Polytaxic Polygons

by George E. Martin

Résumé Topologie structurale #12, 1986

Les polygones polytaxiques

Habituellement, un protopavé est dit m-morphique si des copies congruentes du protopavé pavent le plan d'exactement m façons non congruentes. Il existe des protopavés r-morphiques connus pour $r \leq 10$. Ici, un protopavé est défini comme étant t-taxique si des copies directement congruentes du protopavé pavent le plan d'exactement t façons non directement congruentes; un protopavé est appelé p-poïque si des copies directement congruentes du protopavé pavent le plan d'exactement p façons non congruentes. De nombreux exemples sont fournis, dont des polyominos 7-poïques et un polyomino 8-taxique.

Abstract Structural Topology #12, 1986

It is customary to say a prototile is $2m$-morphic if congruent copies of the prototile tile the plane in exactly m noncongruent ways. There are known r-morphic prototiles for $r \leq 10$. A prototile is defined here to be t-taxic if directly congruent copies of the prototile tile the plane in exactly t not directly congruent ways; a prototile is called p-poic if directly congruent copies of the prototile tile the plane in exactly p noncongruent ways. Numerous examples are given, including 7-poic polyominoes and one 8-taxic polyomino.

Sommaire pour les non-mathématiciens

Lors d'une tentative de pavage du plan avec un polygone donné, est-il permis d'inverser le polygone? De lui faire subir une rotation? Même lorsque les règles à suivre pour disposer les copies d'un polygone afin de créer un pavage du plan sont fermement établies, pour déterminer le nombre de pavages possibles il faut décider quand deux pavages sont *pareils*. Cet article fournit une nomenclature pour certains aspects du problème ainsi que de nombreux exemples. Un polygone 8-taxique est étudié; des copies directement congruentes d'un tel polygone peuvent servir à créer exactement huit pavages du plan, deux pavages étant considérés distincts à moins qu'ils ne soient directement congruents.

Summary for non-mathematicians

In trying to tile the plane with a given polygon, is it permissible to turn the polygon over? May the polygon be rotated? Even with firmly established rules for the placing of copies of a polygon in forming a tiling of the plane, counting the number of such tilings that are possible requires deciding when two tilings are *the same*. Nomenclature for some aspects of the problem is provided, and numerous examples are given. An 8-taxic polygon is illustrated; directly congruent copies of such a polygon can be used to form exactly eight tilings of the plane, where two tilings are considered to be distinct unless they are directly congruent.

