

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE FLUJOS LAMINARES CON ESTRUCTURA TRIDIMENSIONAL AXIALSIMÉTRICA. ANÁLISIS DE DIFERENTES SITUACIONES

J. SALOM
A. OLIVA
M. COSTA

y

C.D. PÉREZ-SEGARRA

*Laboratori de Termodinàmica i Energètica,
Departament de Màquines i Motors Tèrmics, U.P.C.,
C/Colom, 9, 08222, Terrassa, Barcelona, España.*

RESUMEN

En el presente trabajo se implementa un algoritmo numérico basado en técnicas de diferencias finitas del tipo SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) para la resolución de las ecuaciones de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía, formuladas en coordenadas cilíndricas y para situaciones tridimensionales axialsimétricas, pudiéndose considerar regímenes permanentes y transitorios. El estudio se centra en el análisis de flujos laminares de fluidos newtonianos. En la formulación de las ecuaciones de cantidad de movimiento se han considerado, asumiendo la hipótesis de Boussinesq, los términos de fuerzas másicas; ello permite considerar casos de convección forzada, natural y natural/forzada. Para la validación del software se han resuelto situaciones con solución analítica conocida y casos para los que existen resultados experimentales y/o numéricos en la bibliografía. Se presentan diferentes resultados ilustrativos de las prestaciones de la simulación implementada y se hace referencia a posibles aplicaciones técnicas de la misma.

SUMMARY

In this work a numerical algorithm based on finite difference techniques of the kind of SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) has been implemented. This algorithm allows the solution of the conservation equations (mass, momentum and energy) in cylinder coordinates for axisymmetric three-dimensional situations. Both steady and transitory situations can be considered. The study has been focused on laminar flow and newtonian fluids. The buoyancy term in the momentum equation has been considered by means of the Boussinesq approximation; this allows to consider forced, free and a mixed convection. In order to validate the software, results from a number of situations have been compared with analytical solutions, experimental results and numerical predictions found in the literature. Different illustrative results for the performance of the simulation are presented and some possible technical applications are pointed out.

Recibido: Mayo 1993

INTRODUCCIÓN

Son frecuentes en diferentes ámbitos técnicos convecciones laminares forzadas y/o naturales en dominios con geometría circular y con estructura tridimensional axialsimétrica del flujo. Podemos mencionar, por ejemplo, convecciones forzadas en conductos circulares de sección constante o con cambio brusco de la sección, convecciones naturales y/o forzadas en recintos circulares verticales cerrados o con entradas y salidas centradas en sus caras superior e inferior, etc..

Existen algunas situaciones de flujo axialsimétrico que, con hipótesis de trabajo muy restrictivas, tienen solución analítica. Podemos mencionar casos de convección forzada en conductos circulares para la situación de flujo hidrodinámico totalmente desarrollado, flujo de Hagen-Poiseuille. Según las condiciones de contorno podemos distinguir varios casos, entre los que se encuentran como más característicos el de temperatura de pared constante y el de calor intercambiado en la pared constante. El primero de los casos mencionados se conoce como problema de Graetz y fue estudiado por vez primera por Graetz (1883) y Nusselt (1910) considerando: fluido incompresible, propiedades físicas constantes, perfil de velocidades totalmente desarrollado; y despreciando: el calor de conducción en sentido axial y los trabajos de presión y los de fricción generados por los esfuerzos cortantes. El caso de calor intercambiado constante exige para tener solución analítica el mismo tipo de hipótesis restrictivas, con la única salvedad de la condición de contorno en la pared. El desarrollo de las soluciones analíticas se describe ampliamente en la bibliografía: Eckert¹, Jakob², Isachenko³ y Kays y Perkins⁴ entre otros. Una tabulación de valores numéricos de las soluciones analíticas es descrita por Shah y London⁵ y Kays y Perkins⁴.

La resolución de situaciones que no reúnen unos niveles de simplificación del tipo de las referidas debe efectuarse en forma experimental o numérica. Langhaar y Sparrow resuelven la distribución de velocidades en un conducto de sección circular constante utilizando métodos de linealización. Los resultados de Langhaar, presentes en [4], hacen referencia a los perfiles de velocidades a diferentes distancias en la zona del desarrollo del flujo. Sparrow¹⁴ presenta también resultados de los perfiles de velocidades, tanto en un tubo circular como en un conducto formado por placas paralelas planas. Los resultados experimentales de Pfenninger de la velocidad axial en el eje de un conducto de sección circular constante son presentados por Cebeci y Bradshaw⁹.

Varios son los autores que han analizado, en base a técnicas numéricas, flujos laminares forzados en conductos. Entre ellos: Cebeci y Bradshaw⁹ resuelven el problema de convección forzada en conductos de sección circular constante; Strada et al.¹¹ estudian las velocidades y la transmisión de calor en la región térmica de entrada para flujos laminares totalmente desarrollados en conductos, partiendo de una situación general en la que los conductos pueden tener una sección arbitraria; Chilukuri y Pletcher¹³ resuelven el flujo en la región de entrada de un canal formado por placas paralelas, comparando sus resultados con los de otros autores y para un rango de números de Reynolds de 0.5 a 7500; los resultados de Hornbeck, presentados en [4] y [5], hacen referencia tanto al problema hidrodinámico como térmico, empleando un esquema de diferencias finitas.

El análisis de fenómenos de convección natural en cilindros verticales también ha

sido estudiado en forma numérica. Se puede citar a Lin y Askins⁸ que utilizan el método numérico SIMPLER para calcular la convección natural pseudo-estacionaria en el interior de un cilindro vertical y dentro de los rangos: $0.5 < L/R < 4$, $Ra < 10^7$ y $Pr = 7$; Huang y Hsieh¹⁰ estudian la convección natural laminar permanente en un recipiente cilíndrico en un rango de $10^2 < Ra < 2 \cdot 10^5$ y $1 < Pr < 200$ utilizando el método SIMPLE.

La intención de este trabajo es la de implementar un algoritmo numérico que posibilite la resolución en forma general de flujos laminares de fluidos newtonianos en dominios de sección circular (constante o no) con estructura tridimensional axialsimétrica de flujo, permitiendo analizar tanto situaciones de régimen permanente como transitorio. La formulación de las ecuaciones de cantidad de movimiento se hace, en base a la hipótesis de Boussinesq, no despreciando las fuerzas másicas, lo que posibilita considerar indistintamente situaciones de convección natural, forzada y natural/forzada. Las ecuaciones de conservación han sido discretizadas mediante un esquema numérico de primer orden, el denominado *Power-Law scheme*, presentado por Patankar⁶, aplicándose técnicas de *Gauss-Seidel*, apoyadas en TDMA (*Tri-Diagonal Matrix Algorithm*) en la resolución de los sistemas de ecuaciones algebraicas resultantes. El acoplamiento de estas ecuaciones se realiza de forma segregada mediante un algoritmo del tipo SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*) propuesto por Patankar y Spalding^{6,7}. Para la validación del software se han resuelto numéricamente situaciones con solución analítica conocida y casos para los que existen resultados experimentales y/o numéricos en la bibliografía. Se presentan diferentes resultados ilustrativos de las prestaciones de la simulación implementada y se especifican posibles aplicaciones técnicas de la misma.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA

En el análisis que se ha realizado se han considerado las siguientes hipótesis de trabajo: fluidos newtonianos en régimen laminar, sin cambio de fase y no participantes en la radiación; se desprecia la influencia de la presión sobre la temperatura y el calor de fricción generado por esfuerzos cortantes; se considera válida la hipótesis de Boussinesq —es decir, se consideran propiedades físicas constantes a excepción de las variaciones de la densidad con la temperatura en el término de fuerzas másicas en las ecuaciones de cantidad de movimiento— y se hace un tratamiento axialsimétrico y transitorio del flujo.

Ecuaciones características

Las ecuaciones características que resultan para las hipótesis mencionadas son:

—Ecuación de la continuidad

$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} (r^n v_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Ecuaciones de la cantidad de movimiento

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \rho v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} (r^n v_r) \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \beta (T - T_0) g_r$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \mu \left[\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \beta (T - T_0) g_x$$

-Ecuación de la energía

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \rho v_x \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\lambda}{c_p} r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

siendo (v_x, v_r) las velocidades, p la presión y T la temperatura del fluido analizado; ρ es la densidad, μ la viscosidad, β el coeficiente de dilatación volumétrica, g la aceleración de la gravedad y t el tiempo.

