

TÓPICOS DEL ANÁLISIS UNIDIMENSIONAL DE ESTRUCTURAS PARTE 2. Placas y láminas

S. MONLEÓN

*E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos,
Universidad Politécnica de Valencia*

RESUMEN

En esta serie de dos artículos, se muestra cómo las tradicionales presentaciones en rigidez o transferencia del equilibrio de vigas, arcos, placas o láminas tienen un origen común y único en la adecuada formulación del problema de valores iniciales correspondiente, siempre que éste implique integrar exclusivamente ecuaciones diferenciales en una variable. Ofrece, por lo tanto, una metodología unificada para llevar a cabo la resolución de un mismo problema conceptual independientemente del contexto geométrico de aplicación.

SUMMARY

This two papers set shows how the standard stiffness and transfer approach of equilibrium in beams, arches, plates and shells have a unique common origin in the appropriate formulation of the corresponding initial-value problem, provided that this implies integrating one variable differential equations only. Therefore, a unified method is offered to carry out the resolution of the same general problem irrespective of the geometrical context to which it is applied.

INTRODUCCIÓN

En esta segunda parte, nos ocuparemos de los elementos estructurales denominados tradicionalmente *placas y láminas*. Como es sabido, la principal característica del análisis de esta categoría de cuerpos consiste en que sobre estos pueden establecerse determinadas hipótesis de comportamiento geométrico que permiten asimilar la pieza real a un modelo bidimensional (2D). Estos modelos 2D se concretan mediante una superficie Σ denominada convencionalmente *superficie de referencia* y la hipótesis cinemática adoptada. Este binomio *dominio geométrico característico - hipótesis cinemática* proporciona entonces una descripción del comportamiento tridimensional del sólido mediante un sistema de ecuaciones diferenciales en las dos variables que parametrizan Σ , superficie de referencia de la lámina.

Recibido: Febrero 1984

Sin embargo, la resolución analítica de problemas de equilibrio de placas y láminas puede ser puramente función de una variable, como es el caso de las láminas de revolución con cargas axisimétricas.

Por lo tanto, en las secciones siguientes abordaremos el análisis de las placas y láminas como estructuras 2D, ordenando el trabajo en tres partes más unas aplicaciones. En primer lugar, estableceremos la adecuada *descripción geométrica* de estas estructuras, obteniendo a continuación las *ecuaciones de campo* correspondientes a problemas de equilibrio elástico-lineales en la forma apropiada para construir cómodamente una metodología unificada de resolución. La parte final del trabajo, previa a las aplicaciones, se destina a la formulación mediante la metodología desarrollada de *problemas unidimensionales en placas y láminas*.

CONTEXTO GEOMÉTRICO

Consideremos nuevamente un cuerpo B inmerso en \mathbb{R}^3 y ocupando, en un instante t , una región V que supondremos simplemente conexa. Para su estudio, adoptaremos un sistema de coordenadas curvilíneas $\theta^i (i = 1, 2, 3)$ particular, afín a la geometría espacial del cuerpo B según se especifica a continuación.

Para los cuerpos de tipo II, las coordenadas θ^1 y θ^2 se toman iguales a los parámetros Gaussianos α y β , que definen las *líneas de curvatura* de la superficie de referencia de la lámina, mientras que la coordenada θ^3 se denomina η y se define a partir de la ecuación:

$$\mathbf{P}(\alpha, \beta, \eta) = \mathbf{R}(\alpha, \beta) + \eta \mathbf{A}_3(\alpha, \beta) \quad (1)$$

donde $\mathbf{R}(\alpha, \beta)$ es el vector posición de los puntos materiales de $\Sigma(\alpha, \beta)$, superficie de referencia de la lámina delgada en configuración inicial (no deformada), y \mathbf{P} es el vector posición de los puntos materiales de B en esta misma configuración, mientras que \mathbf{A}_3 es el vector normal unitario exterior de Σ , definido a partir de los vectores naturales de la superficie de referencia. Todos ellos se representan en la Figura 1 y se relacionan por la ecuación siguiente, válida para cualquier configuración:

$$\mathbf{a}_3(\alpha, \beta) = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} \quad , \quad \mathbf{a}_1(\alpha, \beta) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \quad , \quad \mathbf{a}_2(\alpha, \beta) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \quad (2)$$

