 2	pg	$1D, 1R$	p	2, 3
IH45		PP 5	cm	$1D, 1R$	p	2, 4, 5
IH46		PP 7	$p2$	$2D$	p	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
IH47		PP 7	$p2$	$2D$	p	2, 3, 4, 5, 6, 7
IH48		(PP 14)	pm	$2D, 2R$	p	2, 4, 6
IH49		PP 11	pmg	$2D, 2R$	p	2, 4, 6
IH50		PP 11	pmg	$2D, 2R$	p	2, 4, 6
IH51		PP 9	pgg	$2D, 2R$	p	2, 4
IH52		PP 9	pgg	$2D, 2R$	p	2, 3, 4, 5
IH53		PP 9	pgg	$2D, 2R$	p	2, 3, 4, 5
IH54		PP 17	cm	$2D, 2R$	p	2, 4, 6
IH55		PP 30	$p4$	$4D$	$2p$ or p^2+q^2	2, 4, 5, 9
IH56		PP 33 *	$p4g$	$4D, 4R$	$2p$ or $(2p+1)^2$	2, 4, 9
IH57		PP 8	$p2$	$1D$	p	2, 3, 4, 5
IH58		PP 12	pmg	$1D, 1R$	p	2, 4
IH59		PP 10	pgg	$1D, 1R$	p	2, 3
IH60		(PP 18)	cm	$1D, 1R$	p	2, 4
IH61		PP 31	$p4$	$2D$	$2p$ or $(2p)^2+(2q+1)^2$	2, 5
IH62		PP 32	$p4$	$1D$	p^2+q^2	2, 5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
IH63	[4 ¹]	(P P 34)	$p\ 4\ g$	1D, 1R	$2(p^2+q^2)$ or $(2p+1)^2$	2 (superb)
IH64		P P 4	$p\ m$	1	p	2, 4
IH65		(P P 15)	$p\ m\ m$	2	p	2, 4
IH66		P P 13	$p\ m\ g$	2	p	2, 3, 4, 5
IH67		P P 19 *	$c\ m\ m$	2	p	2, 4
IH68		P P 6	$c\ m$	1	p	2, 3
IH69		P P 13	$p\ m\ g$	2	p	2, 3, 4, 5
IH70		(P P 39)	$p\ 4\ m$	4	$2p$ or p^2	2, 4
IH71		P P 35	$p\ 4\ g$	4	$2p$ or $(2p+1)^2$	2 (superb)
IH72		P P 16	$p\ m\ m$	1	p	2, 4
IH73		P P 36	$p\ 4\ g$	2	$2p$ or $(2p+1)^2$	2 (superb)
IH74		P P 20	$c\ m\ m$	1	p	2, 3
IH75		(P P 40)	$p\ 4\ m$	2	$2p$ or $(2p+1)^2$	2 (superb)
IH76		P P 41	$p\ 4\ m$	1	p^2 or $2p^2$	2 (superb)
IH77	[4.6.12]	P P 46	$p\ 6\ m$	6D, 6R	$3p$ or p^2 or $2p^2$ or $6p^2$ or $2(p^2-pq+q^2)$ or $4(p^2-pq+q^2)$	2, 3
IH78	[4.8 ²]	P P 17	$c\ m\ m$	2D, 2R	p	2, 4, 9
IH79		P P 30	$p\ 4$	4D	$2p$ or p^2+q^2	2, 4, 5, 9
IH80		(P P 37)	$p\ 4\ m$	4D, 4R	$2p$ or p^2	2, 4, 9
IH81		P P 33	$p\ 4\ g$	4D, 4R	$2p$ or p^2	2, 4, 9
IH82		P P 38	$p\ 4\ m$	4	$2p$ or p^2	2, 4, 9
IH83	[6 ³]	P P 5	$c\ m$	1D, 1R	p	2, 4
IH84		P P 7	$p\ 2$	2D	p	2, 3, 4, 5, 6, 7
IH85		P P 11	$p\ m\ g$	2D, 2R	p	2, 4
IH86		P P 9 *	$p\ g\ g$	2D, 2R	p	2, 3, 4
IH87		(P P 27)	$p\ 3\ m\ 1$	3D, 3R	$3p$ or p^2 *	2, 3, 4
IH88		P P 42	$p\ 6$	6D	$3p$ or p^2-pq+q^2 or $2(p^2-pq+q^2)$	2, 3, 4, 7, 9, 13
IH89		(P P 24)	$p\ 31\ m$	1D, 1R	m^2 if $m \not\equiv 0 \pmod{3}$ *	2, 4
IH90		P P 44	$p\ 6$	2D	$2(p^2-pq+q^2)$ or p^2-pq+q^2 if $\not\equiv 0 \pmod{3}$	2, 4, 7
IH91		P P 19	$c\ m\ m$	2	p	2, 3, 4, 5
IH92		(P P 47)	$p\ 6\ m$	6	$3p$ or p^2 or $2p^2$	2, 3, 4
IH93		P P 50 *	$p\ 6\ m$	2	$2p^2$ or $6p^2$ or p^2 if $p \not\equiv 0 \pmod{3}$	2, 4

* For the convenience of workers in this field, the following corrections to [6, Table 5] should also be noted. (The author wishes to express his indebtedness to Tom Wieting of Reed College, Portland, Oregon, for supplying this list of corrections.)

In the column headed 6, row pmm , the entry 10 should be 9 giving a total of 90 (instead of 91) at the bottom of the column. Column headed $2p$: row pmm should read $1/4(p+35)$ if $p=4n+1$ and $1/4(p+33)$ if $p=4n+3$; row pmg should read $1/4(p+1)+9$; row cmm should read $1/4(p+31)$ if $p=4n+1$ and $1/4(p+29)$ if $p=4n+3$. The total at the bottom of the column should be adjusted accordingly.

* Dans l'intérêt des chercheurs de ce domaine, on doit aussi noter les corrections suivantes à [6, tableau 5]. (L'auteur tient à exprimer sa dette envers Tom Wieting de Reed College, Portland, Oregon, qui lui a fourni la liste des corrections.)

Dans la colonne 6, ligne pmm , la donnée 10 devrait se lire 9 donnant un total de 90 (au lieu de 91) au bas de la colonne. La colonne $2p$, ligne pmm devrait se lire $1/4(p+35)$ si $p=4n+1$ et $1/4(p+33)$ si $p=4n+3$; la ligne pmg devrait se lire $1/4(p+1)+9$; la ligne cmm devrait se lire $1/4(p+31)$ si $p=4n+1$ et $1/4(p+29)$ si $p=4n+3$. Le total au bas de la colonne devrait être ajusté en conséquence.

colourings, are explained in the caption to the table.

Let \mathfrak{S} be an isohedral tiling. By a **k -colouring** of \mathfrak{S} , or a **colouring of \mathfrak{S} using k colours**, we mean a surjection which maps the set of all tiles of \mathfrak{S} onto the set $\{1, 2, \dots, k\}$. The integers $1, 2, \dots, k$ are called the **colours**. We shall be interested in colourings which are proper, neighbourly, and perfect. These terms will now be explained. They are illustrated by the coloured tilings shown in **Figure 1**, which have all three properties, as well as by all the coloured tilings in **Figures 9, 10 and 11**. (The well-known 4-colouring of the tiling by fishes in **Figure 1a** is due to Escher. As pointed out in [4] and [7], it seems that he was not aware of the equally satisfactory 5-colouring of this tiling shown in **Figure 1b**. In fact, examination of the published collections of Escher's works seems to show that he *never* used more than 4 colours when colouring isohedral tilings.)

Two colourings of a given isohedral tiling \mathfrak{S} are said to be **equal**, or **the same**, if one can be made to coincide with the other by first applying to \mathfrak{S} a symmetry of \mathfrak{S} , and then permuting the colours in some way.

A colouring of a tiling \mathfrak{S} is said to be **proper** if no two adjacent tiles (tiles which have an edge in common) are of the same colour. A k -colouring of \mathfrak{S} is called **neighbourly** if, for every $x, y \in \{1, 2, \dots, k\}$ with $x \neq y$, it is possible to find two adjacent tiles in \mathfrak{S} , one of colour x and the other of colour y .

To define a perfect colouring we need the concept of a colour symmetry. In **Figure 2** we show a proper neighbourly 3-colouring of the regular tiling by squares (isohedral type IH76). Two lines λ_1, λ_2 are indicated and it will be observed that reflection r_1 in the line λ_1 not only maps the (uncoloured) tiling onto itself (that is, it is a symmetry of the tiling) but also induces a permutation $\pi = (1)(23)$ of the colours. On the other hand, reflection r_2 in the line λ_2 , though a symmetry of the uncoloured tiling, does not induce a permutation of the colours; for example it maps some tiles of colour 1 onto tiles of colour 2, and other tiles of colour 1 onto tiles of colour 3. In the former case we shall say that r_1 , together with the permutation π , forms a colour symmetry of the coloured isohedral tiling.

nombre fini de classes d'équivalence. On notera ce nombre $a(\mathfrak{S})$. Dans le **tableau 1**, on dresse la liste des 93 types de pavages isoédriques et on fournit des informations additionnelles pour chacun d'eux : le type topologique en colonne 2, le type de motif en colonne 3, le groupe de symétrie en colonne 4, et l'aspect des pavés en colonne 5. Le contenu des autres colonnes est lié aux possibles coloriations, il est expliqué dans la légende du tableau.

Soit \mathfrak{S} un pavage isoédrique. Par un **k -coloriage** de \mathfrak{S} , ou un **coloriage de \mathfrak{S} utilisant k couleurs**, on entendra une surjection qui envoie l'ensemble des pavés de \mathfrak{S} sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$. Les entiers $1, 2, \dots, k$ sont appelés les **couleurs**. On s'intéressera aux coloriations qui sont propres, conciliants et parfait. Expliquons maintenant ces termes. Ils sont illustrés par les pavages coloriés de la **figure 1**, qui possèdent les trois propriétés, comme par les pavages coloriés des **figures 9, 10 et 11**. (Le célèbre 4-coloriage du pavage en poissons dans la **figure 1a** est d'Escher. Comme c'est mentionné dans [4] et dans [7], il semble qu'il n'ait pas été conscient que ce pavage satisfaisait également un 5-coloriage montré à la **figure 1b**. En fait, un examen des oeuvres publiées d'Escher semble démontrer que *jamais* il n'utilisa plus de 4 couleurs dans un coloriage de pavage isoédrique.)

Deux coloriations d'un pavage isoédrique donné \mathfrak{S} sont dits **égaux**, ou on parle du **même** coloriage, si on peut les faire coïncider en appliquant d'abord à \mathfrak{S} une symétrie de \mathfrak{S} et en effectuant ensuite une certaine permutation des couleurs.

On dira qu'un coloriage d'un pavage \mathfrak{S} est **propre** si aucune paire de pavés adjacents (pavés possédant une arête en commun) ne sont de la même couleur. Un k -coloriage de \mathfrak{S} est dit **conciliant** si, pour tout $x, y \in \{1, 2, \dots, k\}$ où $x \neq y$, il est possible de trouver dans \mathfrak{S} deux pavés adjacents, l'un de couleur x et l'autre de couleur y .

Pour définir un coloriage parfait, on a besoin du concept de symétrie de couleur. Dans la **figure 2**, on montre un 3-coloriage propre et conciliant du pavage régulier de carrés (type isoédrique IH76). Deux droites λ_1 et λ_2 sont indiquées et on peut noter que la réflexion r_1 par rapport à la droite λ_1 , non seulement envoie le pavage (non colorié) sur lui-même (c'est en fait une symétrie du

FIGURE 1 ≡

A tiling by M.C. Escher of isohedral type IH28. Escher's original colouring is shown in **a**; a super 5-colouring appears in **b**. This tiling can be super coloured with 4, 5, 9, 10 or 13 colours: see **Table 1** and **Figure 7**.

Un pavage de M.C. Escher de type isoédrique IH28. Le coloriage original d'Escher est en **a**; un super 5-coloriage apparaît en **b**. Ce pavage peut être super colorié avec 4, 5, 9, 10 ou 13 couleurs: voir le **tableau 1** et la **figure 7**.

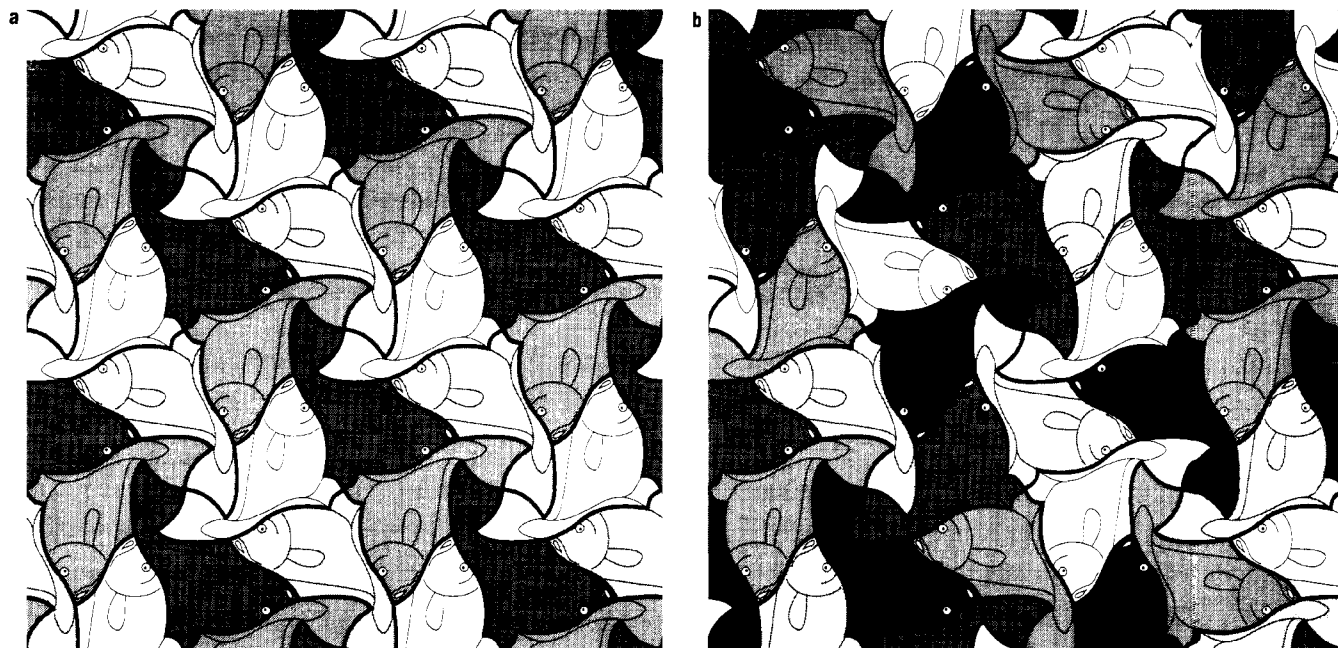


FIGURE 2 ≡

A 3 colouring of the regular tiling by squares (isohedral type IH76) which is not perfect. The only super colouring of this tiling is the familiar checker-board colouring, see **Figure 4**.

Un 3-coloriage du pavage régulier en carrés (type isoédrique IH76) qui n'est pas parfait. Le seul super coloriage de ce pavage est le célèbre coloriage de l'échiquier, voir **figure 4**.

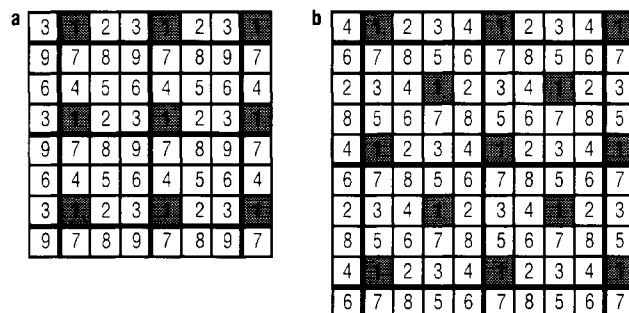
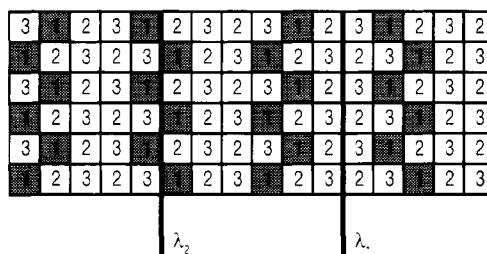


FIGURE 3 ≡

The construction of all perfect colourings of the regular tiling by squares (isohedral type IH76). Each perfect colouring has a repeating $n \times n$ block of tiles and each such block contains either one tile of each color (as in **a** with $n = 3$, so 9 colours are used), or two tiles of each colour (as in **b** with $n = 4$, so 8 colours are used). For details, see [4].

La construction de tous les coloriage parfaits du coloriage régulier en carrés (type isoédrique IH76). Chaque coloriage parfait comporte une répétition d'un bloc $n \times n$ de pavés et chacun de ces blocs contient soit un pavé de chaque couleur (comme en **a** avec $n = 3$, ainsi on utilise 9 couleurs), ou deux pavés de chaque couleur (comme en **b** avec $n = 4$, ainsi on utilise 8 couleurs). Pour plus de détails, voir [4].