La formulación que se ha utilizado es suficientemente general para permitir poder trabajar indistintamente en coordenadas cilíndricas, haciendo $n = 1$, o en coordenadas cartesianas, haciendo $n = 0$ y siendo 'r' la coordenada 'y'.

Ecuación diferencial general

Las ecuaciones gobernantes indicadas pueden ser escritas en forma compacta mediante la denominada **ecuación diferencial general** o **ecuación de la convección-difusión**:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\rho r v_r \phi)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho r v_x \phi)}{\partial x} \right] = \frac{\Gamma}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] + S$$

Escogiendo adecuadamente la variable dependiente ϕ , el coeficiente de difusión Γ y el término fuente S , tal y como se indica en la Tabla I, esta ecuación general corresponde a las ecuaciones de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía.

Ecuación	ϕ	Γ	S
Continuidad	1	0	0
Ctd. de movimiento (r)	v_r	μ	$-\frac{\partial p}{\partial r} - \mu \frac{v_x}{r^2} + \beta(T - T_0)g_r$
Ctd. de movimiento (x)	v_x	μ	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \beta(T - T_0)g_x$
Energía	T	$\frac{\lambda}{c_p}$	0

Tabla I. Valores de ϕ , Γ y S en la ecuación diferencial general.

Condiciones de contorno

En un tratamiento tridimensional axialsimétrico de la convección, como el que se realiza en el presente estudio, es particularmente importante el tratamiento que se de a las condiciones de contorno, tanto en lo que hace referencia a la acotación del problema como a su influencia en la posterior resolución numérica (convergencia de los criterios numéricos)^{6,7,8}. Es importante, ante todo, que las velocidades normales a las fronteras de los dominios satisfagan la ecuación de continuidad. Las condiciones de contorno para velocidades en los contornos sólidos son las de adherencia (velocidad cero) mientras que en las fronteras de entrada se fija la velocidad (condición de Dirichlet). Para el tratamiento de la frontera de salida y del eje de simetría se requiere una consideración especial.

La principal dificultad en la región de salida del flujo es que no se dispone de información sobre los valores de las variables. Dos son las condiciones de contorno que se consideran:

- a) Fijar unos valores a la salida, cuidando que se cumpla continuidad global.
- b) Despreciar el término de difusión a la salida, de tal manera que no sea necesaria información sobre los valores del flujo aguas abajo^{6,14}. Matemáticamente, este tratamiento es equivalente a considerar en la salida la condición: $\partial v_r / \partial x = \partial v_x / \partial x = 0$.

La condición de simetría se modeliza haciendo que, en el eje de simetría ($r = 0$), se verifique: $v_r = \partial v_r / \partial r = 0$.

METODOLOGÍA NUMÉRICA IMPLEMENTADA

La metodología utilizada se basa en la discretización del dominio de análisis en Volúmenes de Control (*VC*) discretos y la integración sobre ellos de las ecuaciones gobernantes. La discretización se ha diseñado de forma que los puntos de la malla estén centrados sobre los *VC*. Los puntos de la malla que definen la frontera están en las caras exteriores de los *VC* situados en el contorno. La disposición de la malla se observa en la Figura 1. Además de la discretización espacial, también se establece una discretización temporal tomando incrementos finitos de tiempo Δt .

El volumen de control señalado en la Figura 1 es representado con más detalle en la Figura 2a, donde para indicar la localización del nodo central (P) y la de los nodos adyacentes (W, E, S, N), así como la localización de las caras del volumen de control (w, e, s, n), se ha utilizado la notación empleada por Patankar⁶.

La discretización bidimensional de la ecuación de la convección-difusión se hace en base a la integración de las ecuaciones sobre el volumen de control finito. Para ello es necesario relacionar el valor de la variable y de la derivada de la función en las caras del *VC*, con los valores en los puntos nodales. En el presente estudio se relacionan las variables incógnitas de las caras de los *VC* únicamente con los dos puntos vecinos, obteniéndose un esquema numérico de primer orden con el que la discretización toma

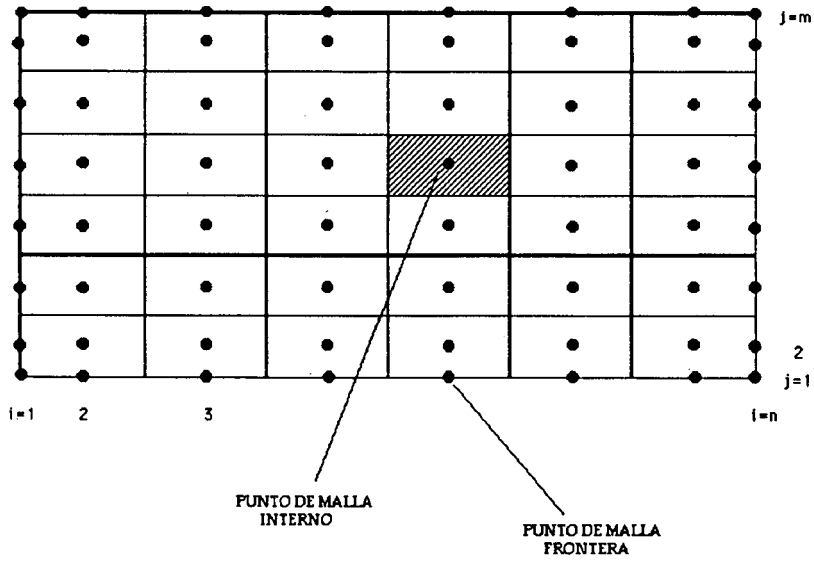


Figura 1. Corte axial en la discretización del fluido, se señala el VC general que resulta.

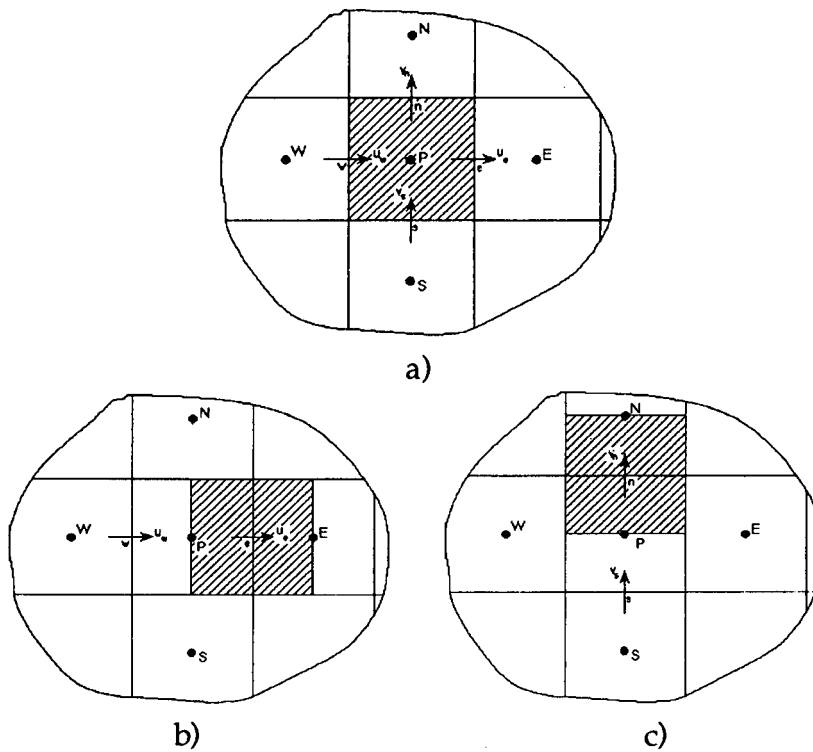


Figura 2. Detalle de los VC para calcular presiones o temperaturas (a) y velocidades (b y c).

la siguiente forma:

$$a_p \Phi_p = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b$$

donde:

$$\begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + \|\ -F_e, 0\| \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + \|\ F_w, 0\| \\ a_N &= D_n A(|P_n|) + \|\ -F_n, 0\| \\ a_S &= D_s A(|P_s|) + \|\ F_s, 0\| \\ a_p^0 &= \frac{\rho_p^0 V}{\Delta t} \\ b &= SV + a_p^0 \Phi_p^0 \\ a_p &= a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 \\ P_n &= \frac{F_n}{D_n} & P_s &= \frac{F_s}{D_s} & P_w &= \frac{F_w}{D_w} & P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ D_n &= \frac{\Gamma_n S_n}{(\delta r)_n} & D_s &= \frac{\Gamma_s S_s}{(\delta r)_s} & D_w &= \frac{\Gamma_w S_w}{(\delta x)_w} & D_e &= \frac{\Gamma_e S_e}{(\delta x)_e} \\ F_n &= (\rho v S)_n & F_s &= (\rho v S)_s & F_w &= (\rho u S)_w & F_e &= (\rho u S)_e \end{aligned}$$

Los coeficientes a_E, a_W, a_N, a_S representan la influencia de la convección y la difusión en las cuatro caras del VC.