Según la ecuación (1), η define una recta ortogonal a Σ en cada punto (α, β) . Sea $\Omega(\alpha, \beta)$ la porción de superficies de referencia sobre la cual η intersecta materialmente al cuerpo B , denominaremos *espesor* del cuerpo B al conjunto de puntos materiales $h_\eta = [a, b] = B \cap \eta$ mientras que Ω_a y Ω_b serán respectivamente las caras inferior y superior de la lámina, definidas por:

$$\Omega_a = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 / (\alpha, \beta) \in \Omega, \eta = a\} \quad , \quad \Omega_b = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 / (\alpha, \beta) \in \Omega, \eta = b\} \quad (3)$$

El sistema coordenado θ^i definido anteriormente será válido para los puntos de \mathbb{R}^3 que cumplan

$$\left. \begin{aligned} h &\ll \min \{R_\alpha, R_\beta\} \\ h &\ll \max \{L_\alpha, L_\beta\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

siendo $h = b - a$ la longitud del segmento h_η (que también denominaremos espesor), R_α y R_β los radios de curvatura de las líneas coordenadas α, β y L_α y L_β las longitudes de arco determinadas por las líneas de curvatura trazables sobre Ω .

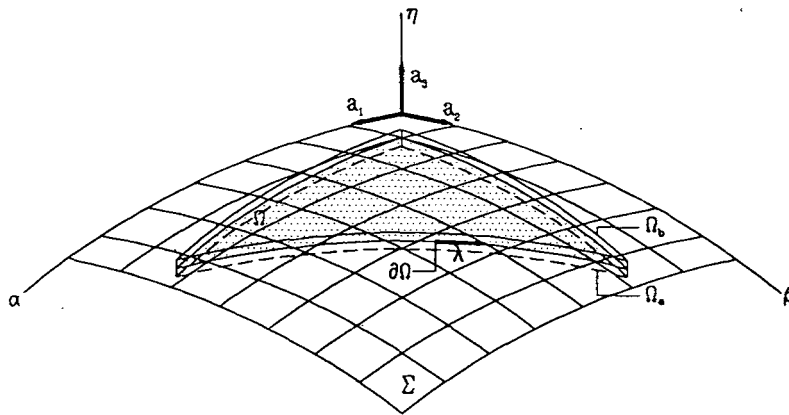


Figura 1. Sistema de referencia de una lámina delgada y definición del triedro local $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,2,3}$.

Utilizando las definiciones anteriores, el contorno del cuerpo, que denominaremos ∂B , puede descomponerse de la siguiente forma

$$\partial B = \Omega_a \cup E \cup \Omega_b, \quad E = h_\eta \times \partial\Omega \quad (5)$$

donde $\partial\Omega = \partial B \cap \Sigma$ es la curva cerrada que define el contorno Ω , y E aparece como la *arista* de la lámina. Denominaremos *espacio laminar* al conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 definido por:

$$h_\eta \times \Omega(\alpha, \beta) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 / \eta \in [a, b], (\alpha, \beta) \in \Omega\} \quad (6)$$

Las componentes del tensor métrico g_{ij}^* asociado al sistema coordenado adoptado podrán evaluarse, en virtud de (4), en cada punto de este dominio, resultando:

$$g_{ij}^* = \mathbf{g}_i^* \cdot \mathbf{g}_j^*, \quad \mathbf{g}_i^* = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta^i} \quad (7)$$

Particularizada a la configuración inicial, obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}^* &= [(1 + \eta/R_\alpha)A]^2, & G_{22}^* &= [(1 + \eta/R_\beta)B]^2, & G_{33}^* &= 1 \\ G_{12}^* &= 0, & G_{13}^* &= 0, & G_{23}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

A y B son los parámetros de Lamé de Σ en configuración inicial, iguales al módulo de los vectores naturales de la superficie de referencia. Sea G^* el determinante del sistema definido en (8). En secciones posteriores serán de utilidad las definiciones:

$$\left. \begin{aligned} A^* &= \sqrt{G_{11}^*} = (1 + \eta/R_\alpha)A, & B^* &= \sqrt{G_{22}^*} = (1 + \eta/R_\beta)B \\ \sqrt{G^*} &= A^*B^* = \mu AB, & \mu &= (1 + \eta/R_\alpha)(1 + \eta/R_\beta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

De las ecuaciones de Mainardi-Codazzi^{2,11} se deducen además las siguientes relaciones de derivación:

$$A_{,\beta}^* = (1 + \eta/R_\beta)A_{,\beta}, \quad B_{,\alpha}^* = (1 + \eta/R_\alpha)B_{,\alpha}$$