More generally, let an isohedral tiling \mathfrak{S} be k -coloured in some manner. Then if a symmetry $s \in S(\mathfrak{S})$ corresponds to a permutation π of the colours in the sense that, for all $x \in \{1, 2, \dots, k\}$, s maps every tile of colour x onto a tile of colour $\pi(x)$, then the pair (s, π) is called a **colour symmetry** of the tiling. The set of all colour symmetries of a k -coloured tiling forms, with the usual composition,

$$(s_1, \pi_1) (s_2, \pi_2) = (s_1 s_2, \pi_1 \pi_2)$$

a group called **the colour symmetry group** of the coloured tiling.

A colouring of an isohedral tiling \mathfrak{S} is called **perfect** if, to every symmetry $s \in S(\mathfrak{S})$ there exists a permutation π such that the pair (s, π) is a colour symmetry.

It is well-known that many types of isohedral tilings can be perfectly coloured with k colours for only certain values (*and not all values*) of k . For example, the regular tiling by squares (type IH76) can be perfectly k -coloured only if k is an integer of the form p^2 or $2p^2$; thus, in particular, no perfect 3-colouring is possible [4]. In **Figure 3** we indicate how *all* perfect colourings of this type of isohedral tiling can be constructed. In Senechal's paper [6], she lists the possible numbers of colours in perfect colourings of all 93 types of isohedral tilings in her Table 4 (pp. 66–67).

A colouring of an isohedral tiling, which has the three properties of being proper, neighbourly and perfect, is called a **super colouring**. The colourings shown in **Figures 1, 9, 10 and 11** are all super. Clearly the possible numbers of colours in super colourings of isohedral tilings are even more restricted than those in perfect colourings. In fact, for every type of isohedral tiling, this number is finite. This is an immediate consequence of our main theorem, to be stated in the next section.

pavage) mais induit aussi une permutation $\pi = (1)(23)$ des couleurs. D'autre part, la réflexion r_2 par rapport à la droite λ_2 , quoique ce soit une symétrie du pavage non colorié, n'induit pas une permutation des couleurs; elle envoie par exemple certains pavés de couleur 1 sur des pavés de couleur 2, et d'autres pavés de couleur 1 sur des pavés de couleur 3. Dans le cas précédent, on dira que r_1 , accompagné de la permutation π , constitue une symétrie de couleur du pavage isoédrique colorié.

De façon plus générale, considérons un pavage isoédrique \mathfrak{S} k -colorié de manière arbitraire. Si une symétrie $s \in S(\mathfrak{S})$ correspond alors à une permutation π des couleurs en ce sens que, pour tout $x \in \{1, 2, \dots, k\}$, s envoie tout pavé de couleur x sur un pavé de couleur $\pi(x)$, le couple (s, π) est alors appelée une **symétrie de couleurs** du pavage. L'ensemble de toutes les symétries de couleurs d'un pavage k -colorié forme, avec la composition habituelle,

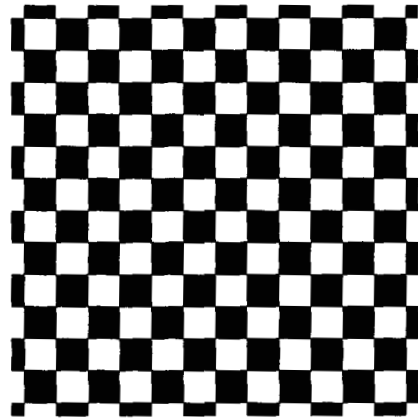
$$(s_1, \pi_1) (s_2, \pi_2) = (s_1 s_2, \pi_1 \pi_2)$$

un groupe appelé **le groupe de symétrie de couleurs** du pavage colorié.

Un coloriage d'un pavage isoédrique \mathfrak{S} est dit **parfait** si, à chaque symétrie $s \in S(\mathfrak{S})$ correspond une permutation π telle que le couple (s, π) soit une symétrie de couleurs.

Il est bien connu que plusieurs types de pavages isoédriques ne peuvent être parfaitement coloriés avec k couleurs que pour certaines valeurs (*et non toutes les valeurs*) de k . Par exemple, le pavage régulier par des carrés (type IH76) ne peut être parfaitement k -colorié que si k est un entier de la forme p^2 ou $2p^2$; ainsi, par exemple, aucun 3-coloriage parfait n'est possible [4]. À la **figure 3**, on indique comment *tous* les coloriages parfaits de ce type de pavage isoédrique peuvent être construits. Dans l'article de Senechal [6], on trouve dans le tableau 4 (p. 66-67) la liste des nombres possibles de couleurs dans les coloriages parfaits de chacun des 93 types de pavages isoédriques.

Un coloriage d'un pavage isoédrique possédant les trois propriétés d'être propre, conciliant et parfait, est appelé un **super coloriage**. Les coloriages des **figures 1, 9, 10 et 11** sont tous super.



4a



4b

FIGURE 4

Examples of checkerboard colourings. Those are possible only if every vertex has even valence.

Exemples de coloriations en échiquier. Ils ne sont possibles que si tout sommet est de degré pair.



4c



4d

Évidemment les nombres possibles de couleurs dans les super coloriations de pavages isoédriques sont encore plus limités que pour les coloriations parfaits. En fait, pour chaque pavé d'un pavage isoédrique, ce nombre est fini. Ceci est une conséquence immédiate de notre théorème principal qui sera énoncé à la section suivante.

3. SUPER COLORIAGES

Théorème: Soit m et M , respectivement le minimum et le maximum du nombre de couleurs qu'on peut utiliser dans un super coloriage d'un pavage isoédrique donné \mathfrak{S} . Alors

$$d \leq m \leq M \leq a(\mathfrak{S})n(\mathfrak{S}) + 1$$

où $m = d = 2$ si tous les sommets de \mathfrak{S} sont de degré pair et $d = 3$ autrement, $a(\mathfrak{S})$ est le nombre d'aspects des pavés dans \mathfrak{S} et $n(\mathfrak{S})$ est le nombre de pavés adjacents à chaque pavé dans \mathfrak{S} .

Le théorème est faible en ce sens que les bornes (en particulier la borne supérieure) ne sont atteintes que pour peu de types de pavages. Par exemple, pour le pavage régulier en carrés, $a(\mathfrak{S}) = 1$, $n(\mathfrak{S}) = 4$ et puisque tous les sommets sont de degré 4, $d = 2$. Le théorème affirme donc que

$$2 = m \leq M \leq 5.$$

3. SUPER COLOURINGS

Theorem: Let m and M be, respectively, the minimum and maximum numbers of colours that can occur in a super colouring of a given isohedral tiling \mathcal{S} . Then

$$d \leq m \leq M \leq a(\mathcal{S})n(\mathcal{S}) + 1$$

where $m = d = 2$ if all the vertices of \mathcal{S} are of even valence and $d = 3$ otherwise, $a(\mathcal{S})$ is the number of aspects of the tiles in \mathcal{S} and $n(\mathcal{S})$ is the number of adjacents of each tile in \mathcal{S} .

The theorem is weak in the sense that the bounds (especially the upper bound) are attained for few types of tilings. For example, in the regular tiling by squares, $a(\mathcal{S}) = 1$, $n(\mathcal{S}) = 4$ and since all the vertices are of valence 4, $d = 2$. Hence the theorem asserts that

$$2 = m \leq M \leq 5.$$

In this case, since it is possible to describe *all* perfect colourings, and therefore all super colourings, in a simple manner (**Figure 3**), it is easy to see that $m = M = 2$.

A tiling for which $m = M$ (as in the example just described) is said to possess a **superb** colouring. This means that there is a *unique* integer k for which a super k -colouring is possible. Superb colourings exist for only seven types of isohedral tilings, namely IH35, IH37, IH63, IH71, IH73, IH75 and IH76. These are shown in **Figure 9**. The existence of a superb colouring does not imply that the super colouring is unique; two superb colourings of tilings of types IH35 and IH37 are shown in **Figure 9**. On the other hand, the other five tilings of **Figure 9** admit a unique superb colouring; it is familiar checkerboard colouring.

We shall now prove the theorem. The left inequality is almost immediate. If a tiling \mathcal{S} possesses a proper 2-colouring then not only must a tile of one colour be completely surrounded by tiles of the other colour, but the two colours must alternate as we go round any vertex. This is possible if and only if every vertex has even valence. Conversely, if every vertex has even valence, then the assignment of two colours to the tiles in the manner just described, will necessarily be both proper and neighbourly. It will also be

Dans ce cas, puisqu'il est possible de décrire de manière simple tous les coloriages parfaits, et donc tous les super coloriages (**figure 3**), on peut voir facilement que $m = M = 2$.

Lorsqu'un pavage est tel que $m = M$ (comme dans l'exemple précédent), on dira qu'il possède un **superbe** coloriage. Ceci signifie qu'il existe un *unique* entier k pour lequel on peut construire un super k -coloriage. Des superbes coloriages n'existent que pour sept types de pavages isoédriques, ce sont IH35, IH37, IH63, IH71, IH73, IH75 et IH76. Ils sont illustrés à la **figure 9**. L'existence d'un superbe coloriage n'implique pas l'unicité du super coloriage; on trouve à la **figure 9** deux superbes coloriages de pavages de types IH35 et IH37. D'autre part, les cinq autres pavages de la **figure 9** n'admettent qu'un seul superbe coloriage; c'est le classique coloriage de l'échiquier.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. L'inégalité de gauche est presque immédiate. Si un pavage \mathcal{S} possède un 2-coloriage propre alors non seulement un pavé d'une couleur donnée doit être complètement entouré de pavés de l'autre couleur, mais aussi les deux couleurs doivent apparaître en alternance lorsqu'on tourne autour d'un sommet. Ce sera possible si et seulement si tous les sommets sont de degré pair. Réciproquement, si tout sommet est de degré pair, l'assignation aux pavés des deux couleurs de la façon décrite précédemment mènera nécessairement à un pavage à la fois propre et conciliant. Il sera également parfait puisque toute symétrie du pavage laissera chaque couleur invariante ou les interchangera.

Pour ce qui est de l'inégalité de droite du théorème, on devra approfondir les propriétés des super coloriages. On aura besoin de ces propriétés lorsqu'on abordera dans la section suivante un certain nombre d'exemples particuliers.

Propriété 1

Soit T un pavé quelconque dans un pavage isoédrique \mathcal{S} super colorié et soit $s \in \mathcal{S}(\mathcal{S})$ tel que T et sT soient de la même couleur. Alors tous les pavés $s^n T$ (où n est un entier quelconque) sont de la même couleur.

perfect since every symmetry of the tiling either leaves each colour invariant, or else interchanges them.

For the right inequality of the theorem we need to investigate the properties of super colourings in some detail. These properties will be needed in the next section when we discuss a number of particular examples.

Property 1

Let T be any tile in a super-coloured isohedral tiling \mathfrak{S} and let $s \in \mathcal{S}(\mathfrak{S})$ be such that T and sT are the same colour. Then all the tiles $s^n T$ (where n is any integer) are the same colour.

If T is of colour x , then the permutation π of colours in the colour symmetry (s, π) must leave colour x invariant. Since the colour symmetries form a group, for each integer n , (s^n, π^n) will be a colour symmetry, and π^n will also leave colour x invariant. It follows that all tiles $s^n T$ are of colour x .

If s is a reflection or a rotation, as n runs through the integers, the set of tiles $\{s^n T\}$ of colour x will be finite. If s is a translation or a glide, this set will be infinite.

Property 2

Let $x, y \in \{1, 2, \dots, k\}$. Then in any super k -colouring of an isohedral tiling \mathfrak{S} , the set of tiles of colour x is congruent to the set of tiles of colour y .

Let us denote the set of all tiles in \mathfrak{S} of colour x by $\mathfrak{S}(x)$, and those of colour y by $\mathfrak{S}(y)$. Because the k -colouring is perfect, given $T_1 \in \mathfrak{S}(x)$ and $T_2 \in \mathfrak{S}(y)$, there will exist a symmetry $s \in \mathcal{S}(\mathfrak{S})$ with $sT_1 = T_2$. But if π is the permutation of colours such that (s, π) is a colour symmetry, then π will map x to y and so s will map $\mathfrak{S}(x)$ into $\mathfrak{S}(y)$. Likewise s^{-1} will map $\mathfrak{S}(y)$ into $\mathfrak{S}(x)$ from which we deduce $\mathfrak{S}(x)$ and $\mathfrak{S}(y)$ are congruent.

Clearly the set of symmetries $s \in \mathcal{S}(\mathfrak{S})$ which leave $\mathfrak{S}(x)$ invariant forms a subgroup $\mathcal{S}_x(\mathfrak{S})$ of $\mathcal{S}(\mathfrak{S})$. Further, for all $n \in \{1, 2, \dots, k\}$, the subgroups $\mathcal{S}_x(\mathfrak{S})$ are isomorphic.

Si T est de la couleur x , alors la permutation π de couleurs dans la symétrie de couleurs (s, π) doit laisser invariante la couleur x . Puisque les symétries de couleurs forment un groupe, pour chaque entier n , (s^n, π^n) sera une symétrie de couleurs et π^n laissera également invariante la couleur x . Il s'ensuit que tous les pavés $s^n T$ sont de la couleur x .

Si s est une réflexion ou une rotation, lorsque n parcourt les entiers, l'ensemble des pavés $\{s^n T\}$ de couleur x sera fini. Si s est une translation ou un glissement, l'ensemble sera infini.

Propriété 2

Soit $x, y \in \{1, 2, \dots, k\}$. Alors dans tout super k -coloriage d'un pavage isoédrique \mathfrak{S} , l'ensemble des pavés de couleur x est congruent à l'ensemble des pavés de couleur y .

Notons $\mathfrak{S}(x)$, l'ensemble des pavés de \mathfrak{S} de couleur x et $\mathfrak{S}(y)$, l'ensemble des pavés de couleur y . Puisque le k -coloriage est parfait, étant donnés $T_1 \in \mathfrak{S}(x)$ et $T_2 \in \mathfrak{S}(y)$, il existera une symétrie $s \in \mathcal{S}(\mathfrak{S})$ telle que $sT_1 = T_2$. Mais si π est la permutation de couleurs telle que (s, π) est une symétrie de couleurs, alors π enverra x sur y et ainsi s enverra $\mathfrak{S}(x)$ sur $\mathfrak{S}(y)$. De la même manière, s^{-1} enverra $\mathfrak{S}(y)$ sur $\mathfrak{S}(x)$ et on pourra en déduire que $\mathfrak{S}(x)$ et $\mathfrak{S}(y)$ sont congruents.

On constate évidemment que l'ensemble des symétries $s \in \mathcal{S}(\mathfrak{S})$ qui laissent invariant $\mathfrak{S}(x)$ constitue un sous-groupe $\mathcal{S}_x(\mathfrak{S})$ de $\mathcal{S}(\mathfrak{S})$. De plus, pour tout $n \in \{1, 2, \dots, k\}$, les sous-groupes $\mathcal{S}_x(\mathfrak{S})$ sont isomorphes.

La propriété suivante est un renforcement de l'énoncé 2.

Propriété 3

Dans un super k -coloriage d'un pavage isoédrique \mathfrak{S} , désignons par $\mathfrak{S}(j,x)$ l'ensemble des pavés d'aspect j et de couleur x ($j = 1, 2, \dots, a(\mathfrak{S})$; $x = 1, 2, \dots, k$). Soit $P(j,n)$ l'ensemble des centroïdes des pavés de $\mathfrak{S}(j,x)$. Alors pour tout aspect et toute couleur, les ensembles $P(j,x)$ sont des translations les uns des autres.

The next property is a strengthening of statement 2.

Property 3

In a super k -colouring of an isohedral tiling \mathfrak{S} , let $\mathfrak{S}(j,x)$ denote the set of all tiles of aspect j and colour x ($j = 1, 2, \dots, a(\mathfrak{S})$; $x = 1, 2, \dots, k$). Let $P(j,x)$ be the point set consisting of the centroids of the tiles in $\mathfrak{S}(j,x)$. Then for all aspects and colours, the sets $P(j,x)$ are translates of one another.

First consider $\mathfrak{S}(j,x)$ and $\mathfrak{S}(j,y)$ with colours $x \neq y$. If $T_1 \in \mathfrak{S}(j,x)$ and $T_2 \in \mathfrak{S}(j,y)$ then because T_1 and T_2 are of the same aspect j there will exist a translation $t \in \mathcal{S}(\mathfrak{S})$ such that $tT_1 = T_2$. But then, by an obvious modification of (2), t will map $\mathfrak{S}(j,x)$ onto $\mathfrak{S}(j,y)$ and so these two sets are congruent. Consequently $P(j,x)$ is a translate of $P(j,y)$ for all colours x and y .

Now consider $\mathfrak{S}(j,x)$ and $\mathfrak{S}(k,x)$ with aspects $j \neq k$. Let $T_1 \in \mathfrak{S}(j,x)$, $T_3 \in \mathfrak{S}(k,x)$ and $s \in \mathcal{S}(\mathfrak{S})$ be such that $sT_1 = T_3$. (The permutation π of colours in the colour symmetry (s, π) will leave colour x invariant.) If $T_2 \in \mathfrak{S}(j,x)$ there will be a translation $t \in \mathcal{S}(\mathfrak{S})$ such that $tT_1 = T_2$, and so if $tst^{-1}T_2 = T_4$, say, then $T_4 \in \mathfrak{S}(k,x)$ and $tT_3 = T_4$. Thus the set of all translations in $\mathcal{S}(\mathfrak{S})$ that map T_1 onto the tiles of $\mathfrak{S}(j,x)$ is exactly the same as the set of translations that map T_3 onto the tiles of $\mathfrak{S}(k,x)$. We deduce that for all aspects j and k , $P(j,x)$ is a translate of $P(k,x)$. (In fact $P(j,x)$ is simply the translate of $P(k,x)$ by the vector from the centroid of T_3 to the centroid of T_1 .)