La función $A(|P|)$ depende del esquema numérico de integración escogido. Se ha utilizado una variante del esquema exponencial que corresponde a la solución analítica para regímenes unidimensionales, denominada *Power-law*⁶, que tiene la ventaja de ser más rápida desde el punto de vista computacional. La función que lo define es:

$$A(|P|) = \|\ 0, (1 - 0.1|P|)^5 \|\$$

donde el símbolo de las dos barras indica la función *máximo*.

El método utilizado para el tratamiento de las no linealidades y el acoplamiento de las ecuaciones de Navier-Stokes y de la energía es el SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*) descrito por Patankar y Spalding^{6,7}. El SIMPLE es un método segregado para la resolución del sistema de ecuaciones, es decir, que resuelve secuencialmente y trata el acoplamiento entre la velocidad y la presión a través de una ecuación de corrección de la presión deducida a partir de la ecuación de la continuidad. Una característica importante que presenta este método es el hecho de utilizar mallas desplazadas (*staggered grid*). El cálculo de las componentes de la velocidad se realiza en los puntos situados en las caras de los VC utilizados para calcular los valores de las presiones y de las temperaturas. Las mallas desplazadas se usan porque eliminan los problemas que presenta calcular los campos de velocidades y presiones en los mismos puntos. En las Figuras 2a, 2b y 2c se observa la localización de los puntos de cálculo de las velocidades, señalados por flechas, y su desplazamiento con respecto a los puntos de la malla donde se calculan las temperaturas y las presiones, señalados con pequeños círculos.

Para la resolución de cada una de las ecuaciones se emplea un algoritmo llamado Gauss-Seidel apoyado en TDMA (*Tri-Diagonal Matrix Algorithm*), que combina un método iterativo de resolución, el Gauss-Seidel, con un método directo línea a línea, el TDMA.

Una descripción detallada del método SIMPLE puede encontrarse en el texto de Patankar⁶.

RESULTADOS

A continuación se presentan una serie de resultados numéricos obtenidos para diferentes dominios y condiciones de contorno. Algunas de las situaciones que se consideran ya están en la bibliografía resueltas en forma analítica, experimental o numérica, habiéndose escogido como referencia para la contrastación y validación de los métodos numéricos implementados. Los casos escogidos pretenden, en general, ser ilustrativos de las prestaciones de la simulación desarrollada.

Convección forzada en conductos circulares

Los conductos circulares además de ser de geometría sencilla, son también los más comúnmente utilizados en los equipos fluidicos y de transferencia de calor. Es por ello que se dispone de una gran profusión de estudios analíticos, experimentales y/o numéricos sobre este caso, haciéndolo idóneo para la contrastación y validación de los métodos numéricos implementados.

Se distinguen en general tres tipos de situaciones:

- a- Región de entrada en la que el flujo hidrodinámico y térmico se desarrollan simultáneamente.
- b- Región de flujo hidrodinámico desarrollado y flujo térmico desarrollándose.
- c- Región de flujo hidrodinámico y térmico completamente desarrollados.

Se considera que el flujo hidrodinámico y térmico están completamente desarrollados cuando ni la velocidad ni la temperatura varían con ' x ' respectivamente. Para esta situación, asumiendo un flujo laminar permanente de un fluido con propiedades físicas constantes, fuerzas másicas despreciables y presión uniforme en cada sección transversal del conducto, se dispone de la solución analítica del flujo hidrodinámico:

$$u = 2u_m \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (1)$$

donde u_m es la velocidad media del perfil de velocidades, en un cilindro horizontal de radio R .

Transferencia de calor en la región hidrodinámica desarrollada

El perfil de velocidades es el definido por la ecuación (1). Se distinguen dos situaciones diferentes según las condiciones de contorno térmicas.

– *Temperatura de pared constante*

Para este caso se conoce la solución analítica de la distribución de temperaturas que responde a una serie infinita de términos¹. El número de Nusselt se define como:

$$Nu_x = \frac{\alpha_x D}{\lambda} = \frac{q_w D}{\lambda(T_w - T_b)}$$

donde T_b en la sección que se considera es:

$$T_b = \frac{\int_S u T dS}{\int_S u dS}$$

y q_w , el flujo de calor transmitido por la pared del conducto por unidad de área.

Shah y London^{4,5} proponen la siguiente correlación algebraica de la solución analítica, en base a un número de Reynolds definido a partir de u_m ($Re = \rho u_m R / \mu$):

$$Nu_x = 1.356 \left(\frac{x^*}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} - 0.7 \quad \text{para } x^* \leq 0.04$$

$$Nu_x = 3.657 + 9.641 \left(10^3 \frac{x^*}{2}\right)^{-0.488} e^{-28.6 \frac{x^*}{2}} \quad \text{para } x^* > 0.04$$

siendo: $x^* = \frac{1}{Re Pr} \frac{x}{R}$

Para la situación asintótica, flujo térmico completamente desarrollado, el número de Nusselt toma el valor $Nu = 3.66$.

En las Figuras 3, 4 y 5 se contrasta el número de Nusselt local obtenido numéricamente, para diferentes mallas, con la solución analítica y con la correlación de Shah y London. En la Figura 6 se representa el campo de temperaturas obtenido numéricamente en la región térmica de entrada. En los resultados que se presentan se observa un ajuste notable de los valores numéricos con los datos extraídos de la bibliografía, siendo éstos tanto mejores cuanto más densa es la malla espacial con la que se trabaja.

– *Flujo de calor aportado constante*

También en este caso se dispone de solución analítica de la distribución de temperaturas¹. El número de Nusselt puede ser obtenido desde la solución analítica de la distribución de temperaturas o bien mediante la siguiente correlación algebraica de la misma presentada por Shah y London^{4,5}:

$$Nu_x = 1.64 \left(\frac{x^*}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} - 0.5 \quad \text{para } 0.0002 \leq x^* \leq 0.006$$

$$Nu_x = 4.364 + 12.33 \left(10^3 \frac{x^*}{2}\right)^{-0.506} e^{-20.5 \frac{x^*}{2}} \quad \text{para } x^* > 0.006$$

Para la situación asintótica, flujo térmico completamente desarrollado, el número de Nusselt toma el valor $Nu = 4.36$.

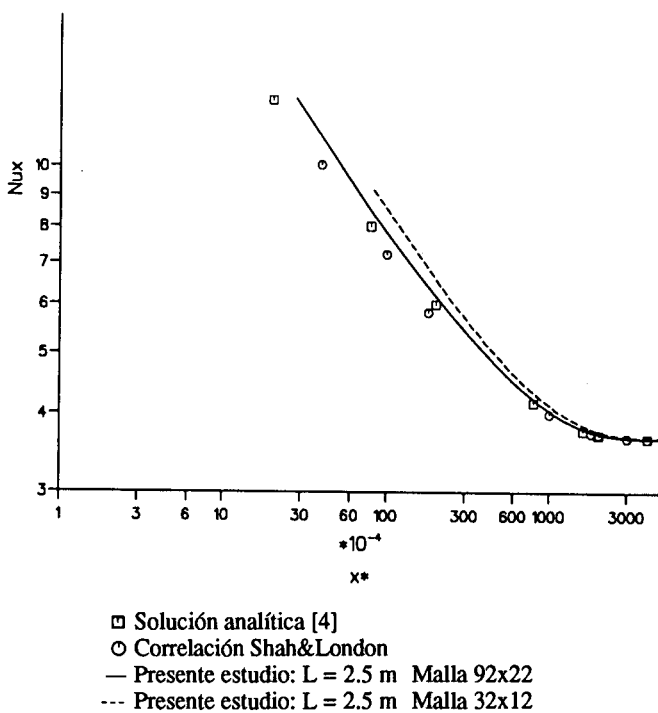


Figura 3. Resultados Nu_x vs. x^* .