Según lo expuesto en el artículo anterior¹, para las placas y las láminas la hipótesis cinemática asociada al modelo 2D puede expresarse mediante la ecuación:

$$\mathbf{d}^*(\alpha, \beta, \eta) = \mathbf{h}(\eta) \cdot \mathbf{u}(\alpha, \beta) \quad (10)$$

donde \mathbf{d}^* es el vector desplazamiento de los puntos de B en las direcciones \mathbf{g}_i^* , \mathbf{h} una matriz independiente de la sollicitación actuante y característica de la hipótesis cinemática adoptada (Love-Kirchhoff, Reissner-Mindlin...), de $3 \times n$ componentes, y \mathbf{u} es el vector de *desplazamientos generalizados* del modelo 2D, definido en cada punto de Ω y de n componentes. Adoptada una composición para $\mathbf{u}(\alpha, \beta)$, los elementos de $\mathbf{h}(\eta)$ se deducen por simple geometría. Por ejemplo, para una lámina de Cosserat-Reissner-Mindlin^{3,4,5} (CRM) tendremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^* &= \{u^*, v^*, w^*\}^T \quad \text{definido sobre } B \\ \mathbf{u} &= \{u, v, w, \psi_\alpha, \psi_\beta, \omega_\eta\}^T \quad \text{definido sobre } \Omega \\ \mathbf{h} &= [\mathbf{I}, \boldsymbol{\eta}\mathbf{I}] \quad , \quad \mathbf{I} \text{ es la matriz unidad de } 3 \times 3 \end{aligned}$$

donde $\{u, v, w\}$ son los desplazamientos de los puntos $\mathbf{r}(\alpha, \beta)$ de Ω en las direcciones coordenadas, ψ_α y ψ_β las rotaciones de la normal a la superficie de referencia, y ω_η su alargamiento unitario.

Aunque no es objeto de este artículo discutir la construcción de hipótesis cinemáticas adecuadas para el análisis de láminas delgadas, es práctica común reducir esta selección a las cinemáticas que sólo consideran un único *vector director*⁵. Ello cubre el modelo de Reissner-Mindlin ($\omega_\eta = 0$), que a su vez engloba el de Love-Kirchhoff⁶, por lo tanto, la particularización de la ecuación (10) expuesta anteriormente será la generalmente adoptada, y expresando las rotaciones de la normal en función de las rotaciones de las tangentes a las líneas coordenadas de Σ , φ_α y φ_β :

$$\psi_\alpha = \varphi_\alpha + \omega_\alpha, \quad \psi_\beta = \varphi_\beta + \omega_\beta$$

la cinemática de Love-Kirchhoff se genera haciendo simplemente $\omega_\alpha = \omega_\beta = \omega_\eta = 0$. Ello equivale, como es sabido, a suponer que el director de Σ es precisamente \mathbf{a}_3 , o

lo que es lo mismo: que los segmentos de normal permanecen rectos, ortogonales a la superficie de referencia y son inextensibles, propiedad que se conoce como *regularidad de la normal*.

ECUACIONES DE CAMPO

El conjunto de ecuaciones que rige todo problema estático se reduce, tal como se expuso en el artículo anterior, a las ecuaciones cinemáticas del cuerpo, sus ecuaciones constitutivas (elásticas en nuestro caso) y las ecuaciones de equilibrio y condiciones de contorno. Desarrollaremos un planteamiento intrínsecamente tridimensional para obtener los sistemas de ecuaciones correspondientes a placas y láminas, recurriendo a una formulación variacional² para generar las ecuaciones de equilibrio y condiciones de contorno propias del modelo 2D.

Ecuaciones cinemáticas

Estas pueden darse, para comportamiento geoméricamente lineal, en la forma

$$\mathbf{e}^*(\alpha, \beta, \eta) = \mathbb{E} \cdot \mathbf{d}^* \quad (11)$$

\mathbb{E} es un operador diferencial lineal de primer orden de dimensión 6×3 . Aplicado a los desplazamientos de B proporciona el vector de deformaciones en el punto considerado, de seis componentes. La forma explícita de esta ecuación se facilita en la Tabla I, para sistemas de coordenadas ortogonales como el adoptado. En general, \mathbb{E} puede descomponerse en la forma

$$\mathbb{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \mathbf{E}_2 \frac{\partial}{\partial \beta} + \mathbf{E}_3 \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (12)$$

donde los operadores $\mathbf{E}_i (i = 0, 3)$ son operadores lineales de 6×3 componentes. Llevando (10) a (11) y recurriendo a (12) se deduce la siguiente expresión del vector de deformaciones:

$$\mathbf{e}^*(\alpha, \beta, \eta) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}(\alpha, \beta) \quad (13)$$