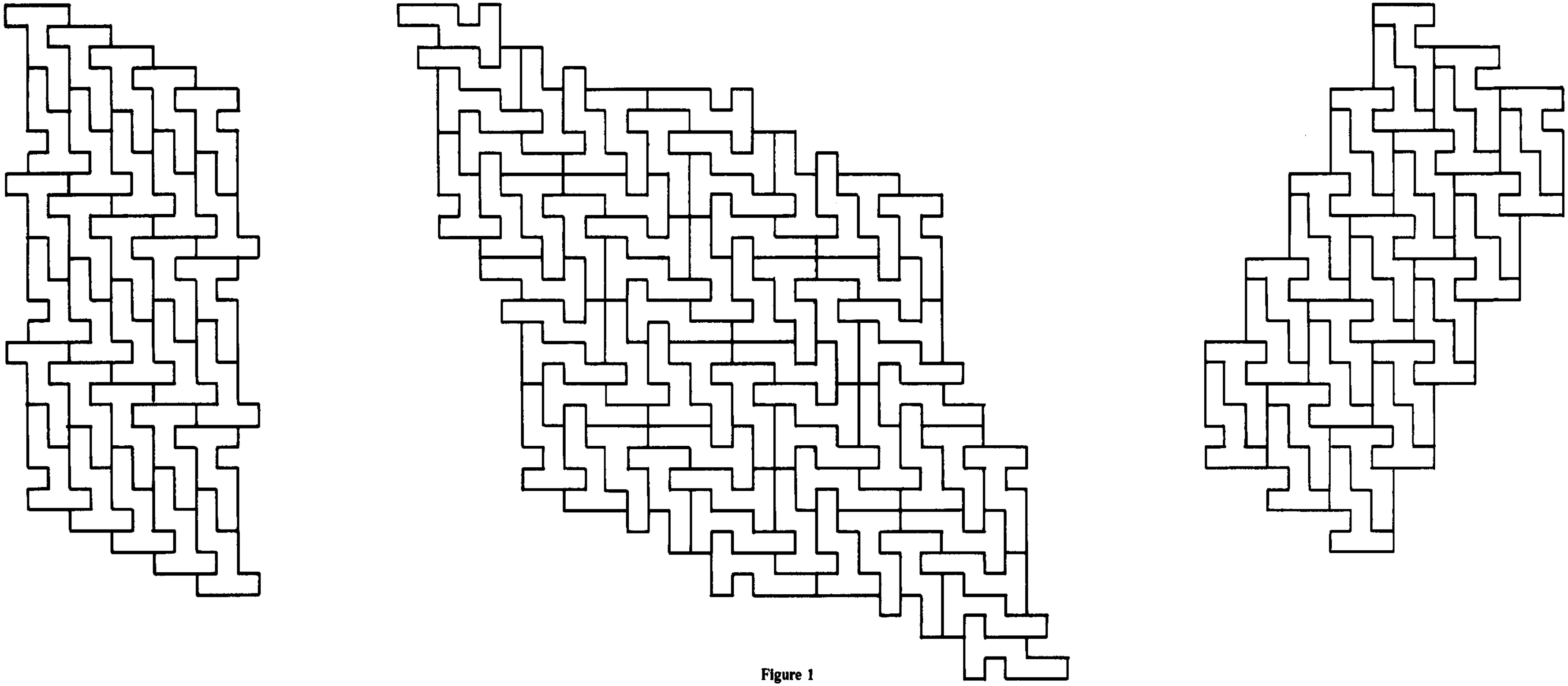


Figure 1

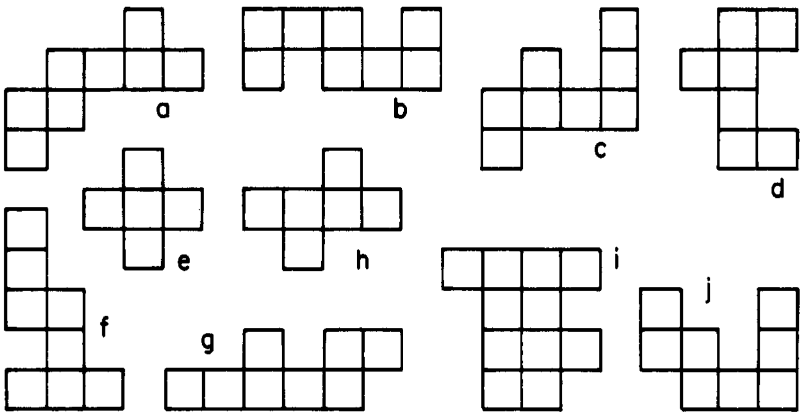
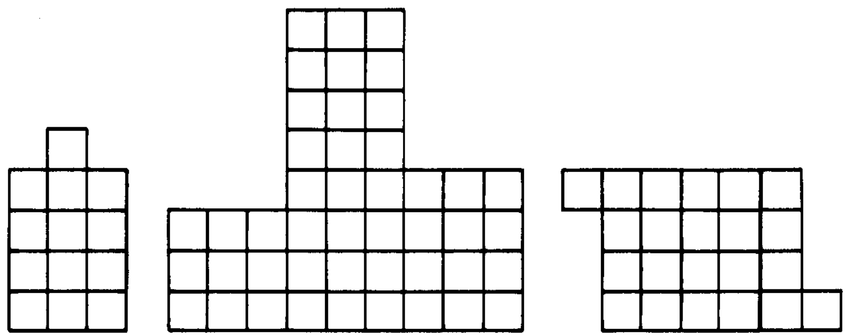


Figure 2



$B(4.5.4)$ $B(3^3 8^3 4^3)$ $Z(6,3,1,1)$

Figure 3

Il y a deux groupes impliqués dans la réponse à la question «De combien de façons un polygone donné peut-il paver le plan?» Pour créer un pavage, des images du polygone sous les éléments du groupe G sont utilisées pour recouvrir le plan mais sans que les intérieurs se chevauchent. Le groupe de translation, le groupe des isométries directes, et le groupe complet des isométries sont les groupes les plus fréquemment rencontrés. Il est à noter qu'un mouvement dans G qui superpose une image du polygone à une autre image dans le pavage n'est pas nécessairement une symétrie pour le pavage en entier. Des pavages sont considérés identiques s'ils sont équivalents sous un certain groupe H, qui peut être différent de G. Ici, nous nous restreindrons au cas où les groupes G et H appartiennent à D, le groupe des isométries directes, et à I, le groupe de toutes les isométries du plan.