The statements proved in the previous two paragraphs clearly imply the truth of (3).

We now establish two further properties of the sets $P(j,x)$. These are not required in the proof of the theorem but are essential for the examples of Section 4, and it is convenient to state them here.

Property 4

Each set $P(j,x)$, defined in (3), is a lattice.

From (1), $P(j,x)$ is invariant under any translation that maps a point of $P(j,x)$ onto another such point. This implies that $P(j,x)$ must be

Considérons tout d'abord $\mathfrak{S}(j,x)$ et $\mathfrak{S}(j,y)$ de couleurs $x \neq y$. Si $T_1 \in \mathfrak{S}(j,x)$ et $T_2 \in \mathfrak{S}(j,y)$ alors, puisque T_1 et T_2 sont de même aspect j , il existera une translation $t \in \mathcal{S}(\mathfrak{S})$ telle que $tT_1 = T_2$. Mais alors, par une modification évidente de (2), t enverra $\mathfrak{S}(j,x)$ sur $\mathfrak{S}(j,y)$ et ainsi ces deux ensembles sont congruents. Conséquemment, $P(j,x)$ est un translaté de $P(j,y)$ pour toutes couleurs x et y .

Considérons maintenant $\mathfrak{S}(j,x)$ et $\mathfrak{S}(k,x)$ d'aspects $j \neq k$. Soit $T_1 \in \mathfrak{S}(j,x)$, $T_3 \in \mathfrak{S}(k,x)$ et $s \in \mathcal{S}(\mathfrak{S})$ tel que $sT_1 = T_3$. (La permutation de couleurs π dans la symétrie de couleurs (s, π) laissera invariante la couleur x .) Si $T_2 \in \mathfrak{S}(j,x)$, il existera une translation $t \in \mathcal{S}(\mathfrak{S})$ telle que $tT_1 = T_2$, et aussi si $tst^{-1}T_2 = T_4$, disons, alors $T_4 \in \mathfrak{S}(k,x)$ et $tT_3 = T_4$. Ainsi, l'ensemble de toutes les translations dans $\mathcal{S}(\mathfrak{S})$ qui envoient T_1 sur les pavés de $\mathfrak{S}(j,x)$ est exactement le même que l'ensemble des translations qui envoient T_3 sur les pavés de $\mathfrak{S}(k,x)$. On en déduit que pour toute paire d'aspects j et k , $P(j,x)$ est un translaté de $P(k,x)$. (En fait, $P(j,x)$ est simplement le translaté de $P(k,x)$ par le vecteur allant du centroïde de T_3 au centroïde de T_1 .)

Les énoncés démontrés dans les deux paragraphes précédents impliquent de façon claire la véracité de (3).

Nous énonçons maintenant deux propriétés additionnelles des ensembles $P(j,x)$. Elles ne sont pas requises dans la démonstration du théorème mais sont essentielles à la compréhension des exemples de la section 4, et il apparaît naturel de les énoncer ici.

Propriété 4

Tout ensemble $P(j,x)$, défini en (3), est un treillis.

On déduit de (1) que $P(j,x)$ reste invariant sous toute translation qui envoie un point de $P(j,x)$ sur tout autre tel point. Ceci implique que $P(j,x)$ doit être soit un treillis soit un ensemble de points équidistants sur une droite. Mais les nombres d'aspects et de couleurs sont tous deux finis, ainsi (3) implique que l'ensemble des centroïdes de tous les pavés de \mathfrak{S} est la réunion d'un nombre fini de translatés de $P(j,x)$. Évidemment, ceci est impossible si $P(j,x)$ est un ensemble de points colinéaires et, par conséquent, on en déduit que $P(j,x)$ est un treillis.

either a lattice or a set of equidistant points on a line. But the numbers of aspects and colours are both finite, so (3) implies that the set of centroids of all tiles in \mathfrak{S} is the union of a finite number of translates of $P(j,x)$. Clearly this is impossible if $P(j,x)$ is a set of collinear points and therefore we deduce that $P(j,x)$ is a lattice.

Property 5

If \mathfrak{S} admits, as a symmetry, a rotation of period n then each lattice $P(j,x)$ admits, as a symmetry, a rotation of period n about some point. If \mathfrak{S} admits, as a symmetry, a reflection with mirror λ , or a glide with axis λ , then each lattice $P(j,x)$ admits, as a symmetry, reflection in some mirror parallel to λ .

Consider a rotation of period n that maps $T_1 \in \mathfrak{S}(j,x)$ onto $T_2 \in \mathfrak{S}(k,y)$. This will map $P(j,x)$ onto $P(k,y)$, and since $P(j,x)$ is a translate of $P(k,y)$, we deduce that $P(j,x)$ admits, as a symmetry, a rotation of period n about some point.

In a similar way, if s is a reflection with mirror λ or a glide with axis λ , that maps $T_1 \in \mathfrak{S}(j,x)$ onto $T_2 \in \mathfrak{S}(k,y)$, then s will map $P(j,x)$ onto $P(k,y)$ and since $P(j,x)$ is a translate of $P(k,y)$ this implies that $P(j,x)$ admits, as a symmetry, a reflection in some mirror parallel to λ .

After these preliminaries the proof of the right inequality of the theorem is easy. From (3) it follows that two tiles of the same aspect and the same colour must each be surrounded by $n(\mathfrak{S})$ adjacent tiles which are coloured *in exactly the same way*. (In other words, if $T_1, T_2 \in \mathfrak{S}(j,x)$ and $s \in \mathcal{S}(\mathfrak{S})$ is a translation such that $sT_1 = T_2$, then s will not only map the adjacents of T_1 onto those of T_2 but also preserve their colours. Hence, in the colour symmetry (s, π) , π is the identity permutation of the colours.) If the tiles of colour x appear in $a_x(\mathfrak{S})$ aspects, then $a_x(\mathfrak{S}) \leq a(\mathfrak{S})$. As the $n(\mathfrak{S})$ adjacents of the tiles of each aspect may be of different colours, then along with the colour x , we have in all $a_x(\mathfrak{S}) n(\mathfrak{S}) + 1$ colours. Neighbourliness implies that no other colours occur, so

$$M \leq a_x(\mathfrak{S}) n(\mathfrak{S}) + 1 \leq a(\mathfrak{S}) n(\mathfrak{S}) + 1$$

and right hand inequality of the theorem is established.

Propriété 5

Si \mathfrak{S} admet, comme symétrie, une rotation de période n alors chaque treillis $P(j,x)$ admet, comme symétrie, une rotation de période n par rapport à un certain point. Si \mathfrak{S} admet, comme symétrie, une réflexion de miroir λ , ou un glissement d'axe λ , alors chaque treillis $P(j,x)$ admet, comme symétrie, une réflexion dans un certain miroir parallèle à λ .

Considérons une rotation de période n qui envoie $T_1 \in \mathfrak{S}(j,x)$ sur $T_2 \in \mathfrak{S}(k,y)$. Elle enverra $P(j,x)$ sur $P(k,y)$, et puisque $P(j,x)$ est un translaté de $P(k,y)$, on en déduit $P(j,x)$ admet, à titre de symétrie, une rotation de période n par rapport à un certain point.

De la même manière, si s est une réflexion de miroir λ ou un glissement d'axe λ , qui envoie $T_1 \in \mathfrak{S}(j,x)$ sur $T_2 \in \mathfrak{S}(k,y)$, alors s enverra $P(j,x)$ sur $P(k,y)$, et puisque $P(j,x)$ est un translaté de $P(k,y)$, on aura que $P(j,x)$ admet, à titre de symétrie, une réflexion dans un certain miroir parallèle à λ .

Après ces quelques préliminaires, la démonstration de l'inégalité de droite du théorème est simple. De (3), on déduit que deux pavés de même aspect et de même couleur doivent être entourés par $n(\mathfrak{S})$ pavés adjacents qui sont coloriés *exactement de la même façon*. (En d'autres mots, si $T_1, T_2 \in \mathfrak{S}(j,x)$ et $s \in \mathcal{S}(\mathfrak{S})$ est une translation telle que $sT_1 = T_2$, alors s enverra non seulement les pavés adjacents de T_1 sur ceux de T_2 mais respectera aussi leurs couleurs. Donc, dans la symétrie de couleurs (s, π) , π est la permutation identité des couleurs.) Si les pavés de couleur x apparaissent en $a_x(\mathfrak{S})$ aspects, alors $a_x(\mathfrak{S}) \leq a(\mathfrak{S})$. Puisque les $n(\mathfrak{S})$ pavés adjacents aux pavés de chaque aspect doivent être de couleurs différentes, on a donc en tout, en considérant la couleur x , $a_x(\mathfrak{S}) n(\mathfrak{S}) + 1$ couleurs. La conciliation implique l'absence de tout autre couleur, ainsi

$$M \leq a_x(\mathfrak{S}) n(\mathfrak{S}) + 1 \leq a(\mathfrak{S}) n(\mathfrak{S}) + 1$$

et l'inégalité de droite du théorème est vérifiée.

Dans le **tableau 1**, pour chacun des 93 types de pavages isoédriques, on dresse la liste des nombres possibles de couleurs dans les super coloriages. Ces nombres satisfont les inégalités du

In **Table 1** we list, for each of the 93 types of isohedral tilings, the possible numbers of colours in super colourings. These satisfy the inequalities of the theorem and also the restrictions on the numbers of colours in perfect colourings given by Senechal [6]. However certain numbers that satisfy both conditions cannot occur; these can only be found by carefully examining all the super colourings of tilings of the given type.

Clearly there are too many super colourings for descriptions or illustrations of all of them to be included here. In **Figure 9** we show the superb colourings of seven types of tilings, and in **Figure 11** the super colourings of the remaining 86 types that use the maximum number M of colours. In **Figure 10** we show some super colourings that use the minimum number m of colours, namely those for which m is not equal to the lower bound of the theorem.

4. EXAMPLES

We now illustrate, by means of examples, some of the methods used to construct the super colourings described in this paper. As will be seen, we make extensive use of properties (1) to (5) given in the previous section.

théorème ainsi que les restrictions imposées aux nombres de couleurs dans des coloriages parfaits données par Senechal [6]. Toutefois, on ne peut voir apparaître certains nombres satisfaisant les deux conditions ; on ne pourra les trouver qu'en examinant minutieusement tous les super coloriages de pavages d'un type donné.

Il y a manifestement trop de super coloriages pour donner ici, de façon exhaustive, les descriptions et les illustrations. À la **figure 9**, on trouve les superbes coloriages de sept types de pavages, et à la **figure 11**, les super coloriages utilisant le nombre maximum M de couleurs pour les 86 autres types. La **figure 10** illustre certains super coloriages n'utilisant que le nombre minimal m de couleurs, ceux pour lesquels m n'est pas égal à la limite inférieure du théorème.

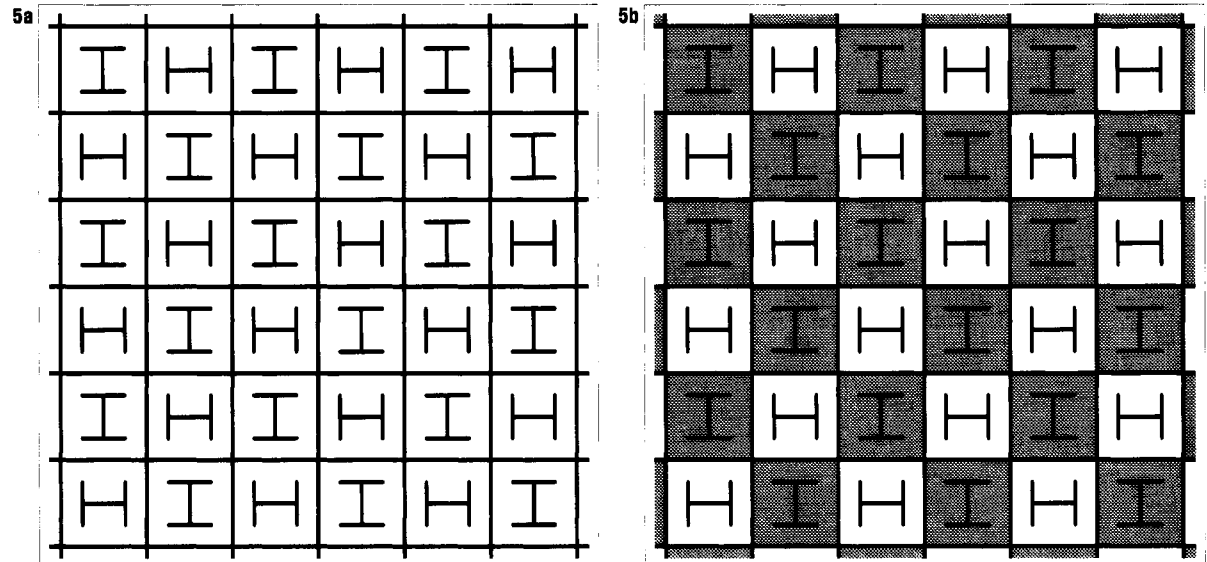
4. EXEMPLES

Nous illustrerons maintenant, à l'aide d'exemples, certaines des méthodes de construction des super coloriages décrits dans cet article. Comme on le verra, nous ferons une très grande utilisation des propriétés (1) à (5) formulées à la section précédente.

FIGURE 5

The construction of super colourings of tilings of isohedral type IH73.

La construction de super coloriages de pavages de type isoédrique IH73.

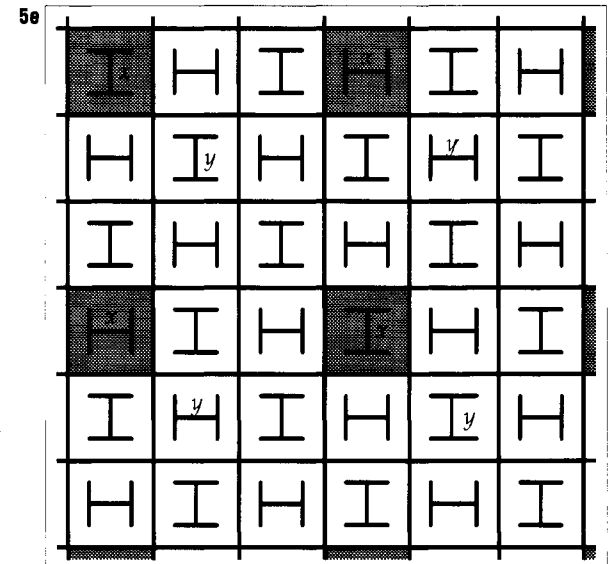
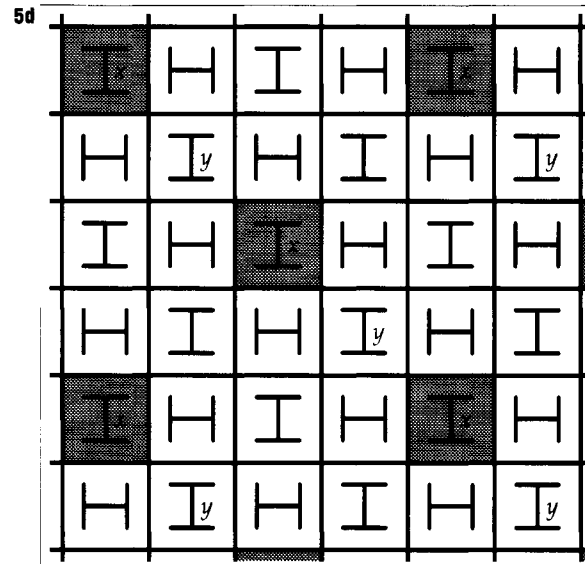
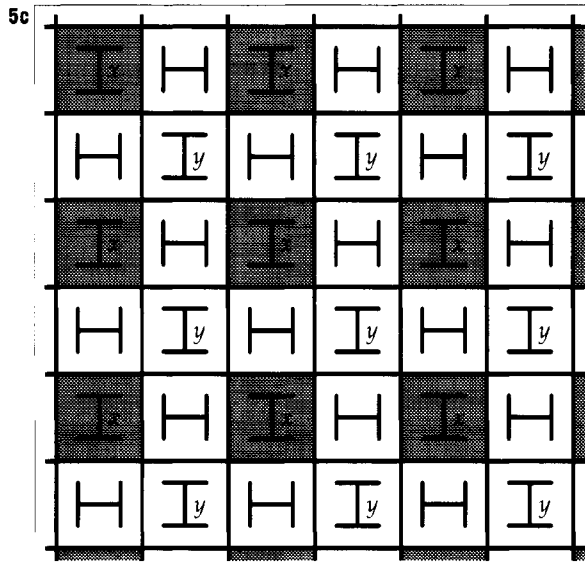


Example 1: IH73 — Figure 5a

Here the tiles are marked and occur in two aspects. Because of the reflectional and rotational symmetries of $S(\mathfrak{S})$, conditions (4) and (5) imply that the point set $P(1,x)$ (the centroids of the tiles of colour x) must be a lattice which admits as symmetries 4-fold rotations and also reflections in vertical and horizontal lines (that is, in lines parallel to the edges of the tiles). There is an infinite sequence of lattices of this kind; the first four correspond to the centroids of the shaded tiles in **Figures 5b, 5c, 5d, and 5e**. In the last three of these diagrams we have indicated possible positions of tiles of a second colour y , in accordance with condition (2). But it is obvious that in any of these arrangements the colouring cannot be neighbourly since no tile of colour y is adjacent to any tile of colour x . Thus in any super colouring, tiles of colour x must be arranged as in **Figure 5b**. There are thus only two colours; the colouring is unique and so superb. It is the checkerboard colouring.