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_{,\alpha} \\ \mathbf{u}_{,\beta} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{u}_{,\beta} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} \quad (14)_1$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2], \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_0 \mathbf{h} + \mathbf{E}_3 \mathbf{h}', \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{E}_1 \mathbf{h}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{E}_2 \mathbf{h}, \quad \mathbf{h}' = \frac{d\mathbf{h}}{d\eta} \quad (14)_2$$

El vector \mathbf{v} es de $3n$ componentes e incluye los desplazamientos generalizados y sus derivadas direccionales, y \mathbf{B} , de $6 \times 3n$, define la deformación del espacio laminar. La Tabla I contiene los elementos necesarios para su evaluación en coordenadas ortogonales.

La ecuación (13) resume la cinemática de la lámina delgada con modelización 2D. Nótese que dada una hipótesis cinemática, la matriz \mathbf{B} estará totalmente determinada

por (14)₂. Por lo tanto, si adoptamos una cinemática con un único director obtendremos:

$$\mathbf{B}_0 = [\mathbf{E}_0, \eta \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_3] , \quad \mathbf{B}_1 = [\mathbf{E}_1, \eta \mathbf{E}_1] , \quad \mathbf{B}_2 = [\mathbf{E}_2, \eta \mathbf{E}_2] \quad (15)$$

Variable	Definición	Expresión General	Expresión en coordenadas ortogonales
\mathbf{e}^*	Vector de deformaciones de los puntos de B . De 6×1 .	$\mathbf{e}^* = \mathbf{I} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}^*$	$\begin{Bmatrix} \frac{1}{A^*} \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{A^*_{,\beta}}{A^* B^*} & \frac{1}{\eta + R_\alpha} \\ \frac{B^*_{,\alpha}}{A^* B^*} & \frac{1}{B^*} \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{1}{\eta + R_\beta} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{1}{B^*} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{A^*_{,\beta}}{A^* B^*} & \frac{1}{A^*} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{B^*_{,\alpha}}{A^* B^*} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta + R_\alpha} & 0 & \frac{1}{A^*} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta + R_\beta} & \frac{1}{B^*} \frac{\partial}{\partial \beta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix}$
\mathbf{B}	Matriz de deformación del espacio laminar. De $6 \times 3n$.	$\mathbf{B} = [\mathbf{I} \mathbf{E} \mathbf{h}, \mathbf{E}_1 \mathbf{h}, \mathbf{E}_2 \mathbf{h}]$	$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{A^*} \begin{bmatrix} 100 \\ 000 \\ 000 \\ 010 \\ 001 \\ 000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{B^*} \begin{bmatrix} 000 \\ 010 \\ 000 \\ 100 \\ 000 \\ 001 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 000 \\ 000 \\ 001 \\ 000 \\ 100 \\ 010 \end{bmatrix}$

Tabla I. Definiciones cinemáticas.

Las expresiones facilitadas en la Tabla I corresponden a sistemas ortogonales, en los cuales pueden definirse componentes físicas de las variables. Ello conduce a que las coordenadas α, β determinen las líneas de curvatura de la superficie de referencia. Para sistemas no ortogonales (oblicuos), los cálculos deben desarrollarse en componentes tensoriales^{7,8,9}.

Ecuaciones constitutivas, de equilibrio y condiciones de contorno

La energía de deformación U y el potencial de las fuerzas actuantes Ω , correspondientes a fuerzas másicas definidas en cada punto de B y fuerzas de superficie aplicadas sobre el contorno ∂B del cuerpo, se escribirán ahora:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{s}^{*T} \cdot \mathbf{e}^* dV \quad (16)$$

$$\Omega = - \left[\int_V \rho^* \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{d}^* dV + \int_{\partial V} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{d}^* dS \right] \quad (17)$$

\mathbf{s}^* es el vector de tensiones, de seis componentes, definido sobre todo B , \mathbf{b} las fuerzas por unidad de masa y ρ^* la densidad de masa por unidad de volumen B . El vector \mathbf{q} define las fuerzas de superficie aplicadas sobre el contorno del cuerpo ∂B , previamente descrito en (5).