Habituellement, un protopavé est appelé ***m*-morphique** si des copies congruentes du protopavé pavent le plan d'exactement m façons non congruentes, ($G = H = I$). La recherche de protopavés polymorphiques est un problème que Grünbaum et Shephard [**5, 6**] soulevèrent les premiers. Il existe des protopavés r-morphiques connus pour $r \leq 10$, [**1, 2, 3**]. Un protopavé sera dit ***t*-taxique** si des copies directement congruentes du protopavé pavent le plan d'exactement t façons non directement congruentes, ($G = H = D$). Un protopavé est appelé ***p*-poïque** si des copies directement congruentes du protopavé pavent le plan d'exactement p façons non congruentes, ($G = D, H = I$). Pour être exhaustif, nous définissons aussi un protopavé comme étant ***h*-théïque** si des copies congruentes du protopavé pavent le plan d'exactement h façons non directement congruentes, ($G = I$, $H = D$).

À titre d'illustration, la **Figure 1** montre les trois pavages non congruents du plan qui peuvent être créés avec des copies congruentes du protopavé **f** de la **Figure 2**. Ce polygone trimorphique ne comporte pas de droite de symétrie et seul le pavage du centre de la **Figure 1** nécessite à la fois des copies directes et des copies enantiomorphes du protopavé. Donc, le polygone est ditaxique et dipoïque. Aucun des pavages de la **Figure 1** ne comporte de droite de symétrie et seul le pavage du centre comporte une symétrie de miroir. Inverser le pavage du centre produit un pavage qui est directement congruent avec le pavage du centre. Inverser les deux autres pavages de la **Figure 1** produit deux pavages qui ne sont directement congruents avec aucun des trois pavages originaux. Le protopavé est donc pentathéïque.

Des exemples sont fournis au **Tableau 1**, où certaines des entrées renvoient à la **Figure 2**. Dans ce tableau, la liste a été dressée par ordre croissant de t pour les polygones t-taxiques. La validité de chaque ligne du tableau a été établie non pas à l'aide d'un ordinateur mais par la méthode fastidieuse qui consiste à répertorier jusqu'à la dernière combinaison possible tous les pavages pour le protopavé étudié.

La notation $B(a.b...z)$ au **Tableau 1** pour les protopavés qui ressemblent à des graphiques en colonnes est facilement comprise grâce aux deux exemples de la **Figure 3**. En deçà des cas de similitude, l'exemple $B(4.5.4)$ est le seul protopavé octotaxique connu et l'exemple $B(3^3 8^3 4^3)$ est le seul protopavé décamorphique connu.

Tel que décrit dans [**4**], la clef de la production de polygones polymorphiques fut les Z, un Z étant un polyomino $Z(a,b,c,d)$ obtenu à partir d'un rectangle de $a + c$ par $b + d$ dont

There are two groups related to answering the question, "How many ways does a given polygon tile the plane?" To form a tiling, images of the polygon under elements of group G are used to cover the plane completely but without overlapping interiors. The translation group, the group of direct isometries, and the full group of isometries are the groups most often encountered. Note that a motion in G that takes one image of the polygon onto another image in the tiling need not be a symmetry for the entire tiling. Tilings are then identified if they are equivalent under some group H, which may be different from G. Here we shall restrict ourselves to the case where the groups G and H are from the group D of direct isometries and the group I of all isometries of the plane.

It is customary to say a prototile is ***m*-morphic** if congruent copies of the prototile tile the plane in exactly m noncongruent ways, ($G = H = I$). The problem of finding polymorphic prototiles was introduced by Grünbaum and Shephard [**5, 6**]. There are known r-morphic prototiles for $r \leq 10$, [**1, 2, 3**]. A prototile will be said to be ***t*-taxic** if directly congruent copies of the prototile tile the plane in exactly t not directly congruent ways, ($G = H = D$). A prototile is called ***p*-poic** if directly congruent copies of the prototile tile the plane in exactly p noncongruent ways, ($G = D, H = I$). To be complete, we also define a prototile to be ***h*-theic** if congruent copies of the prototile tile the plane in exactly h not directly congruent ways, ($G = I, H = D$).