Exemple 1 : IH73 — Figure 5a

Les pavés sont ici marqués et ils apparaissent sous deux aspects. Étant donné les symétries de réflexion et de rotation de $S(\mathfrak{S})$, les conditions (4) et (5) impliquent que l'ensemble de points $P(1,x)$ (les centroïdes des pavés de couleur x) doit être un treillis admettant comme symétries les rotations d'ordre 4 et les réflexions par rapport à des droites verticales et horizontales (c'est-à-dire, par rapport à des droites parallèles aux arêtes des pavés). Il existe une suite infinie de treillis de la sorte; les quatre premiers correspondent aux centroïdes des pavés ombragés des **figures 5b, 5c, 5d et 5e**. Dans les trois derniers diagrammes, on a indiqué les positions possibles des pavés d'une seconde couleur y , en respect de la condition (2). Il est évident, toutefois, que dans aucun de ces arrangements, le coloriage ne peut être conciliant puisqu'aucun pavé de couleur y n'est adjacent à un pavé de couleur x . Ainsi, dans tout super coloriage, les pavés de couleur x doivent être disposés comme à la **figure 5b**. Il n'y a ainsi que deux couleurs; le coloriage est unique et donc superbe. C'est le coloriage de l'échiquier.



Example 2: IH26 — Figure 6a

Since the tiles of \mathfrak{S} are of two aspects (those pointing up and those pointing down), we deduce from conditions (3) and (4), that the centroids of the tiles $\mathfrak{S}(x)$ of colour x must form either one or two lattices. Moreover, by condition (5) each of these lattices must admit, as symmetries, reflections in horizontal and vertical lines. The actual arrangement of tiles in \mathfrak{S} , together with these conditions on the lattices, places severe restrictions on the possible sets $\mathfrak{S}(x)$.

The tiling \mathfrak{S} may be described as built up from “double rows” of tiles between parallel lines; in **Figures 6b, 6c** and **6d** these rows are labelled A, B, C, ... Now it is easy to see that a proper perfect colouring cannot be neighbourly (and so super) unless every colour occurs somewhere in each of the rows. For example, suppose the tiles of colour x were arranged in a similar manner to that indicated by the shaded tiles in **Figure 6b**. Here, as an example, tiles of colour x of both aspects occur in rows A, C, E, ..., but there is no tile of this colour in rows B, D, F, ... In the diagram each pair of tiles of the same colour and aspect are separated horizontally by

Exemple 2 : IH26 — Figure 6a

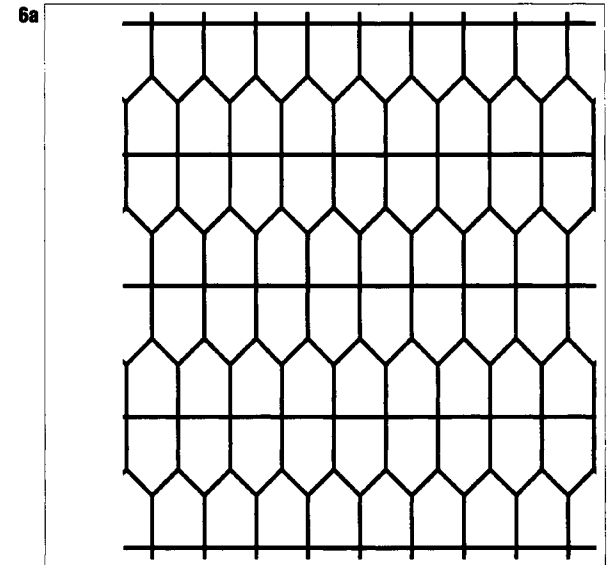
Puisque les pavés de \mathfrak{S} apparaissent sous deux aspects (ceux orientés vers le haut et ceux orientés vers le bas), les conditions (3) et (4) nous portent à conclure que les centroïdes des pavés $\mathfrak{S}(x)$ de couleur x doivent former soit un ou deux treillis. De plus, la condition (5) fait que chacun de ces treillis doit admettre, à titre de symétrie, les réflexions par rapport à des droites horizontales et verticales. La disposition réelle des pavés de \mathfrak{S} , ainsi que les conditions imposées aux treillis, posent de sévères restrictions sur les possibles ensembles $\mathfrak{S}(x)$.

On peut décrire le pavage \mathfrak{S} comme une construction de « doubles rangées » de pavés entre des droites parallèles; aux **figures 6b, 6c** et **6d**, ces rangées sont étiquetées A, B, C, ... Il est maintenant facile de constater qu'un coloriage propre et parfait ne peut être conciliant (et donc super) à moins que toutes les couleurs apparaissent quelque part dans chaque rangée. Par exemple, supposons que les pavés de couleur x soient disposés à la manière des pavés ombragés dans la **figure 6b**. Ici, à titre d'exemple, des pavés de couleur x des deux aspects apparaissent dans les rangées A, C,

FIGURE 6

The construction of super colourings of tilings of isohedral type IH26.

La construction de super colorriages de pavages de type isoédrique IH26.



4 tiles — but any even number p of tiles ($p > 0$) is possible. It is clear that in any such arrangement there would exist tiles in rows B, D, F, ... whose colours were *not* adjacent to colour x , so the colouring would not be neighbourly. Examination of all possibilities leads to the conclusion stated above — that unless tiles of colour x occur in every row the colouring cannot be super.

Hence we must consider arrangement of tiles of colour x similar to those shown in **Figures 6c** and **6d**. In fact, it is hard to see that these are the only two possibilities:

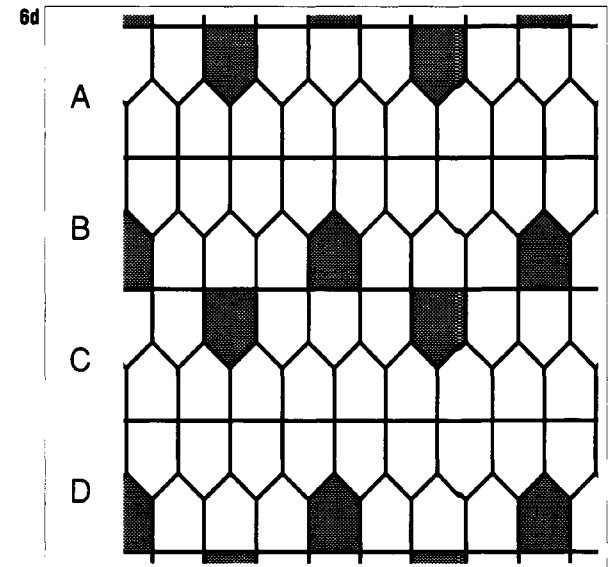
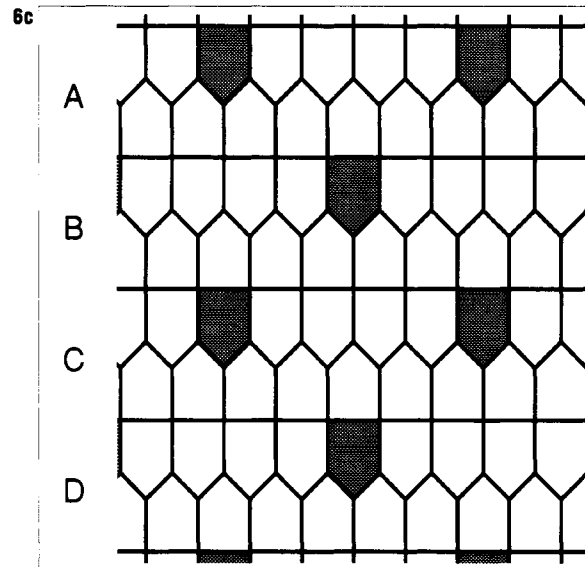
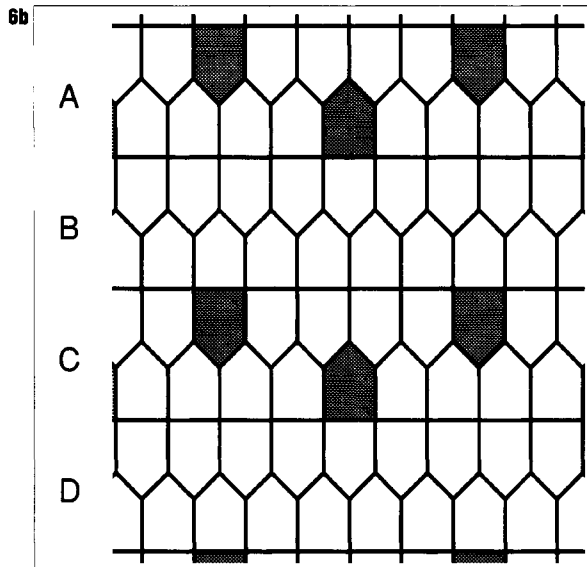
(i) In **Figure 6c** the tiles $\mathfrak{S}(x)$ are all of the same aspect and the tiles in the same row must be separated horizontally by an *even* number p of tiles. In the diagram $p = 4$, but this does not lead to a super colouring; in fact the only super colouring that can arise corresponds to $p = 2$. It is a 6-colouring and is shown in **Figure 11**.

(ii) In **Figure 6d** tiles of opposite aspects occur in alternate rows, and two tiles in the same row must be separated horizontally by an *odd* number p of tiles. In the diagram $p = 3$, but this does not lead

E, ..., mais il n'y a aucun pavé de cette couleur dans les rangées B, D, F, ... Dans le diagramme, chaque paire de pavés de même couleur et de même aspect sont séparés horizontalement par 4 pavés — mais tout nombre pair p de pavés ($p > 0$) est possible. Il est clair que dans toute disposition de ce type il doit exister des pavés dans les rangées B, D, F, ... dont les couleurs ne sont *pas* adjacentes à la couleur x , ainsi le coloriage ne peut être conciliant. Un examen de toutes les possibilités mène à la conclusion énoncée ci-dessus — à moins que des pavés de couleur x n'apparaissent dans toutes les rangées, le coloriage ne peut être super.

On doit donc considérer des dispositions des pavés de couleur x semblables à ceux illustrées aux **figures 6c** et **6d**. En fait, il n'est pas difficile de vérifier que ce sont les deux seules possibilités :

(i) À la **figure 6c**, les pavés $\mathfrak{S}(x)$ sont tous du même aspect et les pavés d'une même rangée doivent être séparés horizontalement par un nombre *pair* p de pavés. Dans le diagramme, $p = 4$, mais cela ne crée pas un super coloriage. De fait, le seul super coloriage pouvant survenir correspond à la valeur $p = 2$. C'est un 6-coloriage, il est illustré à la **figure 11**.



to a super colouring; in fact the only super colouring that can arise corresponds to $p=1$. It is a 4-colouring and is shown in **Figure 10**.

Thus a tiling of type IH26 can be super coloured only with 4 or 6 colours, in accordance with the entry in Column 7 of **Table 1**.

Example 3: IH28 — Figure 7a

In the previous two examples the existence of reflections in the symmetry group $S(\mathfrak{S})$ placed great restrictions on the lattices $P(j,x)$ and hence on the sets $\mathfrak{S}(x)$. This, in turn, had the consequence that the maximum number of colours in a super colouring was quite small compared with the upper bound given by the theorem. For tilings of type IH28 the symmetry group is $p4$. Hence there are no reflections; there are only translations and rotations of periods 2 and 4.

Let us choose any two tiles to be colour 1 (for example, the shaded tiles which are heavily outlined in **Figure 7b**). We observe that rotation through an angle of $1/4 \pi$ about the point marked 1 maps one tile into the other, so condition (1) implies that all the shaded tiles must be of colour 1. Now examine all the tiles adjacent to these

(ii) À la **figure 6d**, les pavés d'aspects opposés apparaissent alternativement dans les rangées et deux pavés de la même rangée doivent être séparés horizontalement par un nombre *impair* p de pavés. Dans le diagramme $p=3$, mais cela ne crée pas un super coloriage. De fait le seul super coloriage pouvant survenir correspond à la valeur $p=1$. C'est un 4-coloriage, il est illustré à la **figure 10**.

Ainsi un pavage de type IH26 ne peut être super colorié qu'avec 4 ou 6 couleurs, en accord avec les données de la colonne 7 du **tableau 1**.

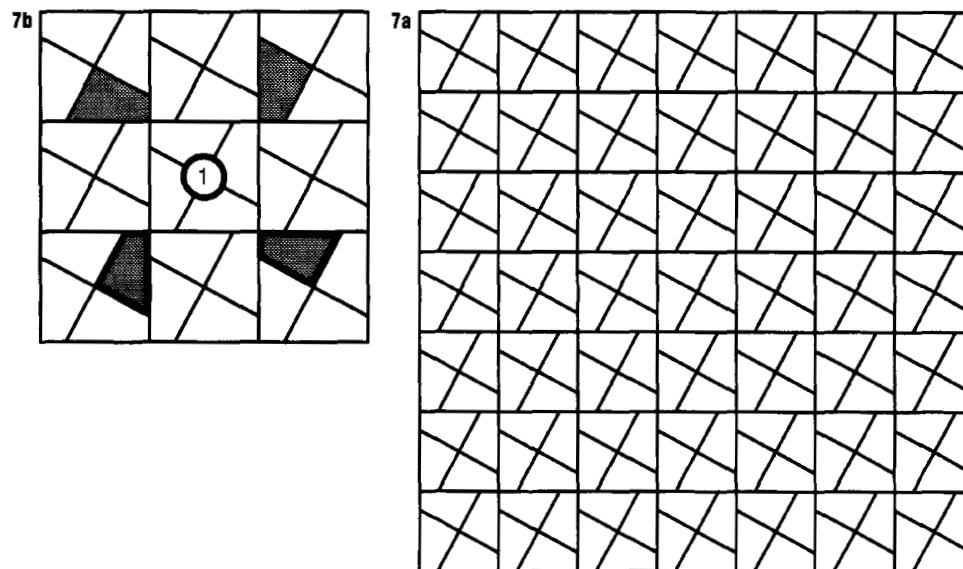
Exemple 3 : IH28 — Figure 7a

Dans les deux exemples précédents, l'existence de réflexions dans le groupe de symétrie $S(\mathfrak{S})$ imposait de grandes restrictions aux treillis $P(j,x)$ et ainsi sur les ensembles $\mathfrak{S}(x)$. Ceci avait la conséquence de limiter le nombre maximum de couleurs dans un super coloriage qui demeurerait petit par rapport à la borne supérieure donnée dans le théorème. Pour les pavages de type IH28, le groupe de symétrie est $p4$. Il n'y a donc pas de réflexions ; il n'y a que des translations et des rotations d'ordres 2 et 4.

FIGURE 7

The construction of super colourings of tilings of isohedral type IH28.