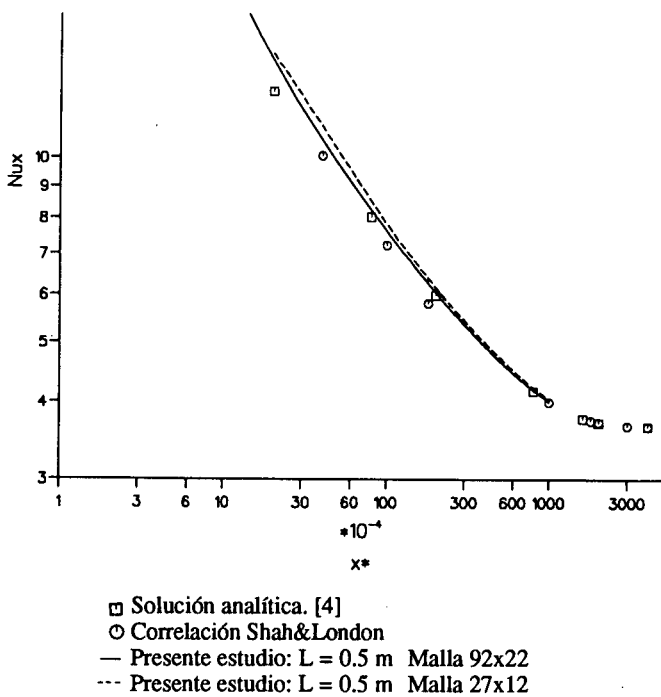


Figura 4. Resultados Nu_x vs. x^* .

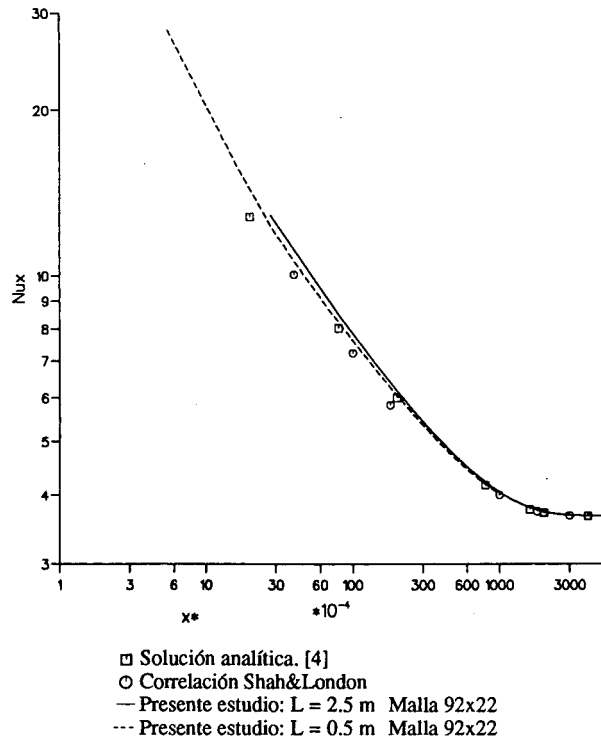


Figura 5. Resultados Nu_x vs. x^* .

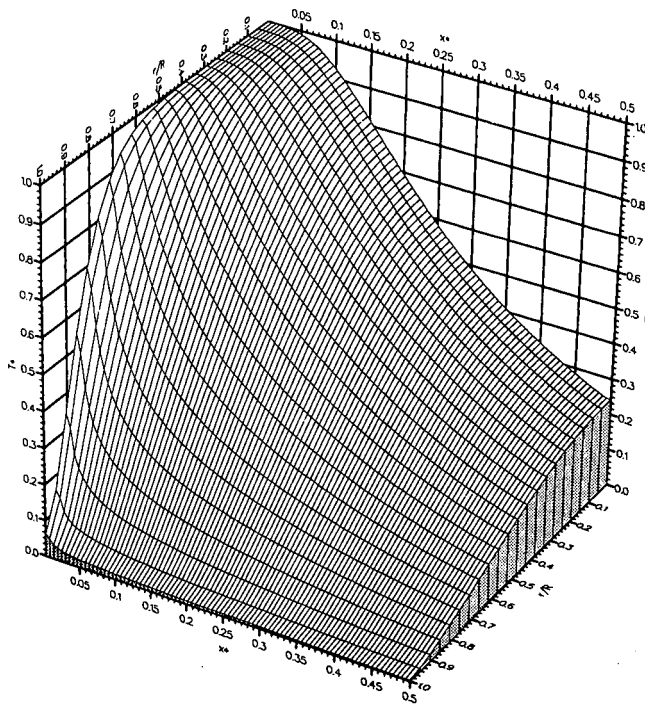
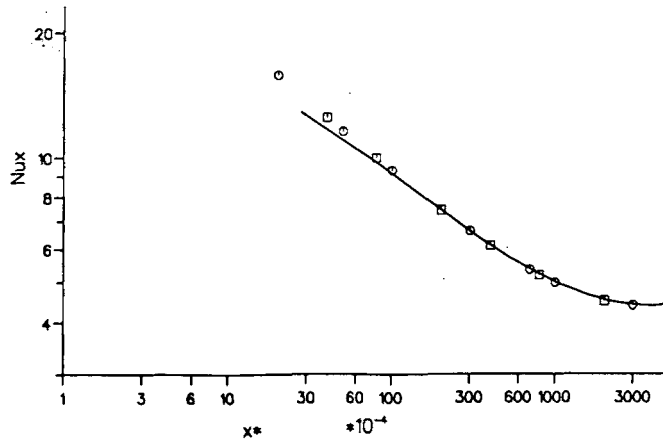


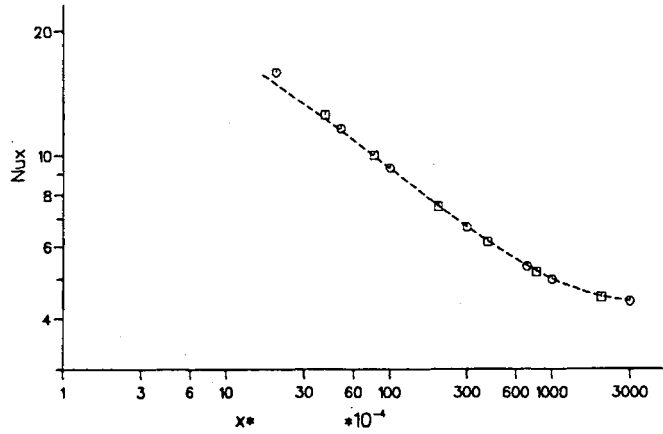
Figura 6. Representación gráfica de la solución numérica del campo de temperaturas en la región térmica de entrada. $L=2.5m$. $Re=200$. $Pr=0.5$. Malla 92×22 .

En las Figuras 7 y 8 se comparan los resultados del Nusselt local obtenidos con la simulación implementada y los correspondientes a la solución analítica y a la correlación de Shah y London. El ajuste como se observa es excelente.



□ Solución analítica. [4]
 ○ Correlación Shah&London
 — Presente estudio: L = 2.5 m Malla 92x22

Figura 7. Resultados Nu_x vs. x^* .



□ Solución analítica. [4]
 ○ Correlación Shah&London
 --- Presente estudio: L = 1.5 m Malla 92x22

Figura 8. Resultados Nu_x vs. x^* .

Transferencia de calor en la región hidrodinámica de entrada

Si se considera que la velocidad y la temperatura son uniformes a la entrada

del conducto, los campos de velocidades y temperaturas se desarrollan de manera simultánea, situación para la cual no se dispone de solución analítica.