As an illustration, **Figure 1** indicates the three noncongruent tilings of the plane that can be formed from congruent copies of the prototile labeled **f** in **Figure 2**. This trimorphic polygon has no line of symmetry and only the tiling indicated in the center of **Figure 1** requires both direct copies and opposite copies of the prototile. Hence, the polygon is ditaxic and dipoic. None of the tilings of **Figure 1** has a line of symmetry and only the center tiling has an opposite symmetry. Turning over the center tiling produces a tiling that is directly congruent to the center tiling. Turning over the other two tilings of **Figure 1** produces two tilings that are not directly congruent to one of the original three. The prototile is thus pentatheic.

Examples are given in **Table 1**, where some entries refer to **Figure 2**. The listing in the table is in order of increasing t for t-taxic polygons. The validity of each line in the table was established without the aid of a computer by the tedious process of exhausting all the possible tiling combinations for the indicated prototile.

The notation $B(a.b...z)$ in **Table 1** for those prototiles looking like bar graphs is readily understood from the two examples in **Figure 3**. Up to similarity, the example $B(4.5.4)$ is the only known octataxic prototile and the example $B(3^3 8^3 4^3)$ is the only known decamorphic prototile.

As described in [**4**], the key to producing polymorphic polygons has been the Z's, where a Z is the polyomino $Z(a,b,c,d)$ obtained by starting with an $a + c$ by $b + d$ rectangle and