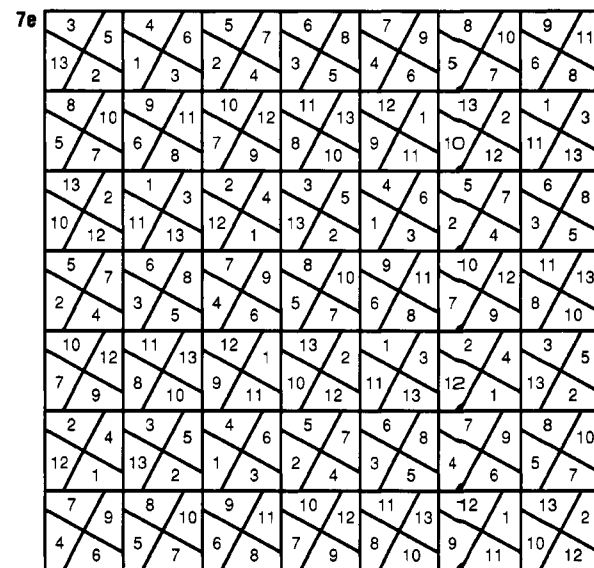
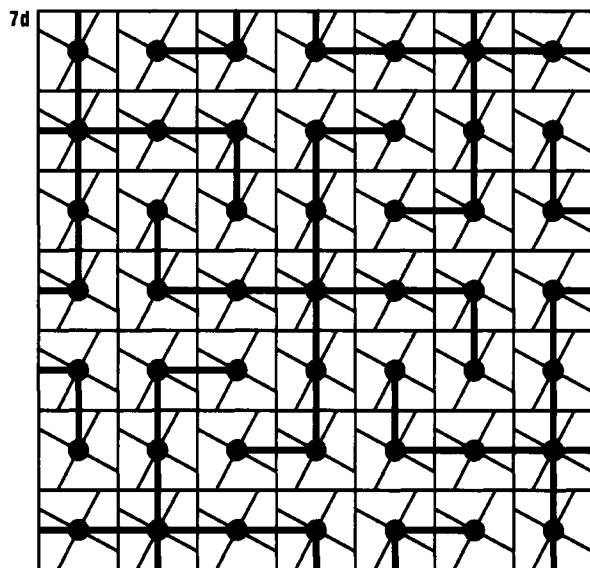
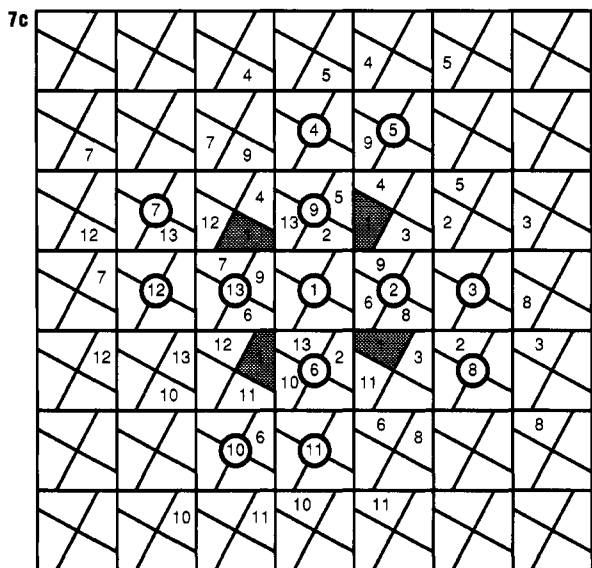
La construction de super colorriages de pavages de type isoédrique IH28.



four tiles, marking the corresponding centres of rotation (**Figure 7c**). There are 13 centres in all, arranged in the form of a swastika. Replicas of this swastika can be used to cover the lattice consisting of *all* centres of rotation as indicated in **Figure 7d**. For each centre labelled x ($x = 1, 2, \dots, 13$) we colour four tiles with colour x as in **Figure 7b**. This leads to the super colouring shown in **Figure 7e**. In order to discover *all* super colourings of this type of tiling we proceed in a similar manner, starting the construction with any two tiles. If tiles of different aspects are chosen then there will be a rotation that maps one into the other, the centres of rotation can then be marked and an analysis of the possibilities proceeds as above. The swastikas or other arrangements of centres may overlap, but in such cases we must be careful not to violate the condition that the tiling is proper. (In fact, the construction we have described for 13 colours corresponds to a maximum colouring; it is the same colouring as that shown in **Figure 11**, even though it may appear, superficially, to be quite different.)

On the other hand, if the two chosen tiles are of the same aspect then the colouring cannot be neighbourly unless *every* tile of this aspect has the same colour. In this case we are led to a super colouring with a minimum number $m = 4$ colours, see **Figure 10**.

Choisissons arbitrairement deux pavés et colorions-les de la couleur 1 (par exemple, les pavés ombragés dont le contour est gras dans la **figure 7b**). On note qu'une rotation d'un angle de $\pi/4$ par rapport au point étiqueté 1 envoie un pavé sur l'autre; la condition (1) implique donc que tous les pavés ombragés doivent être de couleur 1. Examinons maintenant tous les pavés adjacents à ces quatre pavés et identifions les centres de rotation correspondants (**figure 7c**). Il y a en tout 13 centres disposés en forme de svastika. On peut utiliser des copies de cette svastika pour réaliser un recouvrement du treillis formés de *tous* les centres de rotation comme l'indique la **figure 7d**. Pour chaque centre étiqueté x ($x = 1, 2, \dots, 13$), on colorie quatre pavés de couleur x comme à la **figure 7b**. Ceci mène à la réalisation du super coloriage illustré à la **figure 7e**. Si on veut découvrir *tous* les super coloriage de ce type de pavage, on procède de manière similaire en débutant la construction avec deux pavés choisis arbitrairement. Si on choisit des pavés d'aspects différents, ce sera alors une rotation qui les enverra l'un sur l'autre, on peut alors marquer les centres de rotation et on procède à une analyse des possibilités comme ci-dessus. Les svastikas ou d'autres dispositions de centres peuvent se chevaucher, mais dans ces cas on doit faire attention au respect de la condition qui demande au pavage d'être un pavage propre.



5. CONCLUSION

We now make some remarks of a general nature about super colourings of tilings and related topics. From the numerical data in **Table 1** it is clear that the bounds given in the main theorem (and especially the upper bound for M) are rather weak. Yet there seems to be no obvious way in which these can be strengthened. A more challenging problem than improving the bounds is to find an explanation, in general terms, for the “missing numbers of colours” in the possible super colourings indicated in the last column of **Table 1**. For example, why is it not possible to find a super 5-colouring of an isohedral tiling of type IH22, when super colourings by 4 and 6 colours exist and a perfect colouring by 5 colours is possible?

There are extensions of the topics presented in this paper to space of three or more dimensions. It is clearly not possible to make any progress with the problems of super colouring three-dimensional isohedral tilings for the simple reason that the types of such tilings are at present unknown (and certainly occur in great numbers!) A simpler problem is that of colouring the faces of isohedral polyhedra in three-dimensional space or, more generally, colouring isohedral tilings on the sphere S^2 . (See [5] for a list of the types of such tilings.) The terms proper, neighbourly, and perfect colourings can be applied without difficulty to these situations, and so super and superb colourings can be defined.

The following few remarks will be confined to super colourings of the regular polyhedra. It will be seen that even in these simple cases there are some interesting differences from the theory of colouring plane tilings.

The regular tetrahedron can be superbly coloured with 4 colours, each face a different colour. The cube can also be superbly coloured, in this case with 3 colours. Each pair of opposite faces is a

(En fait, la construction décrite ici pour 13 couleurs correspond au coloriage maximum ; c'est le même coloriage que celui illustré à la **figure 11**, même s'il peut, au premier abord, sembler différent.)

D'autre part, si les deux pavés choisis sont de même aspect, le coloriage ne peut alors être conciliant à moins que *tous* les pavés de cet aspect soient de la même couleur. Ceci mène alors à un super coloriage d'un nombre minimum $m = 4$ de couleurs, voir **figure 10**.

5. CONCLUSION

Nous allons maintenant énoncer quelques remarques d'ordre général au sujet des super coloriages de pavages et de sujets connexes. Les données numériques du **tableau 1** montrent clairement que les bornes données dans le théorème principal (et spécifiquement la borne supérieure pour M) sont plutôt faibles. Il ne semble pas exister maintenant de façon évidente de les rendre plus fortes. Un défi encore plus grand que parfaire les bornes est de trouver une explication, en termes généraux, pour les «nombres de couleurs manquants» dans les super coloriages indiqués à la dernière colonne du **tableau 1**. Pourquoi, par exemple, n'est-il pas possible de trouver un super 5-coloriage d'un pavage isoédrique de type IH22 lorsqu'existent des super coloriages de 4 et 6 couleurs et qu'il est possible de construire un coloriage parfait avec 5 couleurs ?

Il existe, pour les sujets abordés dans cet article, des généralisations à des espaces tridimensionnels ou multidimensionnels. Il est clair qu'on ne peut faire avancer les recherches au sujet des problèmes de super coloriages de pavages isoédriques dans l'espace tridimensionnel pour la simple raison que, jusqu'à présent, on ne connaît pas les types de ces pavages (il y en a certainement un grand nombre !). Un problème plus simple est celui du coloriage des faces des polyèdres isoédriques dans

different colour. In contrast, the regular octahedron admits two super colourings, namely a maximum one with 4 colours (each pair of opposite faces a different colour) and a minimum one with 2 colours (the checkerboard colouring). The regular dodecahedron has a super colouring with 6 colours (each pair of opposite faces a different colour). To see that no other super colouring is possible we can proceed as follows. Suppose faces T_1 and T_2 of the regular dodecahedron are of the same colour x , and T_1 is not opposite to T_2 . Then the dihedral group of order 10 that maps T_1 onto itself will map T_2 onto at least 4 other faces, and since the colouring is perfect, all of these must be of colour x . This is inconsistent with the condition that the colouring is proper. Finally, the regular icosahedron admits no super colouring. To see this, we

l'espace tridimensionnel ou, de façon plus générale, le coloriage de pavages isoédriques sur la sphère S^2 . (Voir [5] pour une liste des types de ces pavages.) On peut, sans difficulté, transposer les termes de pavages propres, conciliants ou parfaits à ces nouvelles situations. On peut ainsi définir les concepts de super et superbes coloriations.

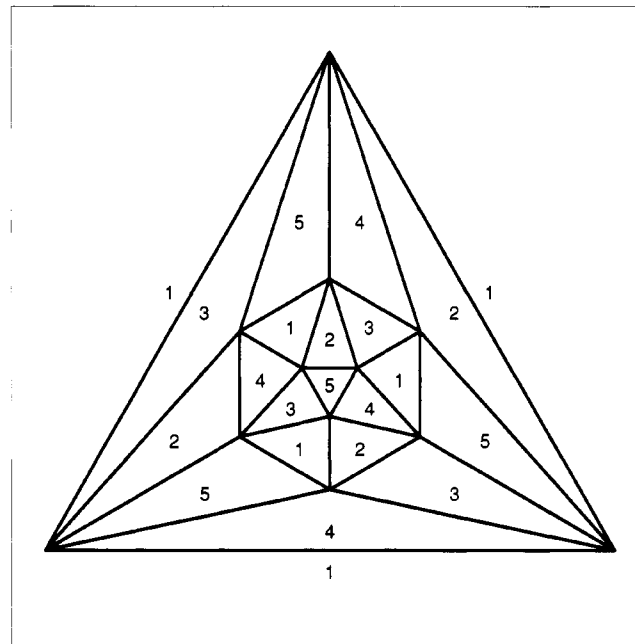
Les quelques remarques suivantes ne s'appliqueront qu'aux super coloriations des polyèdres réguliers. On verra, même pour ces cas simples, quelques particularités intéressantes par rapport à la théorie du coloriage des pavages du plan.

On peut donner un superbe coloriage de quatre couleurs pour le tétraèdre régulier, chaque face étant d'une couleur différente. On peut aussi colorier le cube de façon superbe, dans ce cas il suffit de trois couleurs. Chaque paire de faces opposées est de couleur différente. Par contraste, l'octaèdre régulier admet deux super coloriations, nommément un super coloriage maximum de 4 couleurs (chaque paire de faces opposées est couleur différente) et un super coloriage minimum de 2 couleurs (le pavage de l'échiquier). Le dodécaèdre régulier possède un super coloriage de 6 couleurs (chaque paire de faces opposées est de couleur différente). Pour vérifier qu'il n'est pas possible de créer d'autre super coloriage, on peut procéder comme suit. Supposons que les faces T_1 et T_2 d'un dodécaèdre régulier soient de même couleur x sans être opposées. Le groupe dièdre d'ordre 10 qui fera correspondre la face T_1 à elle-même enverra T_2 sur au moins 4 autres faces, et puisque le coloriage est parfait, elles devront toutes être de couleur x . Il survient alors une contradiction avec la condition demandant que le coloriage soit propre. Enfin, l'icosaèdre régulier n'admet pas de super coloriage. Pour le vérifier, supposons que deux faces non opposées soient de la même couleur. En appliquant alors des arguments similaires à ceux utilisés pour le dodécaèdre, on arrive à la conclusion qu'il ne peut exister de coloriage propre ayant cette propriété. Toutefois, le 10-coloriage pour lequel chaque paire de

FIGURE 8

A Schlegel diagram of the regular icosahedron showing a 5-colouring which is perfect (and super) for the rotational group of symmetries. There is no super colouring of the regular icosahedron with respect to its full symmetry group.

Un diagramme Schlegel de l'icosaèdre régulier montrant un 5-coloriage qui est parfait (et super) pour le groupe des symétries de rotation. Il n'existe pas de super coloriage de l'icosaèdre régulier en tenant compte en entier de son groupe de symétrie.



REFERENCES / RÉFÉRENCES

- [1] M.C. Escher's **Universe of Mind Play**.
Catalogue of an exhibition of M.C. Escher's work held in Japan, September-November 1983.
- [2] B. Grünbaum and G.C. Shephard **Tilings and Patterns**.
W.F. Freeman & Co., New York, 1986.
- [3] B. Grünbaum and G.C. Shephard **"The eighty-one types of isohedral tilings in the plane."**
Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 82 (1977), 177-196.
- [4] B. Grünbaum and G.C. Shephard **"Perfect colorings of transitive tilings and patterns in the plane."**
Discrete Math., 20 (1977), 235-247.
- [5] B. Grünbaum and G.C. Shephard **"Spherical tilings with transitivity properties."**
In "The Geometric Vein; the Coxeter Festschrift", C. Davis, B. Grünbaum, F.A. Sherk, editors, Springer, New York, 1982.
- [6] Marjorie Senechal **"Color groups."**
Discrete Applied Math., 1 (1979), 51-73.
- [7] G.C. Shephard **"What Escher might have done."**
Proc. Symposium on M.C. Escher, Rome 1985.
- [8] T. Wieting **The Mathematical Theory of Chromatic Plane Ornaments**.
Monographs and textbooks in pure and applied mathematics.
Vol. 71, Dekker, New York, 1982.

suppose that two faces which are not opposite to one another are of the same color. Then applying arguments similar to that just given for the dodecahedron leads to the conclusion that there can be no proper colouring with this property. However the 10-colouring in which each pair of opposite faces is a different colour is certainly not neighbourly. In fact here we have a minimum perfect proper colouring which is not neighbourly. By contrast, it is easy to check that every perfect proper minimum colouring of an isohedral plane tiling is necessarily neighbourly and therefore super.

On the other hand, if we only allow *rotational* symmetries of the regular icosahedron then there exists a super 5-colouring. This is indicated on the Schlegel diagram of the icosahedron shown in **Figure 8**.

faces opposées est de couleur différente n'est certainement pas concilient. En fait, on a ici un coloriage propre et parfait minimum qui n'est pas concilient. Par contraste, on peut facilement vérifier que tout coloriage propre et parfait minimum d'un pavage isoédrique du plan est nécessairement concilient et par le fait même super.

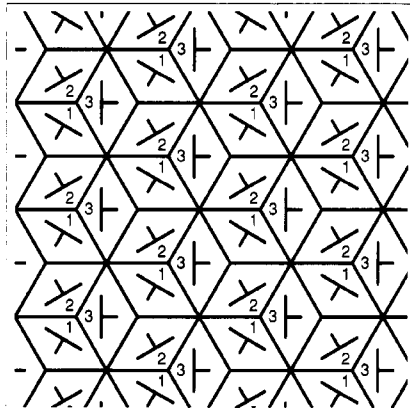
D'autre part, si on ne permet que les symétries de *rotation* de l'icosaèdre régulier, on peut alors construire un super 5-colouriage. Ceci est illustré sur le diagramme Schlegel de l'icosaèdre à la **figure 8**.

FIGURE 9

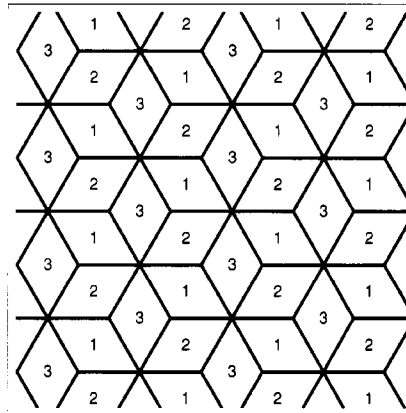
The seven isohedral types that have superb colourings. In the cases of IH35 and IH37, two distinct superb colourings are shown.

Les sept types isoédriques présentant des superbes coloriations. Pour les types IH35 et IH37, on montre deux superbes coloriations distincts.