En la Figura 9 se presenta la velocidad axial en el eje del conducto, u_{CL} , a distintas distancias adimensionales, obtenida numéricamente con el software desarrollado así como los resultados experimentales obtenidos de Pfenninger⁹. Además, para este caso se ha contrastado los resultados numéricos presentados por Cebeci y Bradshaw⁹ que se solapan con los resultados numéricos del presente estudio. En las Figuras 10 y 11 se presenta el perfil axial de velocidad para diferentes distancias en la región hidrodinámica de entrada del conducto, comparando los resultados obtenidos por la simulación realizada con la aproximación analítica de Langhaar⁴.

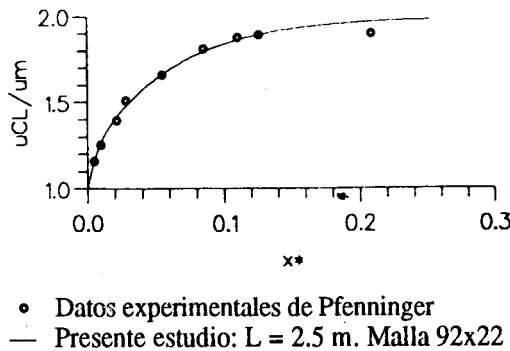
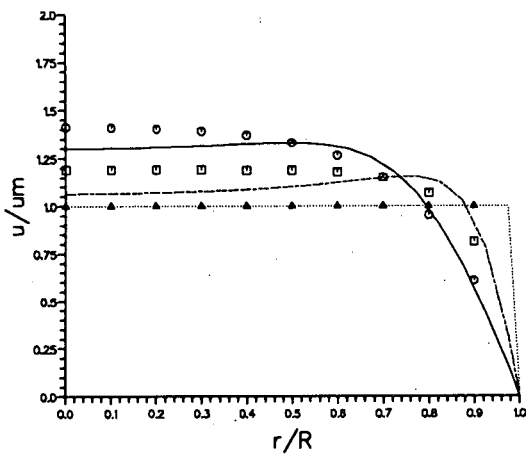
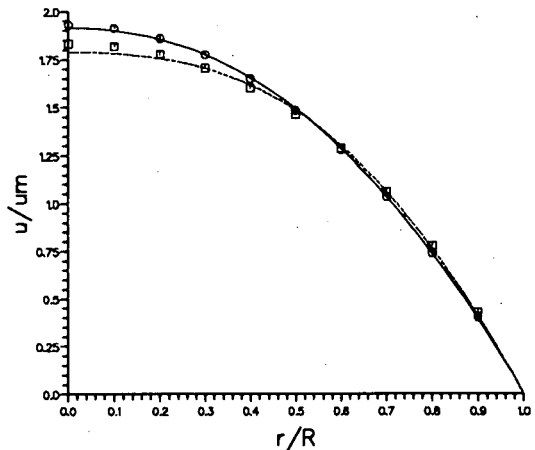


Figura 9. Resultados u_{CL}/u_m vs. x^* .



- ▲ Cálculos de Langhaar $x^*st = 0.0000$
- Presente estudio: $x^*st = 0.0000$
- Cálculos de Langhaar $x^*st = 0.0007$
- Presente estudio: $x^*st = 0.0007$
- Cálculos de Langhaar $x^*st = 0.0035$
- Presente estudio: $x^*st = 0.0035$

Figura 10. Resultados u/u_m vs. r/R .



- Cálculos de Langhaar $x^*st = 0.0210$
- Presente estudio: $x^*st = 0.0210$
- Cálculos de Langhaar $x^*st = 0.0350$
- Presente estudio: $x^*st = 0.0350$

Figura 11. Resultados u/u_m vs. r/R .

Finalmente en las Figuras 12 y 13 se presenta el número de Nusselt local en la región de entrada del conducto, para el caso de temperatura de pared constante. Se comparan los datos obtenidos numéricamente por Hornbeck con los del software implementado.

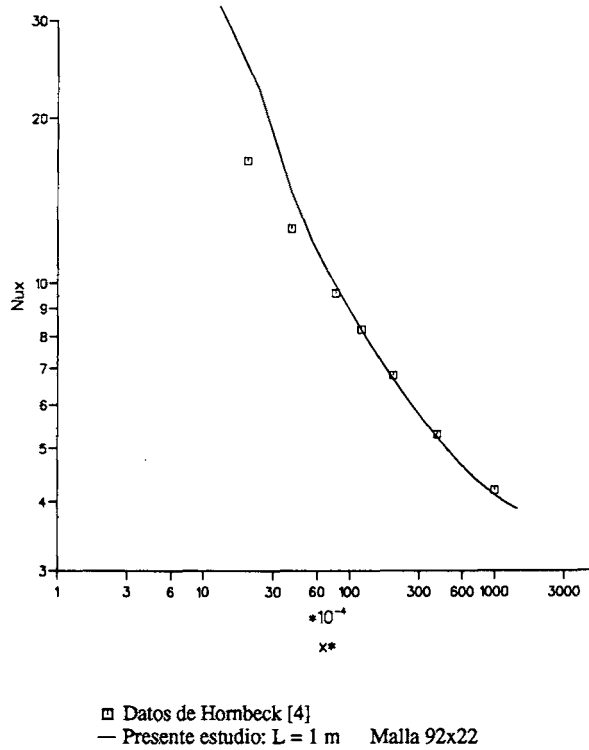


Figura 12. Resultados Nu_x vs. x^* . $Pr = 0.7$

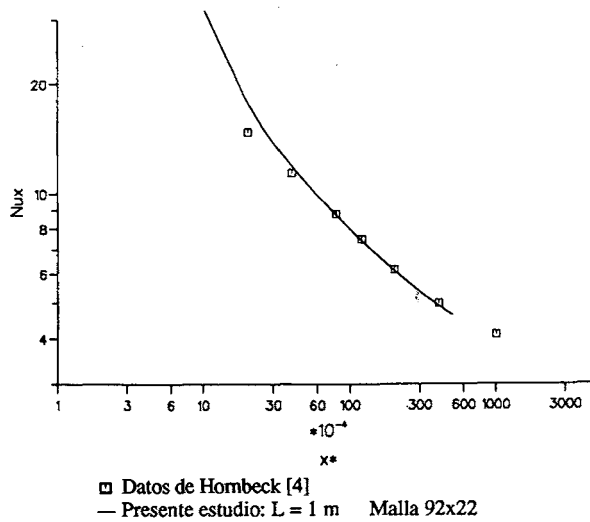


Figura 13. Resultados Nu_x vs. x^* . $Pr = 2.$

En estas figuras los resultados se han presentado en base a definir las siguientes coordenadas axiales adimensionales:

$$x^*_{st} = \frac{1}{Re_d} \frac{x}{D} ; x^* = \frac{1}{Re} \frac{x}{R}$$

donde Re_d es el número de Reynolds basado en el diámetro 'D' del conducto.

Convección forzada entre placas paralelas planas

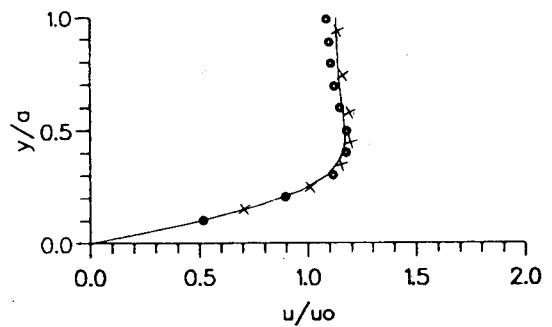
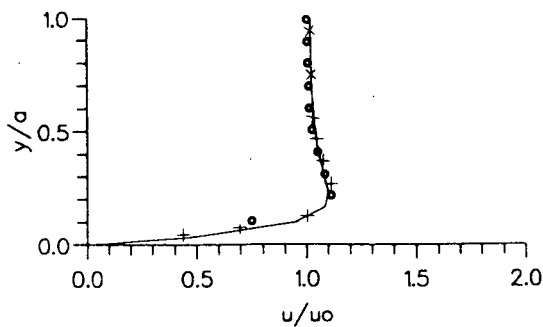
El desarrollo del flujo laminar en convección forzada entre dos placas paralelas planas es una situación que no se aviene a la condición de simetría radial y que requiere el empleo de coordenadas cartesianas. No obstante, dado que el software elaborado permite el empleo de mallas rectangulares al haber empleado una formulación general (véase el apartado referente a las ecuaciones características), se ha considerado conveniente resolver este caso por existir en la bibliografía resultados numéricos ya contrastados y que permiten hacer una validación del software.