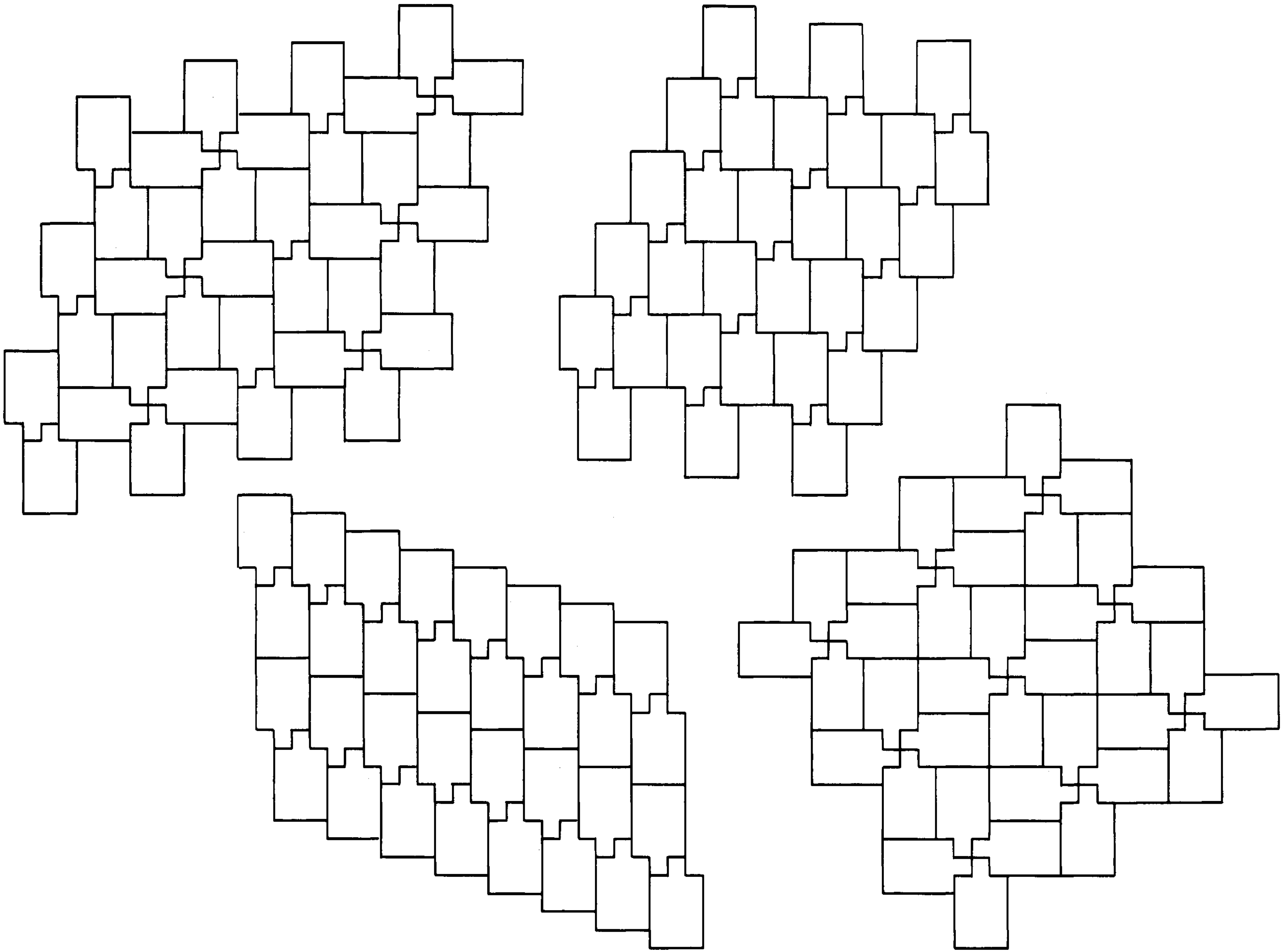


Figure 4

deux coins diagonalement opposés ont chacun été amputés d'un rectangle de b par c de sorte que le polyomino qui en résulte a des côtés consécutifs de longueurs a,b,c,d,a,b,c,d. La **Figure 3** montre $Z(6,3,1,1)$; ce Z trimorphique est ditaxique, dipoïque et pentathéïque. Les Z qui n'engendrent qu'un nombre fini de pavages sont habituellement dimorphiques et ditaxiques. Toutefois, il existe quatre autres familles connues de Z trimorphiques. Chacun des membres de la famille $Z(2c,b,c,2b)$ où $b \neq c$, $b \neq 2c$, $b \neq 3c$, $c \neq 2b$ et $c \neq 3b$ est trimorphique, ditaxique, dipoïque et hexathéïque. Chacun des membres de la famille $Z(a,a,c,c)$ où $a \neq c$, $a \neq 2c$ et $c \neq 2a$, de la famille $Z(b+c,b,c,b+c)$ où $b \neq c$, et de la famille $Z(b+c,b,c,c)$ où $b \neq c$ et $b \neq 2c$ est trimorphique, tritaxique, tripoïque et hexathéïque. Le $Z(a,1,1,a)$ monomorphique où $a > 2$ est ditaxique, monopoïque et dithéïque.

Les pavages pour le polygone 7-taxique $B(7^2 14^2 8^2)$, qui est 9-morphique et ne comporte pas de droite de symétrie, sont donnés dans [3]. Les quatre pavages non congruents créés à partir de copies congruentes de $B(4.5.4)$ sont reproduits à la **Figure 4**. Aucun de ces pavages n'est fixé par une symétrie de miroir, mais le protopavé lui-même comporte une droite de symétrie. Donc, les quatre pavages de la **Figure 4** ainsi que ceux obtenus par le retournement de chacun d'eux constituent un ensemble de huit pavages, aucune paire de ceux-ci n'étant directement congruents. Le protopavé est 4-poïque mais 8-taxique.

removing the b by c rectangle from each of two diagonally opposite corners such that the resulting polyomino has consecutive sides of lengths a,b,c,d,a,b,c,d. **Figure 3** shows $Z(6,3,1,1)$; this trimorphic Z is ditaxic, dipoic, and pentatheic. Those Z's that tile in only a finite number of ways are usually dimorphic and ditaxic. However, four other families of trimorphic Z's are known. Each member of the family $Z(2c,b,c,2b)$ with $b \neq c$, $b \neq 2c$, $b \neq 3c$, $c \neq 2b$ and $c \neq 3b$ is trimorphic, ditaxic, dipoic, and hexatheic. Each member of the family $Z(a,a,c,c)$ with $a \neq c$, $a \neq 2c$ and $c \neq 2a$, the family $Z(b+c,b,c,b+c)$ with $b \neq c$, and the family $Z(b+c,b,c,c)$ with $b \neq c$ and $b \neq 2c$ is trimorphic, tritaxic, tripoic, and hexatheic. Monomorphic $Z(a,1,1,a)$ with $a > 2$ is ditaxic, monopoic, and ditheic.