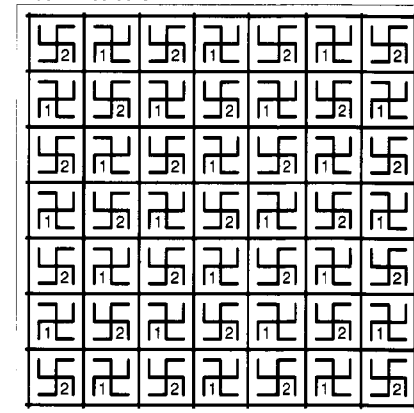
IH35 3 colours



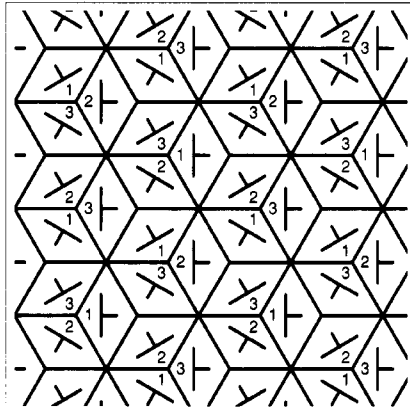
IH37 3 colours



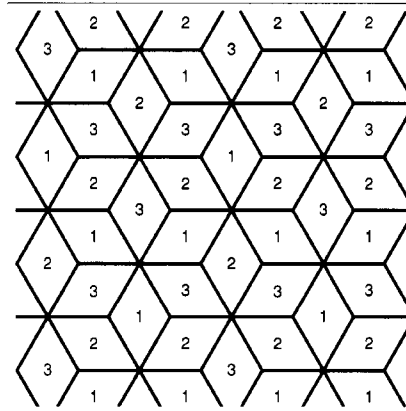
IH63 2 colours



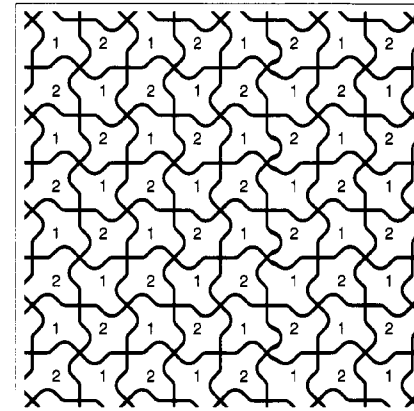
IH35 3 colours



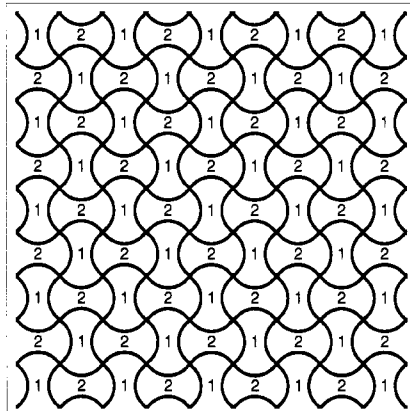
IH37 3 colours



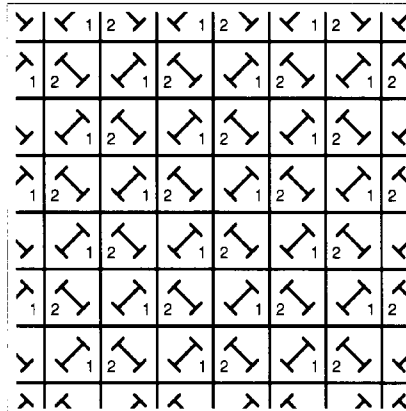
IH71 2 colours



IH73 2 colours



IH75 2 colours



IH76 2 colours

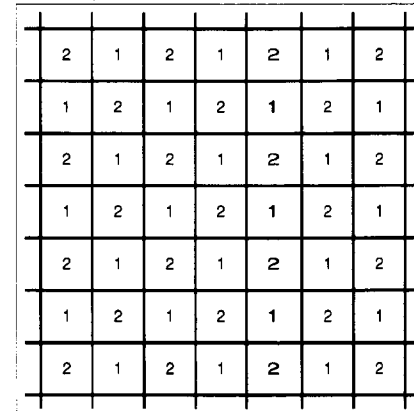


FIGURE 10

Some super colourings using a minimum number of colours, namely those cases where the minimum is not equal to the lower bound given in the theorem.

Quelques super coloriage employant le nombre minimum de couleurs, en particulier les cas où le minimum n'est pas égal à la borne inférieure du théorème.

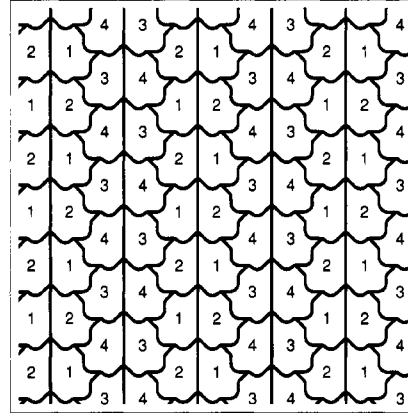
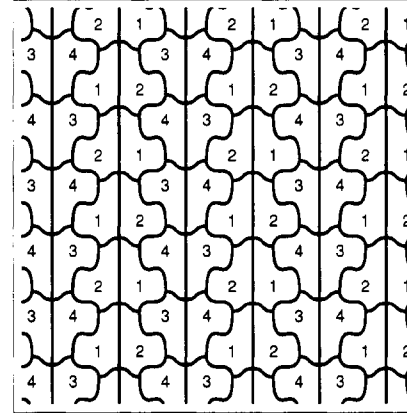
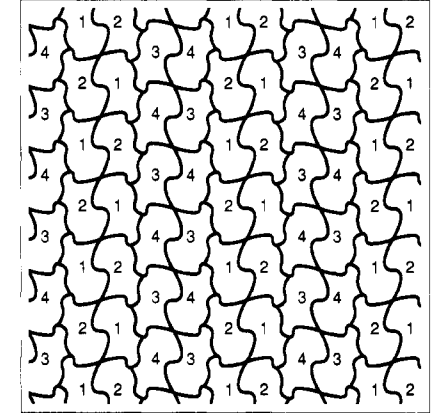
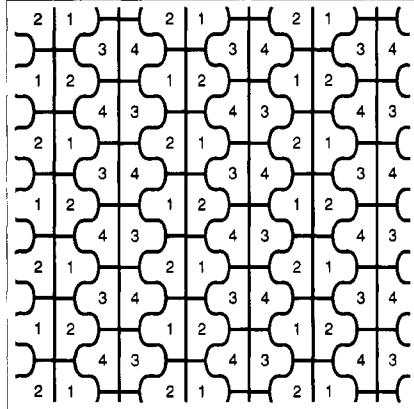
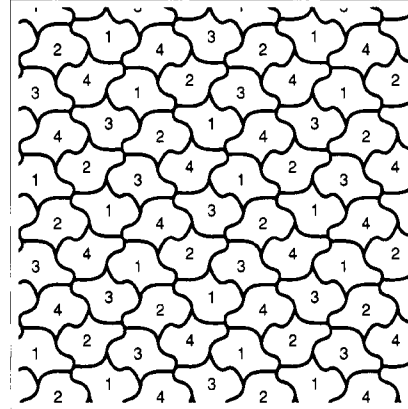
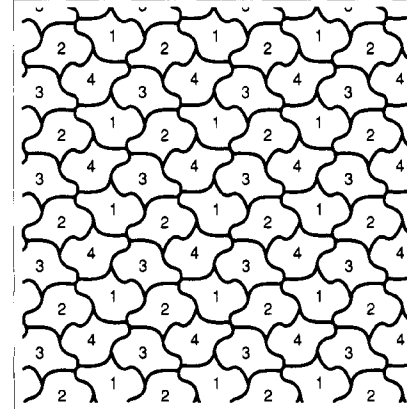
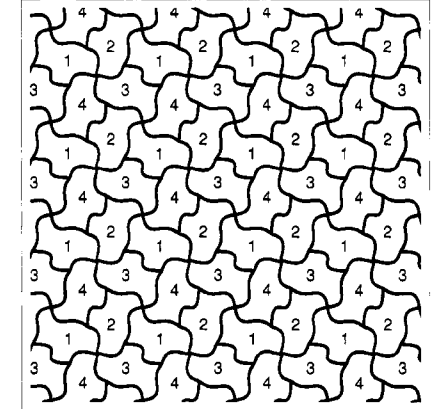
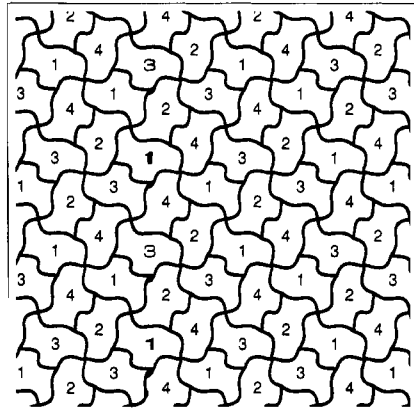
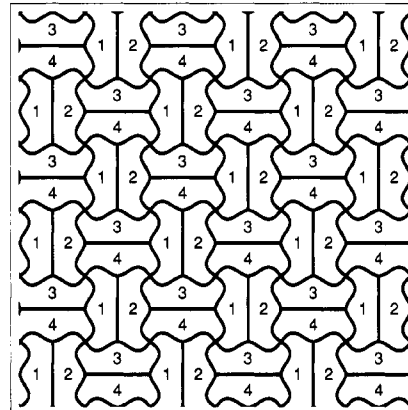
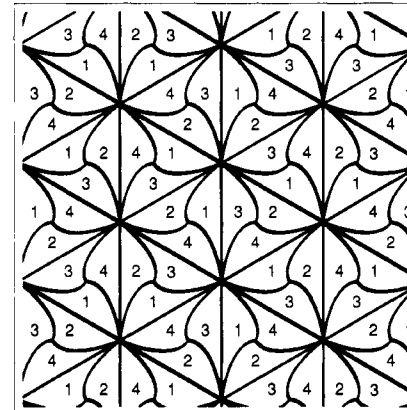
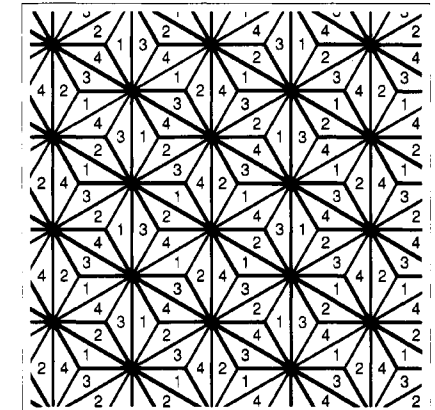
IH22 $m = 4$ IH24 $m = 4$ IH25 $m = 4$ IH26 $m = 4$ IH27 $m = 4$ IH27 $m = 4$ IH28 $m = 4$ IH28 $m = 4$ IH29 $m = 4$ IH38 $m = 4$ IH40 $m = 4$ 

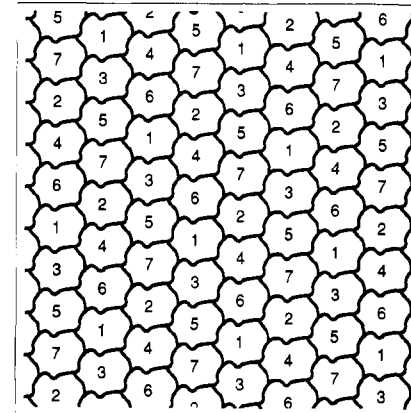
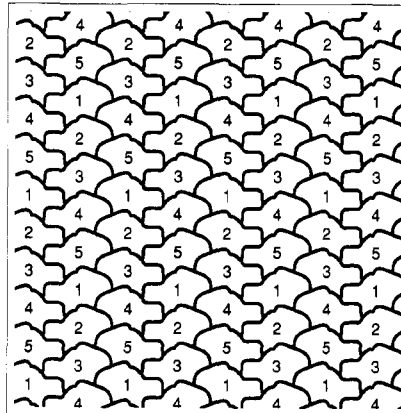
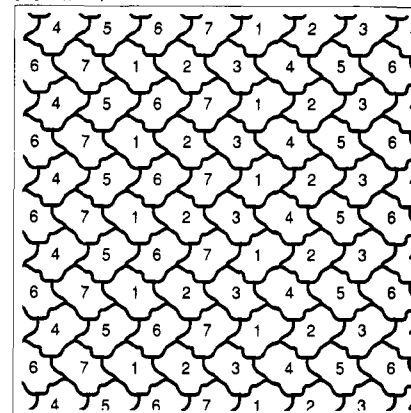
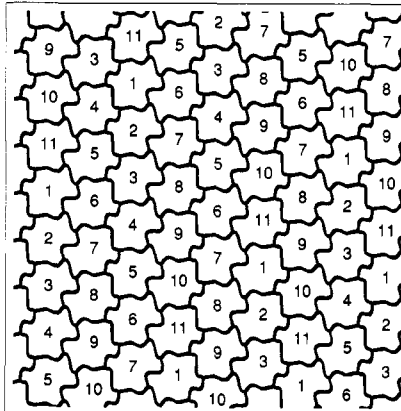
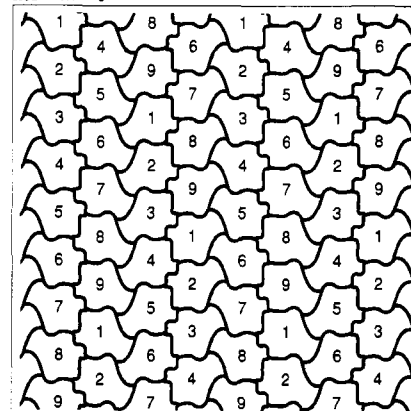
FIGURE 11

Super colourings using a maximum number of colours of all 86 types of isohedral tilings other than the seven types for which superb colourings are possible shown in Figure 9.

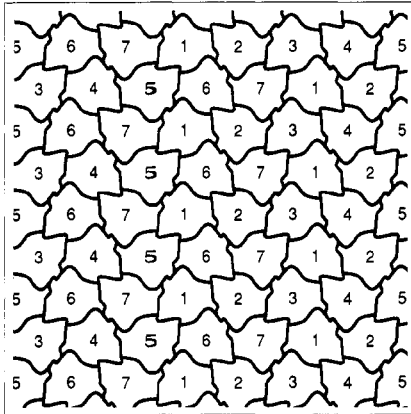
Pages 67 to 74.

Les super coloriations employant un nombre maximum de couleurs pour tous les 86 types de pavages isoédriques autres que les sept types pour lesquels il est possible de construire des superbes coloriations illustrés à la figure 9.

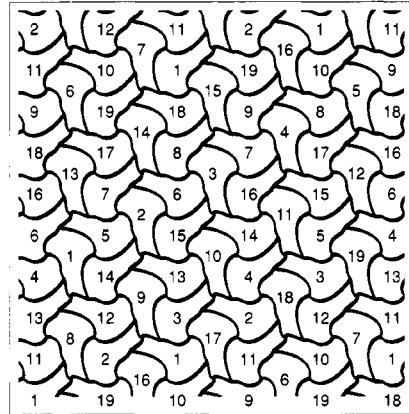
Pages 67 à 74.