Para este caso se define:

$$Re = \frac{\rho u_0 a}{\mu}$$

donde ' u_0 ' es la velocidad uniforme de entrada y ' a ' es la mitad de la distancia entre placas.

En las Figuras 14 y 15 se compara el perfil de velocidades adimensional axial, para las posiciones $x/a = 0.2$ y $x/a = 1.0$ respectivamente, siendo $Re = 75$. Se han contrastado los resultados numéricos del presente estudio con los obtenidos también numéricamente por Mc Donald y Denny¹² y por Chilukuri y Pletcher¹³.



- o $x/a = 0.2$ McDonald et al.
- + $x/a = 0.1989$ R. Chilukuri et al. Malla: 32 x 18.
- $x/a = 0.2$ Presente estudio Malla: 92 x 17.

- o $x/a = 1.0$ McDonald et al.
- + $x/a = 0.999$ R. Chilukuri et al. Malla: 32 x 18.
- $x/a = 1.0$ Presente estudio: Malla: 92 x 17.

Figura 14. Comparación de perfil de velocidades axial. $Re = 75$.

Figura 15. Comparación de perfil de velocidades axial. $Re = 75$.

Convección forzada en conductos circulares con entrada y salida concéntricas reducidas

La situación que se analiza es la de un fluido que circula de manera forzada por un cilindro horizontal de radio R y longitud L . Éste tiene unas aperturas coaxiales de sección circular y de radio $r' < R$, por donde entra y sale el fluido a una velocidad prefijada u_0 , Figura 16. Como condición de partida se supone el fluido en reposo y a una temperatura uniforme. La temperatura en la cara de entrada es uniforme, T_0 , y constante a lo largo del tiempo, así como en la superficie exterior del cilindro, T_w , mientras que en la sección de salida se ha considerado condición de derivada nula para la temperatura.

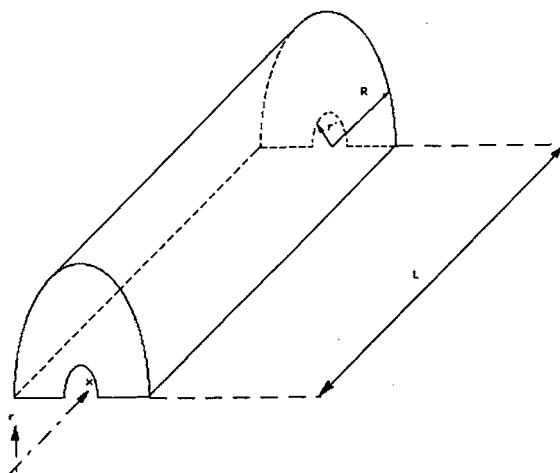


Figura 16. Dominio de análisis en el caso de convección forzada en conductos circulares con entrada y salida concéntricas reducidas.

Se define:

$$Re = \frac{\rho u_0 R}{\mu}$$

Las condiciones de cálculo son:

$R = 0.05\text{m}$	Mallas = 30×20
$L = 0.20$ y 0.25 m	$\Delta t = 0.01$ s
$r' = R/6$	$Pr = 1$
$Re = 300, 900$ y 1500	

En la Figura 17 se estudia la influencia del Número de Reynolds y se representa gráficamente las líneas de corriente en la situación de régimen permanente. Se observa como el bucle que aparece en la parte superior y cerrada del cilindro que se analiza se encuentra más desplazado hacia la zona de salida cuanto más grande es el número de Reynolds que define el caso. En las Figuras 18 y 19 se presenta la evolución temporal para una determinada situación ($Re = 300$ y $L = 0.20$ m), mediante la representación gráfica de las isothermas y las líneas de corriente; se presenta el caso de temperatura

inicial del fluido a 25°C y temperaturas de entrada del flujo y de la superficie exterior del cilindro igual a 25 y 30°C respectivamente.

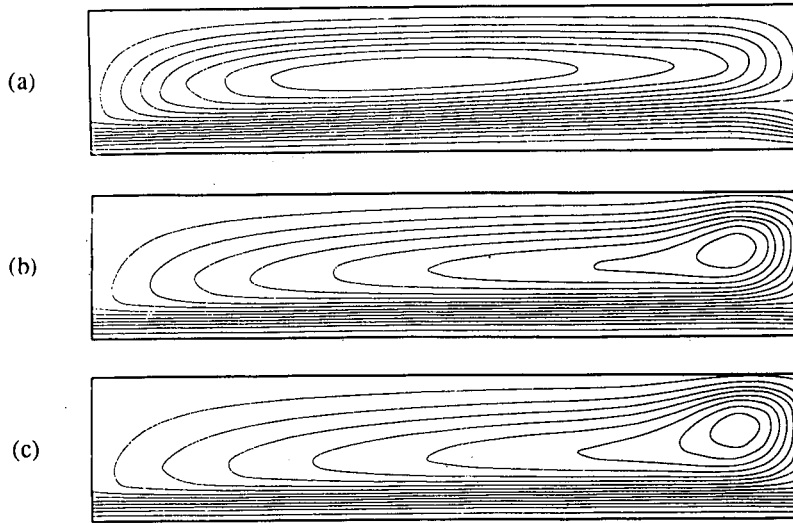


Figura 17. Líneas de corriente para $t = 100s$ y $L = 0.25m$ para diferentes Números de Reynolds (a) $Re = 300$, (b) $Re = 900$ y (c) $Re = 1500$.

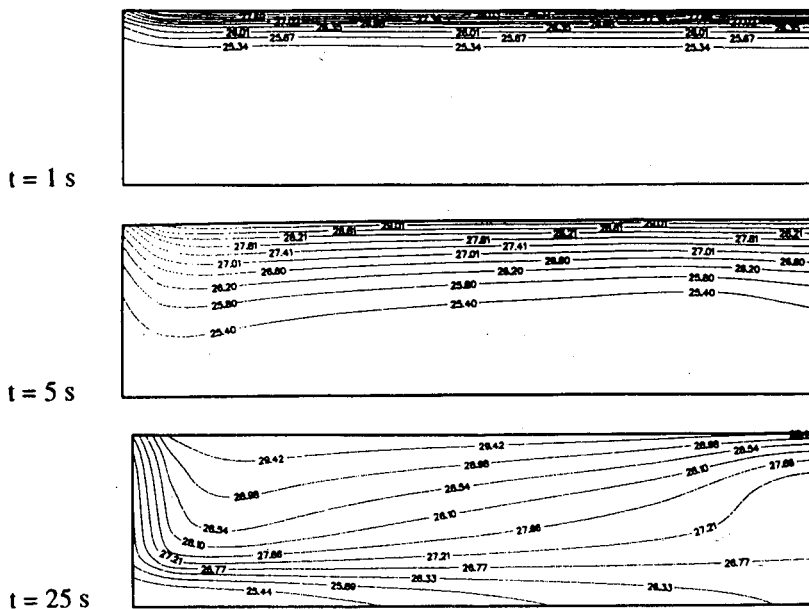


Figura 18. Isotermas en distintos instantes de tiempo t . $Re = 300, L = 0.2 m$.

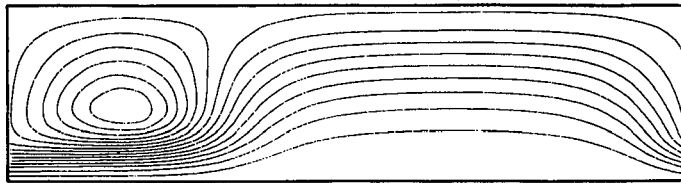
Convección natural en recintos cilíndricos verticales

En este apartado se muestra, a título ilustrativo, el comportamiento de un fluido confinado en un cilindro vertical de altura L y radio R , cuya base tiene una temperatura uniforme, T_h , y cuya cara superior tiene una temperatura uniforme, T_c , $T_c < T_h$. La superficie exterior del cilindro puede estar a una temperatura constante, T_c , condición I, o aislada térmicamente, condición II.