The tilings for the 7-taxic polygon $B(7^2 14^2 8^2)$, which is 9-morphic and does not have a line of symmetry, are given in [3]. The four noncongruent tilings formed from congruent copies of $B(4.5.4)$ are indicated in **Figure 4**. None of these tilings is fixed by an opposite isometry, but the prototile itself does have a line of symmetry. Hence, the four tilings of **Figure 4** together with those obtained by turning over each of these four constitute a set of eight tilings, no two of which are directly congruent. The prototile is 4-poic but 8-taxic.

Références — References

1. A. Fontaine and G.E. Martin, *Tetramorphic and Pentamorphic Prototiles*, J. Combin. Theory Ser. A, 34 (1983), 115-118.
2. ——, *Polymorphic Prototiles*, J. Combin. Theory Ser. A, 34 (1983), 119-121.
3. ——, *An Enneamorphic Prototile*, J. Combin. Theory Ser. A, 37 (1984), 195-196.
4. ——, *Polymorphic Polyominoes*, Math. Mag., 32 (1984), 275-283.
5. B. Grünbaum and G.C. Shephard, *Patch-Determined Tilings*, Math. Gaz., 61 (1977), 31-38.
6. ——, *Some Problems on Plane Tilings*, The Mathematical Gardner (D.A. Klarner, ed.), 167-196, Wadsworth, Belmont, 1981.

Table 1 — Tableau 1

m	t	p	h	Prototile • protopavé	m	t	p	h	Prototile • protopavé	m	t	p	h	Prototile • protopavé	m	t	p	h	Prototile • protopavé
1	0	0	1	$B(1.2.1^2.2)$	3	2	2	6	$B(2.1^2.3)$	6	4	4	12	$B(2.3.4.5^5)$	3	6	3	6	$B(3.2.3)$
1	0	0	2	Figure 2a	4	2	2	6	Figure 2g	7	4	4	14	$B(4.5.6^6)$	6	6	6	12	$B(4^4 28^4 21^4 14^4 7^4)$
1	1	1	1	$B(1.2.1^2.2.1)$	∞	2	2	∞	Figure 2h	8	4	4	16	$B(4.5.6^7)$	7	6	6	13	$B(4^4 15^4 10^4 5^4)$
1	1	1	2	Figure 2b	2	3	2	3	$Z(2,1,1,2)$	9	4	4	18	$B(4^3 2^3 8^3)$	8	6	6	16	$B(2^2 10^2 5^2)$
2	1	1	3	Figure 2c	3	3	3	6	$B(1.2.1.3)$	∞	4	4	∞	$B(1.2.4.5^2)$	10	6	6	19	$B(3^3 8^3 4^3)$
2	1	1	4	$B(1.2.1^3.2)$	4	3	3	7	Figure 2i	5	5	5	10	$B(1.8^5.4^5)$	∞	6	6	∞	$Z(2,2,1,1)$
∞	1	1	∞	Figure 2d	∞	3	3	∞	$Z(2,3,1,1)$	6	5	5	12	$B(4^3 1^4 9^4)$	7	7	7	14	$B(1^2.2.3.4)$
1	2	1	2	Figure 2e	2	4	2	4	$B(1.5.1)$	7	5	5	13	$B(4.1.6)$	9	7	7	18	$B(7^2 14^2 8^2)$
2	2	2	4	$B(1^2.4.1)$	4	4	4	8	Figure 2j	7	5	5	14	$B(2^2 1^2 7^2)$	∞	7	7	∞	$B(4^3 1^4 6^4)$
3	2	2	5	Figure 2f	5	4	4	10	$B(3.2.10)$	∞	5	5	∞	$B(2.1^2.4^2)$	4	8	4	8	$B(4.5.4)$

Adresse de l'auteur:

George E. Martin
Department of mathematics and statistics
State University of New York at Albany
Albany, New York, 12222, U.S.A.

Address of the author:

George E. Martin
Department of Mathematics and Statistics
State University of New York at Albany
Albany, New York, 12222, U.S.A.