IH1 $M = 7$ IH2 $M = 5$ IH3 $M = 7$ IH4 $M = 11$ IH5 $M = 9$ 

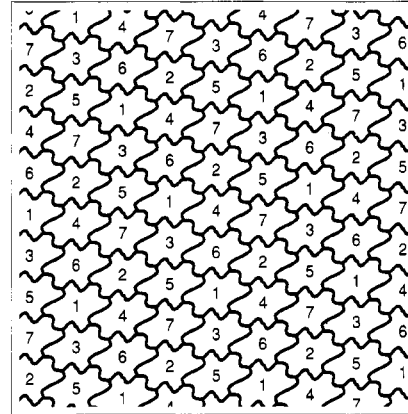
IH6 M=7



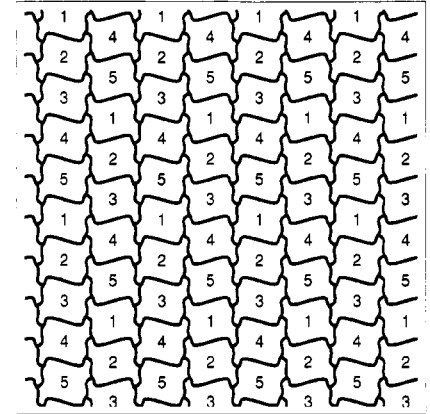
IH7 M=19



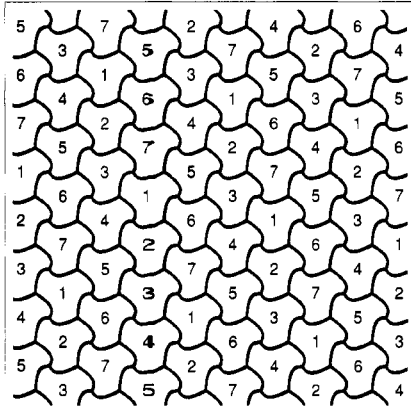
IH8 M=7



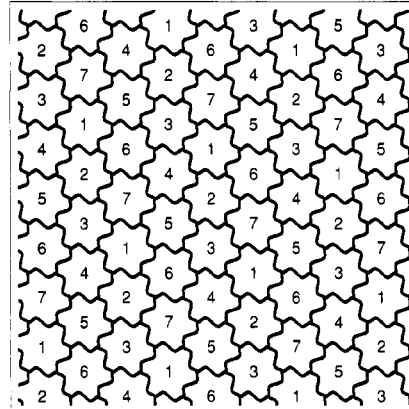
IH9 M=5



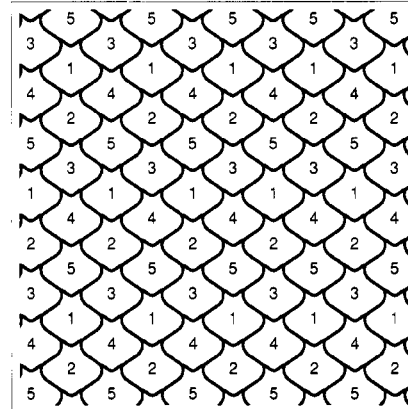
IH10 M=7



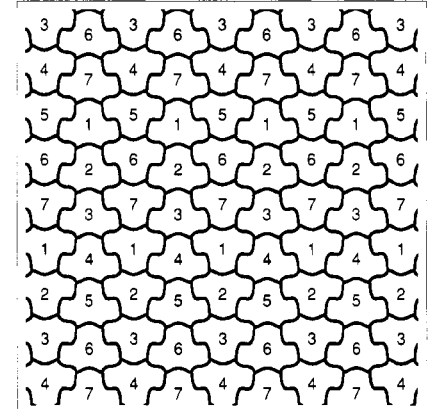
IH11 M=7



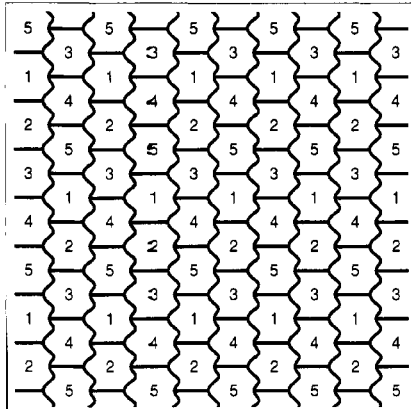
IH12 M=5



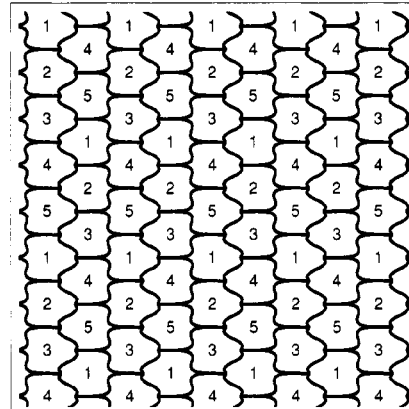
IH13 M=7



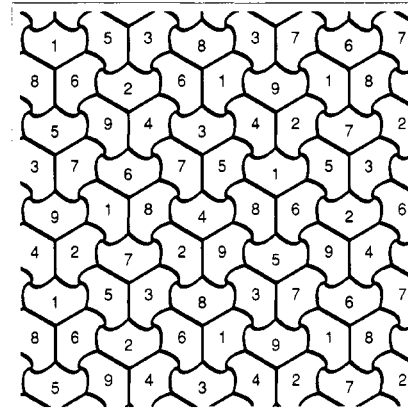
IH14 M=5



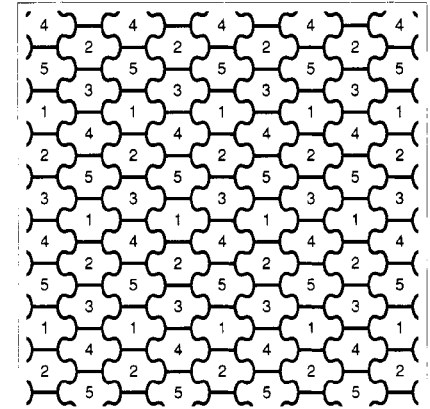
IH15 M=5

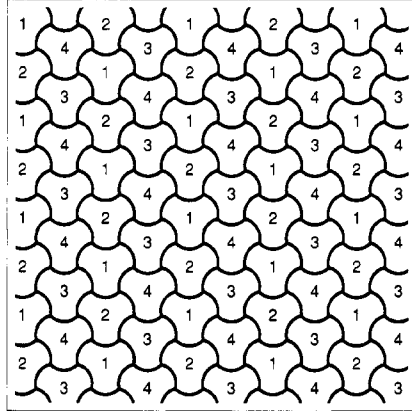
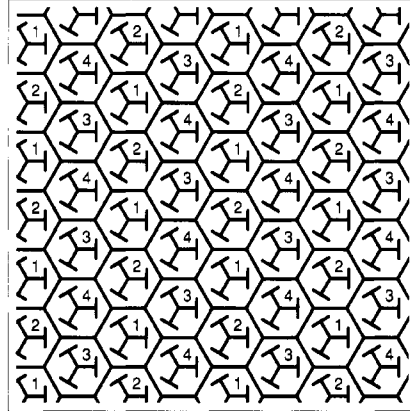
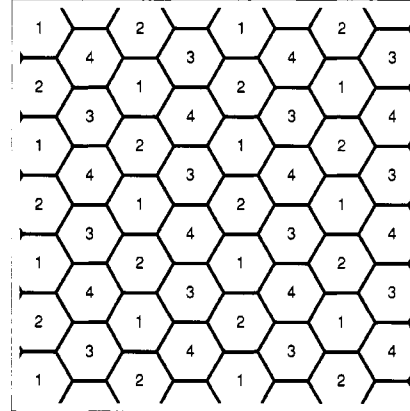
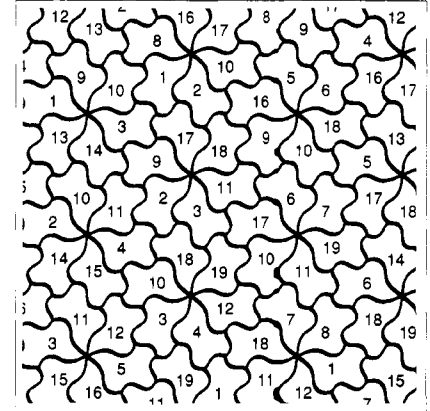
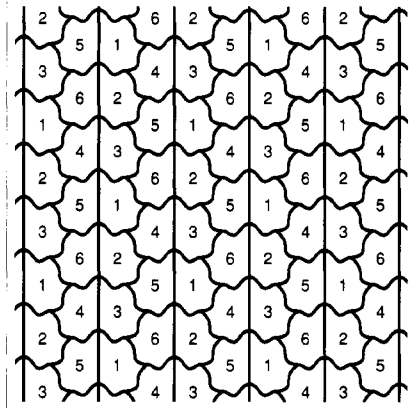
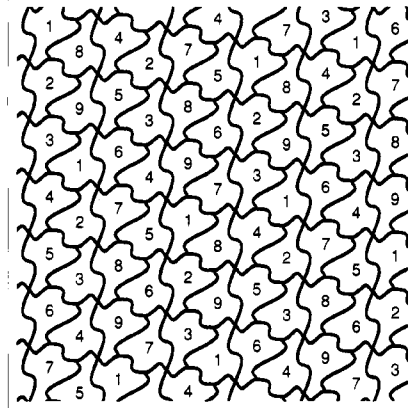
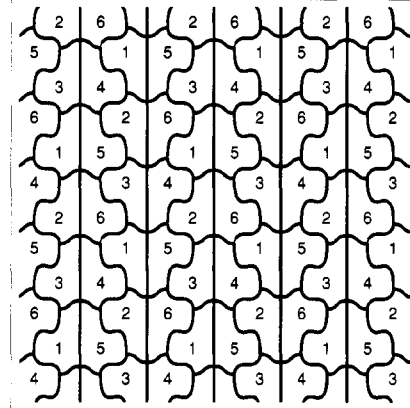
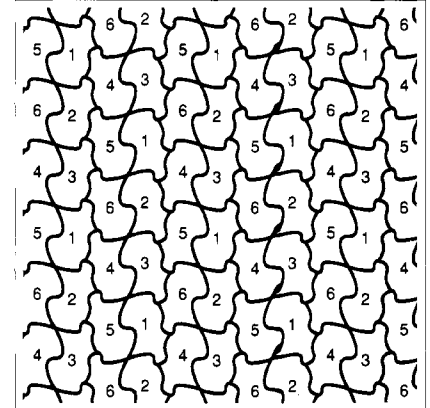
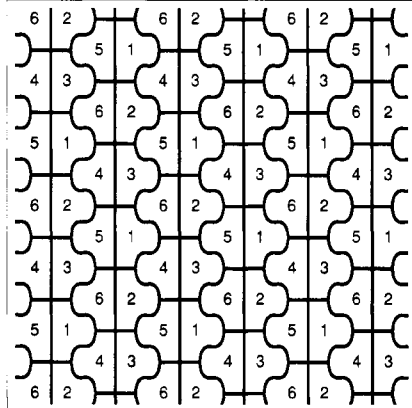
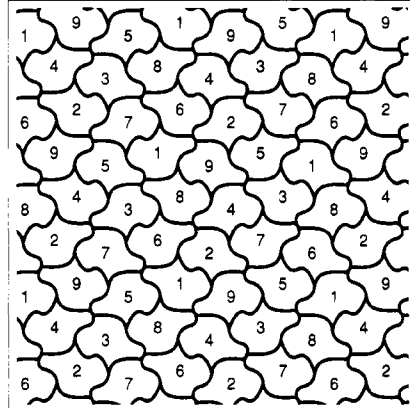
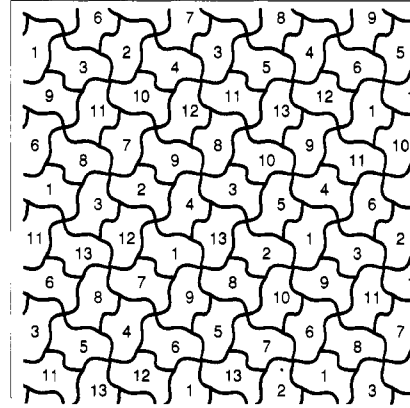
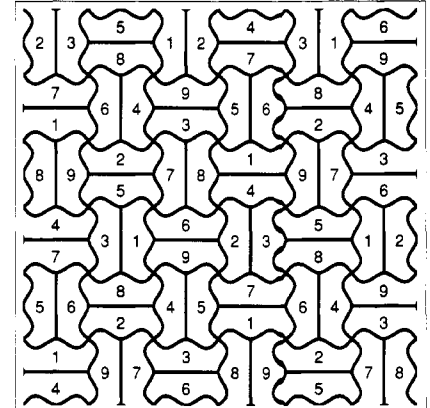


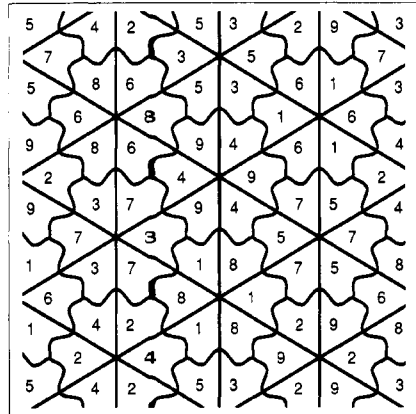
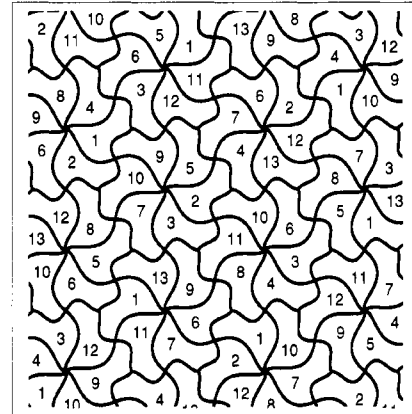
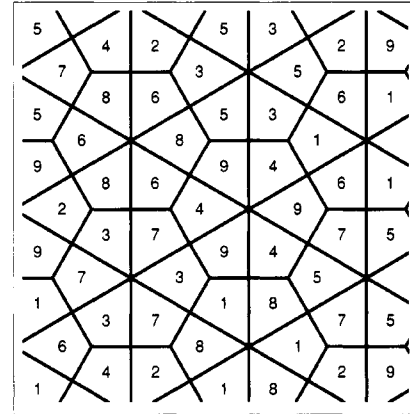
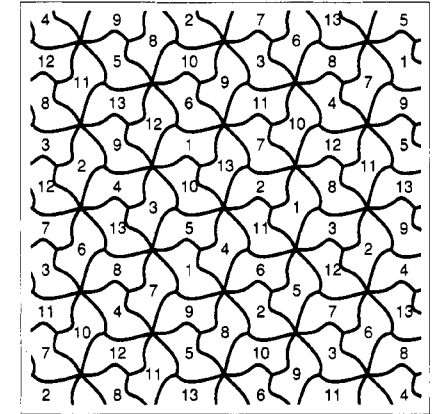
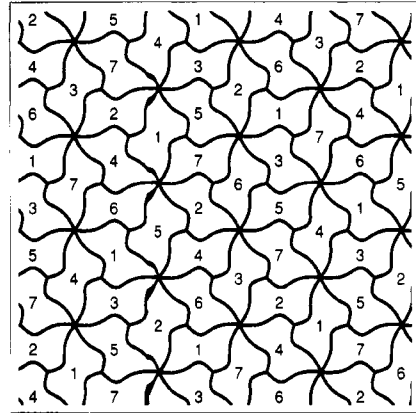
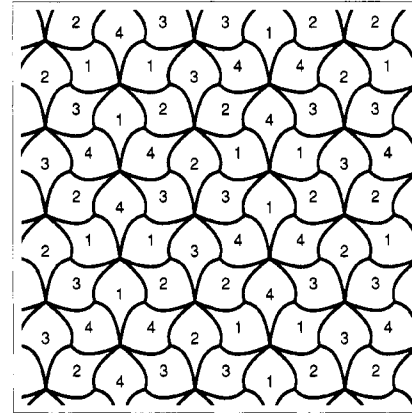
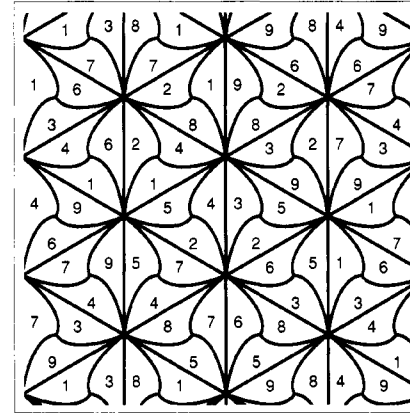
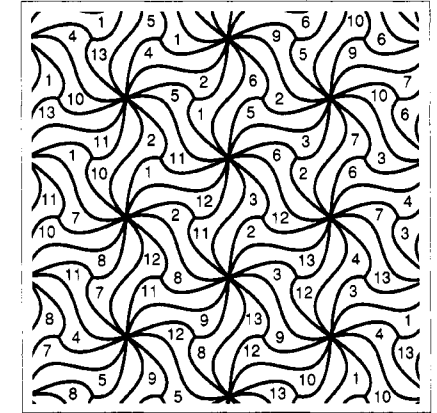
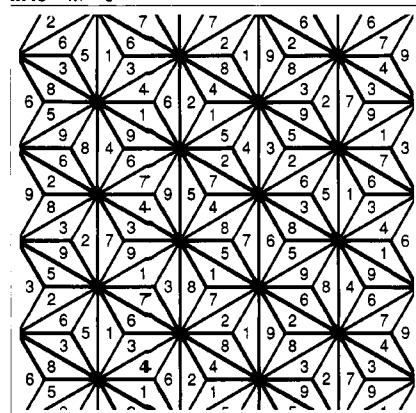
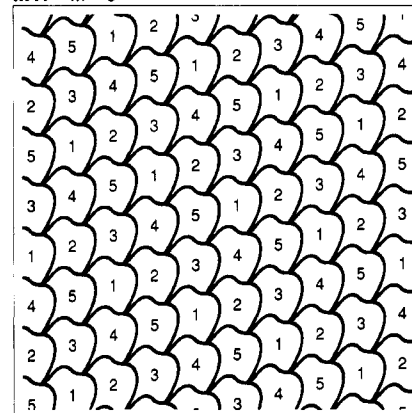
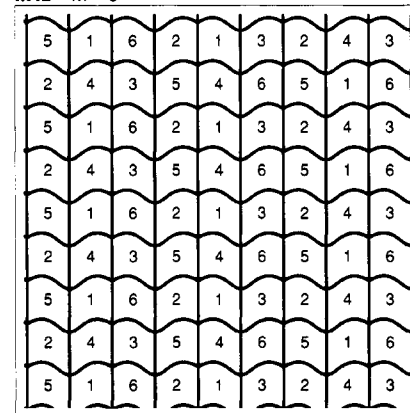
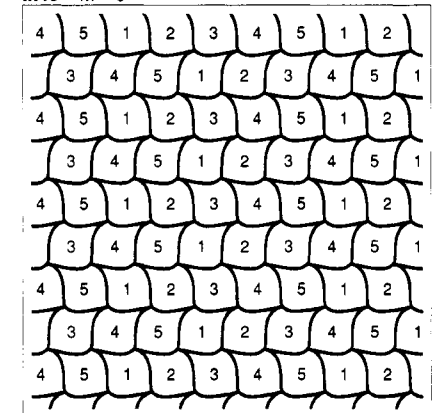
IH16 M=9