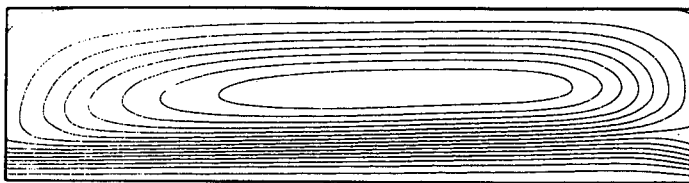
Los casos que se presentan responden a las siguientes condiciones:

$R = 0.05\text{m}$	Mallas = 20×20 y 30×30
$L = 0.10\text{m}$	$\Delta t = 0.05 \text{ s}$
$L/R = 2$	Tiempo de proceso = 100 s
$Pr = 1$	$Ra [\rho^2 g L^3 \beta (T_h - T_c) c_p / (\mu \lambda)] = 5 \cdot 10^4 \text{ y } 10^6$

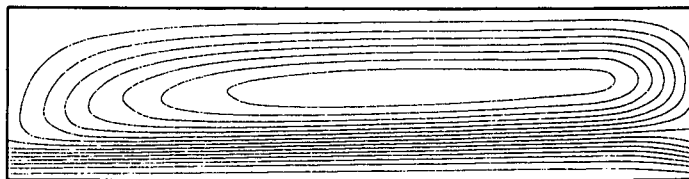
En las Figuras 20, 21 y 22 se representan las líneas de corriente y las isotermas correspondientes a diversas situaciones.



$t = 1 \text{ s}$



$t = 5 \text{ s}$



$t = 25 \text{ s}$

Figura 19. Líneas de corriente en distintos instantes de tiempo t . $Re=300$, $L=0.2 \text{ m}$.

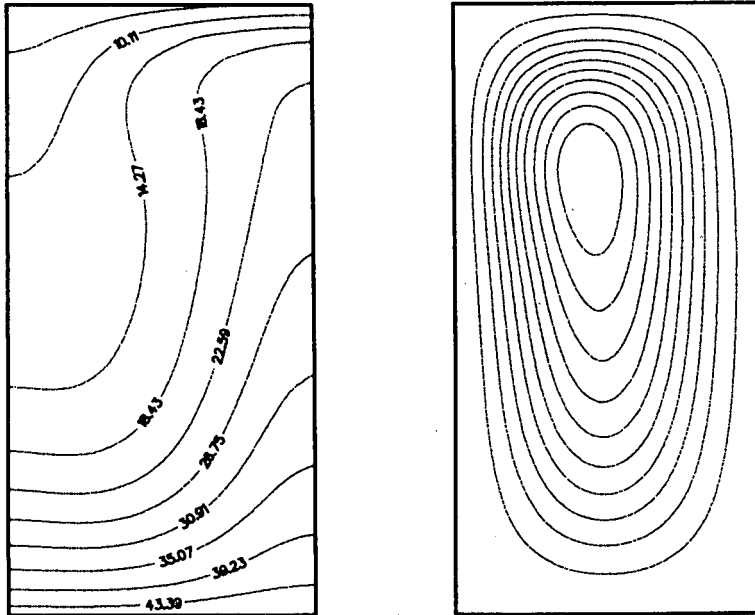


Figura 20. Isotermas y líneas de corriente. Malla 30×30 . Condición II. $Ra = 5 \cdot 10^4$.

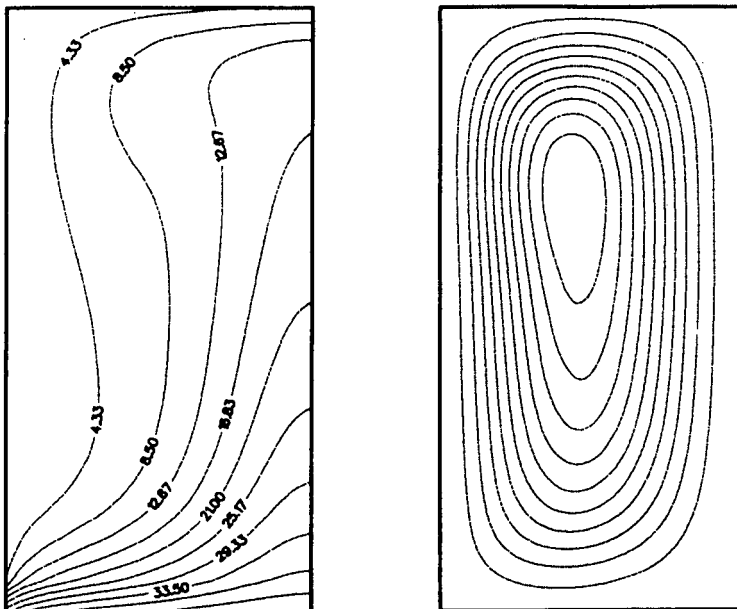


Figura 21. Isotermas y líneas de corriente. Malla 30×30 . Condición I. $Ra = 5 \cdot 10^4$.

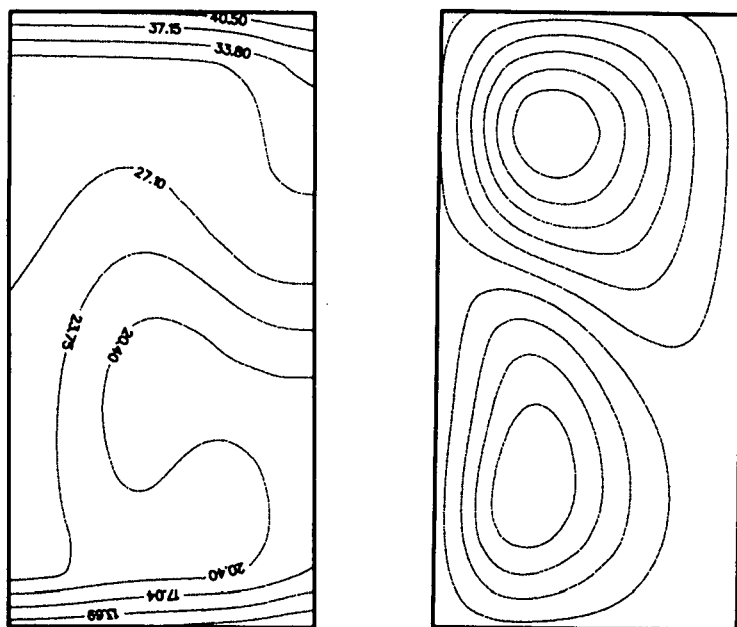


Figura 22. Isotermas y líneas de corriente. Malla 20×20 . Condición II. $Ra = 10^6$.

Convección natural/forzada en conductos cilíndricos con disposición vertical

La situación que se analiza es la de un fluido que circula por un cilindro vertical, de radio R y altura L , con unas aperturas coaxiales en la parte superior e inferior de sección circular y radio $r' < R$. La temperatura de la cara inferior es T_h y la de la superior $T_c < T_h$. La superficie exterior se considera aislada térmicamente. Como condición de contorno se establece que el fluido entra y sale a la misma velocidad. Se considera en unos casos la influencia de la convección natural (condición I: $g_x = 9.81$, $g_r = 0$), y en otros no (condición II: $g_x = g_r = 0$).

Los casos que se presentan responden a las siguientes condiciones:

$R = 0.05\text{m}$	Malla = 20×20
$L = 0.10\text{m}$	$\Delta t = 0.01\text{ s}$
$r' = R/6$	Tiempo de proceso = 50 s
$Pr = 1$	$Re [\rho u_0 R / \mu] = 240$ y 1440

En las Figuras 23 y 24 se observan diferencias apreciables entre considerar o no el efecto de la convección natural cuando el Re es bajo, mientras que en el caso de Re alto las diferencias son prácticamente inexistentes.

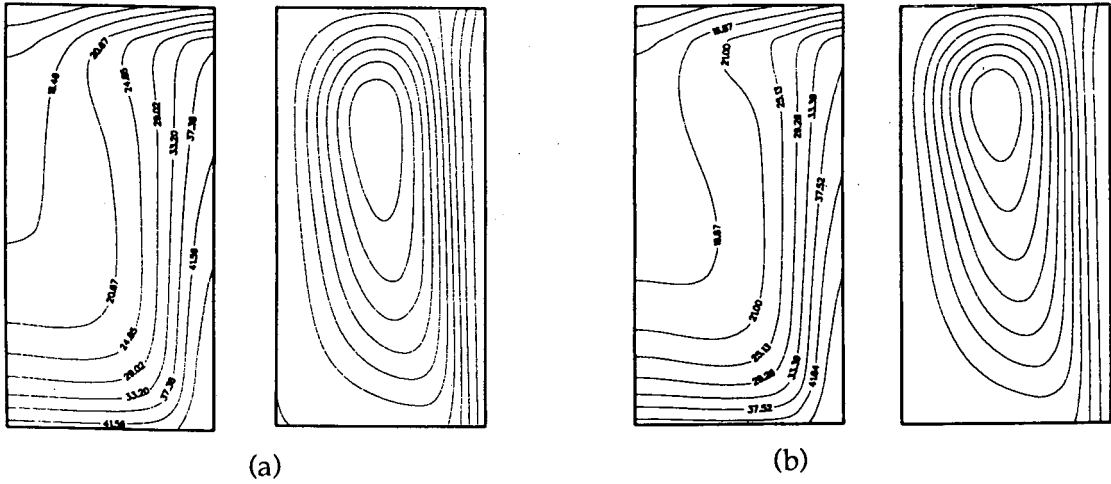


Figura 23. Isotermas y líneas de corriente para $Re = 240$. a) Condición I, b) condición II.

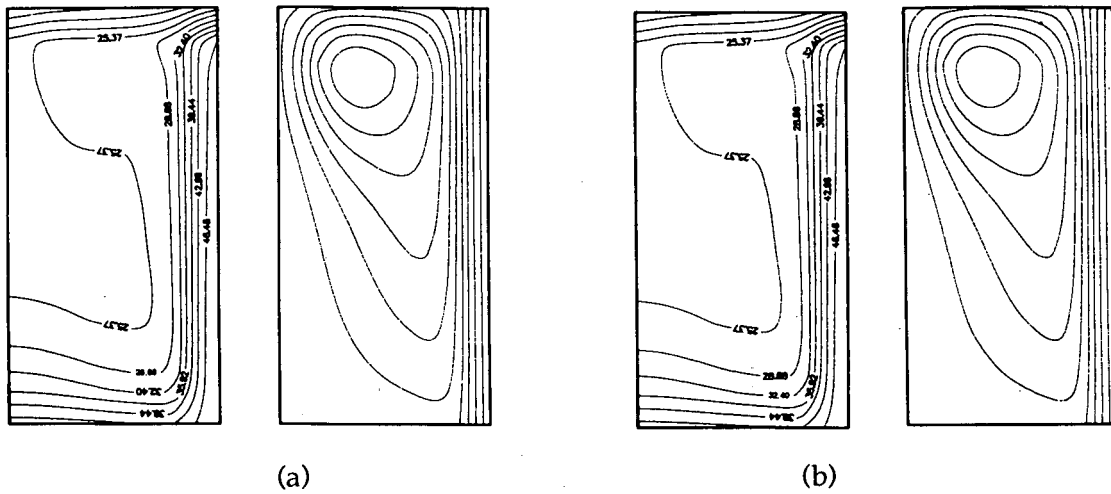


Figura 24. Isotermas y líneas de corriente para $Re = 1440$. a) Condición I, b) condición II.

CONCLUSIONES

Los diferentes resultados numéricos presentados ponen de manifiesto la validez de las hipótesis efectuadas. Así, en las contrastaciones realizadas, con respecto a situaciones con solución analítica conocida y a resultados experimentales existentes en la

bibliografía, el grado de concordancia ha sido muy bueno en todos los casos, mejorando a medida que se aumenta la densidad de la malla de trabajo. Se ha observado también que, para el caso de convección forzada en conductos de sección circular constante, la desviación de los resultados es mayor en la zona más cercana a la entrada del conducto; la explicación parece estar en que en esta zona del fluido los gradientes son más acusados y exigiría la utilización de una malla no uniforme concentrada en esta zona.

Los diferentes resultados numéricos presentados ponen de manifiesto las prestaciones de la modelización implementada y su notable flexibilidad para abordar muy distintas situaciones variando las condiciones de contorno y la geometría. Una limitación de la simulación implementada es la bidimensionalidad del tratamiento que circunscribe su aplicación a flujos bidimensionales o axialsimétricos.

NOMENCLATURA

c_p	calor específico a presión constante
D	diámetro
g	aceleración de la gravedad
i, j	índice del nodo en sentido axial y radial respectivamente
L	longitud / altura
m, n	número VC en sentido radial y axial respectivamente
Nu	número de Nusselt medio
Nu_x	número de Nusselt local
p	presión
P	número de Peclet
Pr	número de Prandtl ($\mu c_p / \lambda$)
r'	radio apertura coaxial
R	radio
Ra	número de Rayleigh
Re	número de Reynolds
S	superficie lateral o transversal del VC
t	tiempo
T	temperatura
T_b	temperatura media de la masa del fluido
T_0	temperatura de referencia
u	velocidad
u_0	velocidad de entrada
v_r	componente radial de la velocidad
v_x	componente axial de la velocidad
V	volumen del VC
VC	volumen de control
x, r	coordenadas cilíndricas

Letras griegas

α	coeficiente superficial de transferencia de calor
β	coeficiente de dilatación volumétrica
δx	incremento espacial de la malla de discret. (axial)
δr	incremento espacial de la malla de discret. (radial)
Δt	incremento de tiempo
λ	conductividad térmica
ρ	densidad
μ	viscosidad

Superíndices

n	índice sistema de coordenadas
o	tiempo anterior al de cálculo

Subíndices

x	sentido axial
r	sentido radial
w	material sólido, pared
o	valor de referencia
e, w, s, n	posición caras del VC

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto de investigación PB90-0606 de la "Dirección General de Investigación Científica y Técnica".

REFERENCIAS

1. E.R.G. Eckert y M. Drake, "Analysis of Heat and Mass Transfer", McGraw-Hill Int. Book Company, New York, (1972).
2. M. Jakob, "Heat Transfer", Vol. I y II, Jhon Wiley & Sons, New York, (1949).
3. V. Isachenko, V. Osipova y A. Sukomel, "Transmisión del calor", Boixareu Editores Marcombo, Barcelona, (1979).
4. W.M. Kays y H.C. Perkins, "Forced Convection, Internal Flow in Ducts", Cap. 7 de "Handbook of Heat Transfer Fundamentals", 2da. edición, Mc Graw-Hill Book Company, New York, (1978).
5. R.K. Shah y A.L. London, "Laminar Flow Forced Convection in Ducts", Academic Press, New York, (1978).
6. S.V. Patankar, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill Int. Book Company, New York, (1980).
7. S.V. Patankar y D.B. Spalding, "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows", "Int. J. Heat Mass Transfer", Vol. 15, pp. 1787, (1972).
8. Y.S. Lin y R.G. Askins, "Pseudo-Steady-State Natural Convection Heat Transfer Inside a Vertical Cylinder", "Transactions of the ASME", Vol. 18, pp. 310-316, (1986).

9. T. Cebeci y P. Bradshaw, "Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer", Springer-Verlag, New York, (1984).
10. D. Huang y S. Hsieh, "Analysis of Natural Convection in a Cylindrical Enclosure", *"Numerical Heat Transfer"*, Vol. **12**, pp. 121–135, (1987).
11. M. Strada, S. del Giudice y G. Comini, "Finite Element Solutions for Laminar Forced Convection in the Thermal Entrance Region of Ducts", *"Numerical Heat Transfer"*, Vol. **1**, pp. 471–488, (1978).
12. J.W. Mc Donald, V.E. Denny y A.F. Mills, "Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations in Inlet Regions", *"J. Applied Mechanics"*, Vol. **39**, pp. 873–878, (1972).
13. R. Chilukuri y R.H. Pletcher, "Numerical Solution to the Partially Parabolized Navier-Stokes Equations for Developing Flow in a Channel", *"Numerical Heat Transfer"*, Vol. **3**, pp. 169–188, (1980).
14. E.M. Sparrow, S.H. Lin y T.S. Lundgren, "Flow Development in the Hydrodynamic Entrance Region of Tubes and Ducts", *"The Physics of Fluids"*, Vol. **7**, No. 3, (1964).