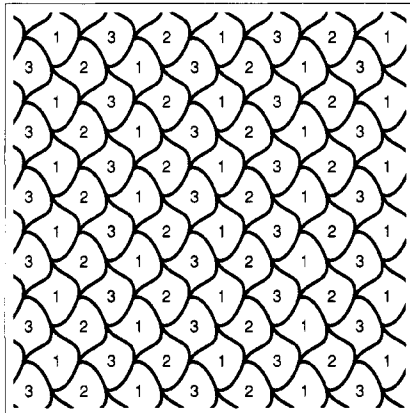
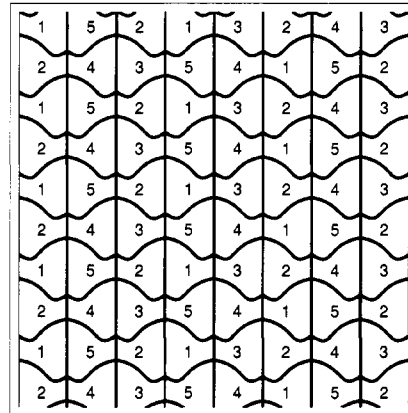
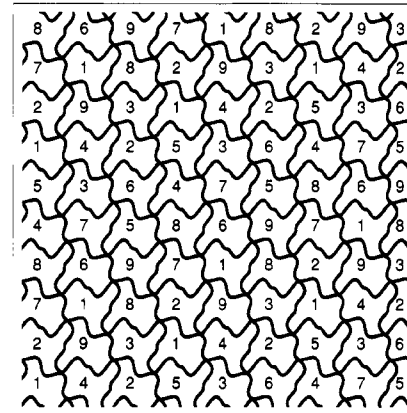
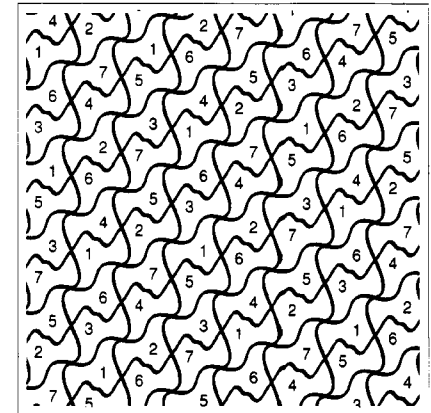
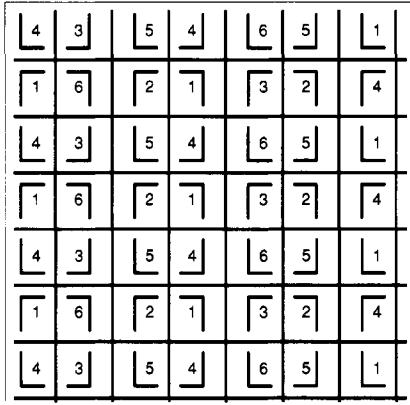
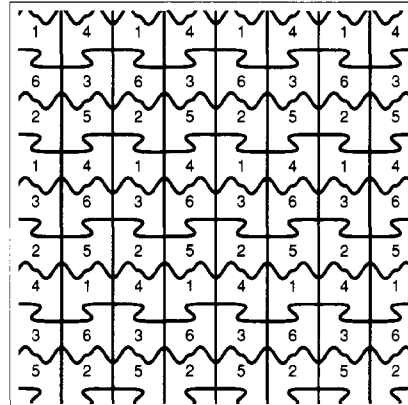
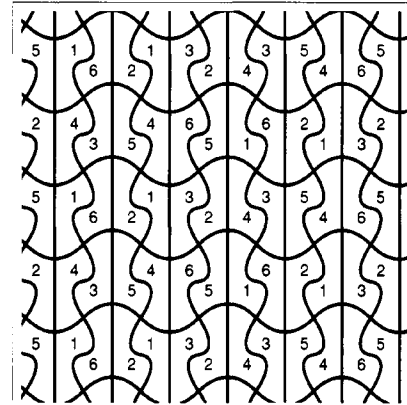
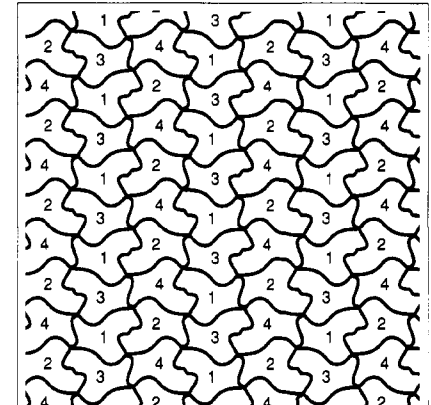
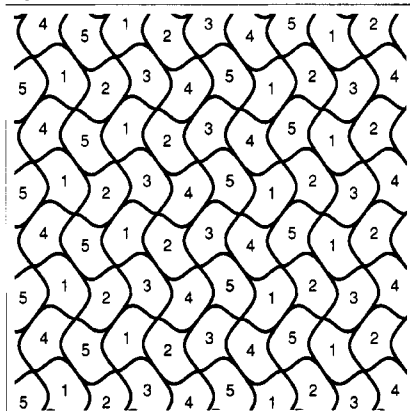
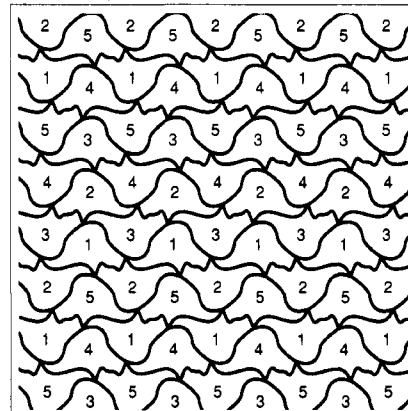
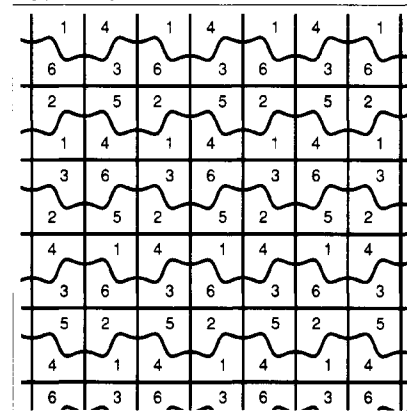
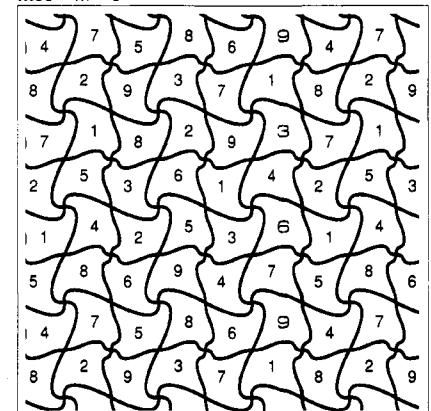


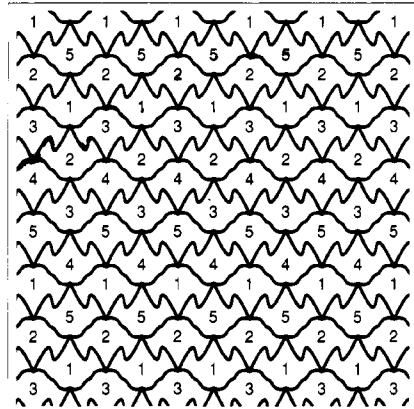
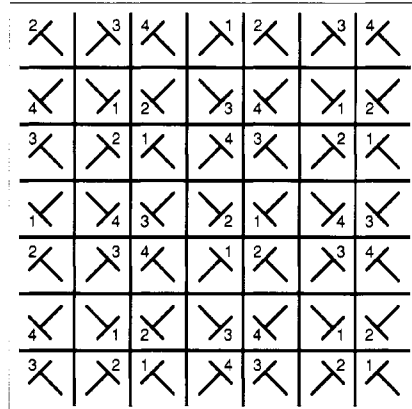
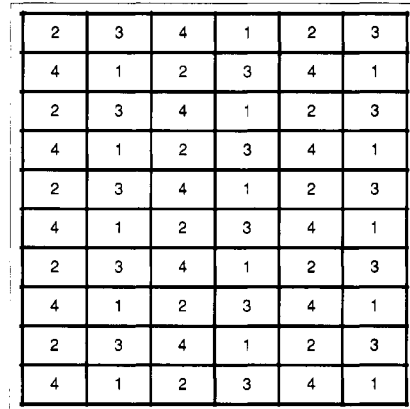
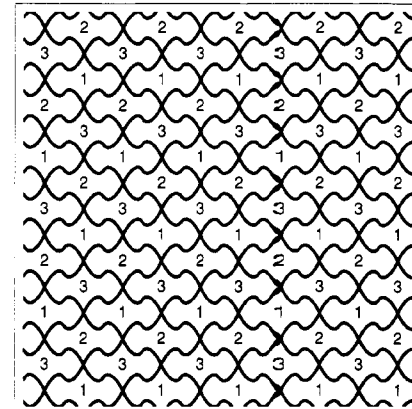
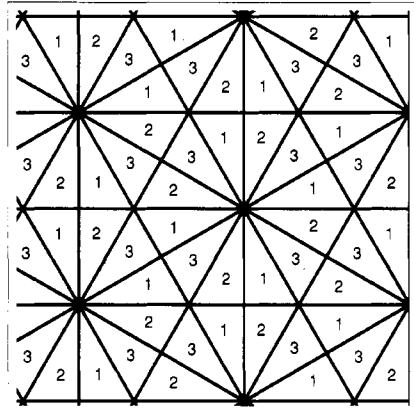
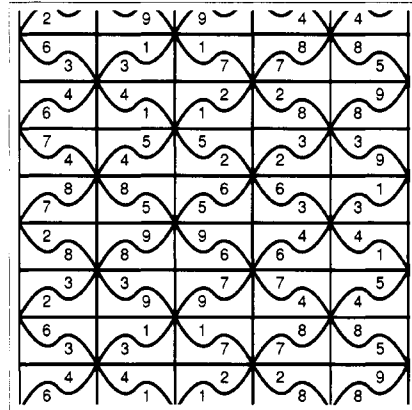
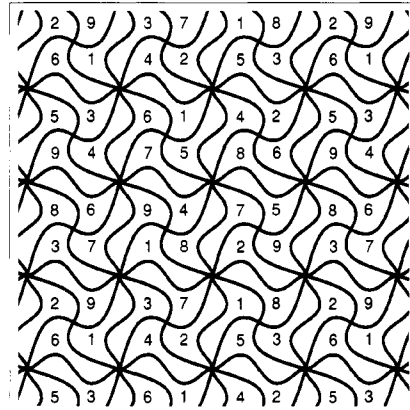
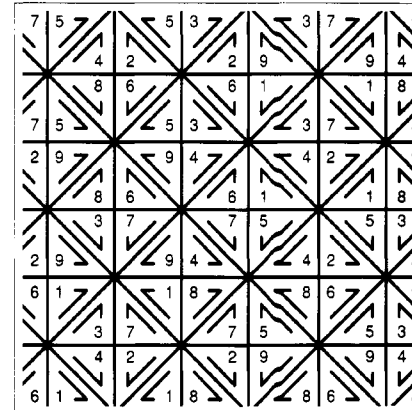
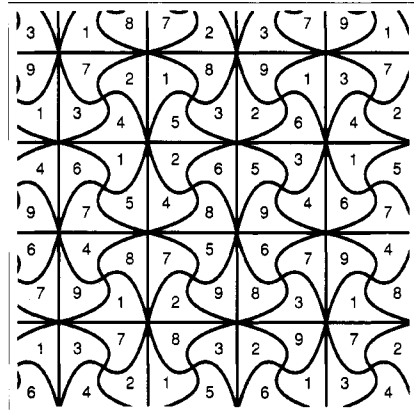
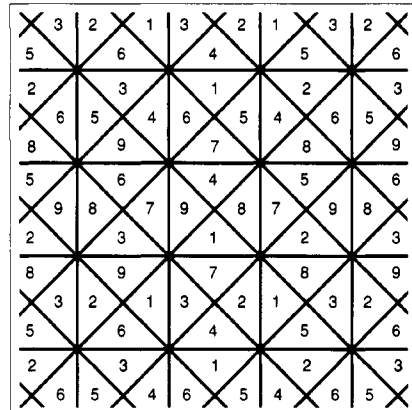
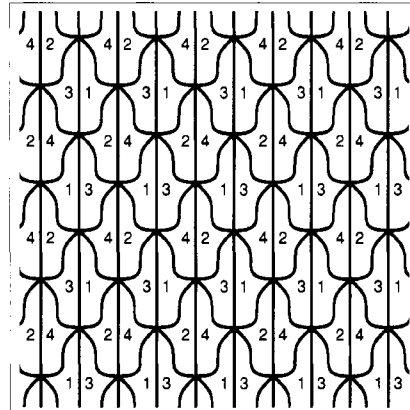
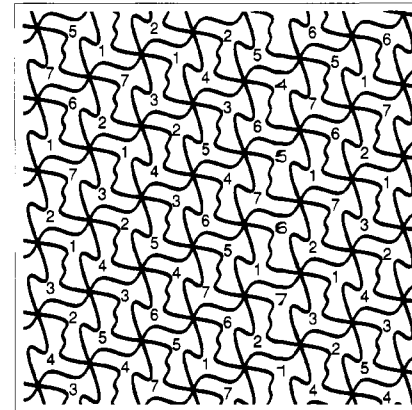
IH17 M=5



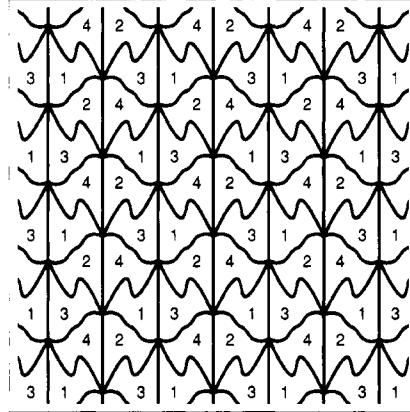
IH18 $M=4$ IH19 $M=4$ IH20 $M=4$ IH21 $M=19$ IH22 $M=6$ IH23 $M=9$ IH24 $M=6$ IH25 $M=6$ IH26 $M=6$ IH27 $M=9$ IH28 $M=13$ IH29 $M=9$ 

IH30 $M=9$ IH31 $M=13$ IH32 $M=9$ IH33 $M=13$ IH34 $M=7$ IH36 $M=4$ IH38 $M=9$ IH39 $M=13$ IH40 $M=9$ IH41 $M=5$ IH42 $M=6$ IH43 $M=5$ 

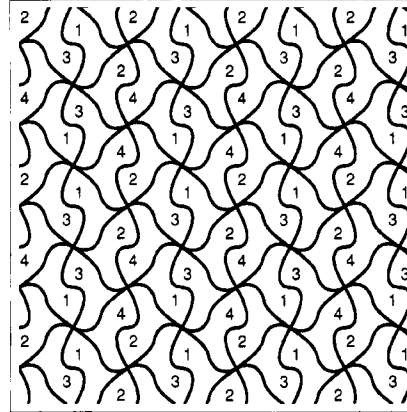
IH44 $M=3$ IH45 $M=5$ IH46 $M=9$ IH47 $M=7$ IH48 $M=6$ IH49 $M=6$ IH50 $M=6$ IH51 $M=4$ IH52 $M=5$ IH53 $M=5$ IH54 $M=6$ IH55 $M=9$ 

IH69 $M=5$ IH70 $M=4$ IH72 $M=4$ IH74 $M=3$ IH77 $M=3$ IH78 $M=9$ IH79 $M=9$ IH80 $M=9$ IH81 $M=9$ IH82 $M=9$ IH83 $M=4$ IH84 $M=7$ 

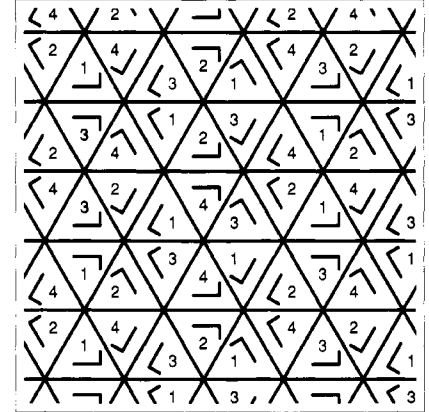
IH85 M = 4



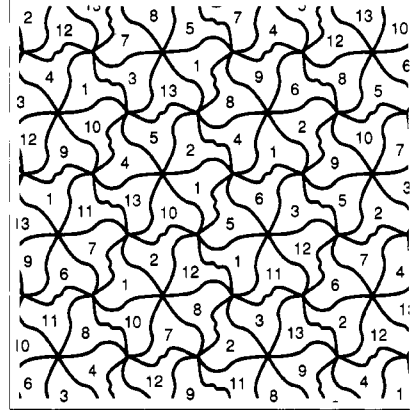
IH86 M = 4



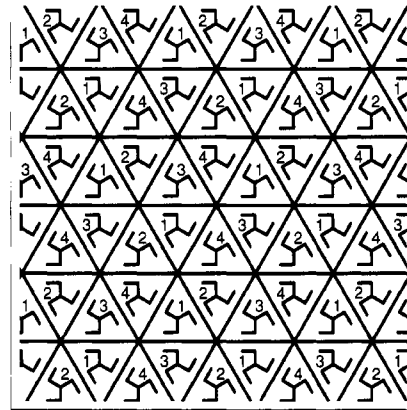
IH87 M = 4



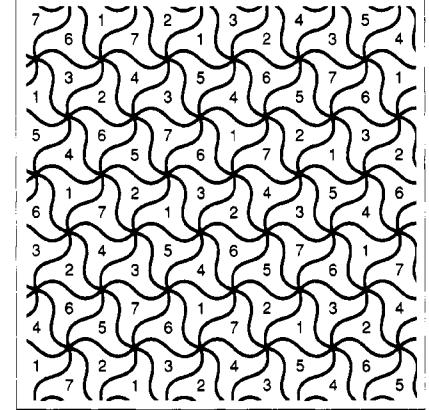
IH88 M = 13



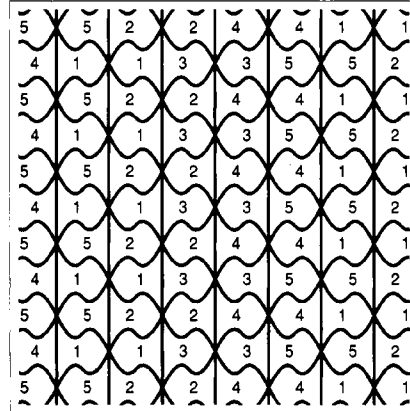
IH89 M = 4



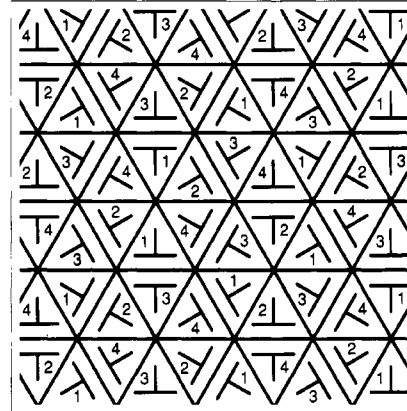
IH90 M = 7



IH91 M = 5



IH92 M = 4



IH93 M = 4