Al admitir que nuestro cuerpo es elástico, la relación constitutiva entre los sistemas \mathbf{s}^* y \mathbf{e}^* es lineal y del tipo

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}^* \quad (18)$$

puesto en forma explícita, y en componentes físicas:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\alpha^* \\ \sigma_\beta^* \\ \sigma_\eta^* \\ \tau_{\alpha\beta}^* \\ \tau_{\alpha\eta}^* \\ \tau_{\beta\eta}^* \end{Bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} 1+\alpha & \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1+\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1+\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_\alpha^* \\ \epsilon_\beta^* \\ \epsilon_\eta^* \\ \gamma_{\alpha\beta}^* \\ \gamma_{\alpha\eta}^* \\ \gamma_{\beta\eta}^* \end{Bmatrix}, \quad \alpha = \frac{\nu}{1-2\nu}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (19)$$

Operando convenientemente, de las relaciones anteriores se deduce la siguiente expresión de la energía potencial:

$$V = U + \Omega = \int_{\Omega} F(\alpha, \beta, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{,\alpha}, \mathbf{u}_{,\beta}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}_E^T \cdot \mathbf{u} ds \quad (20)$$

siendo

$$F = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{u}, \quad (21)$$

$$\mathbf{D} = \int_a^b \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \mu d\eta, \quad (22)$$

$$\mathbf{Q} = \int_a^b \rho^* \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{b} \mu d\eta + \mu_a \mathbf{h}_a^T \cdot \mathbf{q}_a + \mu_b \mathbf{h}_b^T \cdot \mathbf{q}_b, \quad \mathbf{h}_{a,b} = \mathbf{h}(\eta = a, b) \quad (23)$$

$$\mathbf{f}_E(s) = \int_a^b \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{q}_E \mu_E d\eta, \quad (24)$$

La ecuación (21) proporciona la forma explícita de la *densidad superficial de energía potencial* de la lámina delgada. Es un funcional de los desplazamientos generalizados y de sus derivadas direccionales. La matriz \mathbf{D} , de $3n \times 3n$, es la matriz de rigideces locales de la lámina. \mathbf{Q} es el vector de densidad de carga superficial y se obtiene reduciendo a Ω las fuerzas másicas y las fuerzas de superficie actuantes sobre las caras superior e inferior de la lámina, Ω_a y Ω_b . Aunque es usual postular directamente la distribución de cargas superficiales, para su correcta evaluación deben calcularse las integrales dadas en (23).

El último sumando de la expresión de la energía potencial (20) corresponde al trabajo de las fuerzas actuantes sobre la arista de la lámina e interviene en la escritura de las condiciones de contorno del problema según veremos posteriormente. En su definición aparece el vector \mathbf{f}_E dado en (24). Esta ecuación proporciona la reducción a $\partial\Omega$ de las cargas \mathbf{q}_E superficiales actuantes sobre E de forma consistente con la hipótesis cinemática adoptada, en ella μ_E define la raíz cuadrada positiva del determinante de la métrica de la arista $E(s, \eta)$:

$$\mu_E = (1 + \eta/R_s) \quad (25)$$

R_s es el radio de curvatura de Σ en la dirección λ tangente a la curva cerrada $\partial\Omega(s)$ en cada punto del contorno de la superficie Ω . Apoyándonos en la definición (24), podemos introducir unos *esfuerzos generalizados* asociados a una α -sección (sección de B definida por $\alpha = C^{te}$). Basta determinar las cargas superficiales $\mathbf{q}_{(\alpha)}$ y el escalar $\mu_{(\alpha)}$ correspondientes a la arista particular ($\mathbf{q}_{(\beta)}$ y $\mu_{(\beta)}$ para la β -sección respectivamente):

$$\left. \begin{aligned} \mu_{(\alpha)} &= (1 + \eta/R_\beta) & , & & \mathbf{q}_{(\alpha)} + \{\sigma_\alpha^*, \tau_{\alpha\beta}^*, \tau_{\alpha\eta}^*\}^T &= \mathbf{t}_\alpha \\ \mu_{(\beta)} &= (1 + \eta/R_\alpha) & , & & \mathbf{q}_{(\beta)} + \{\tau_{\beta\alpha}^*, \sigma_\beta^*, \tau_{\beta\eta}^*\}^T &= \mathbf{t}_\beta \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

\mathbf{t}_α (\mathbf{t}_β) define el vector tensión en cada punto del espesor de la lámina a lo largo de la α -sección (β -sección) considerada. Aplicando los valores particulares de μ_E y \mathbf{q}_E dados en (26) al cálculo de los *esfuerzos generalizados*, obtendremos:

$$\mathbf{f}_\alpha(\alpha, \beta) = \int_a^b \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{t}_\alpha \mu_{(\alpha)} d\eta, \quad \mathbf{f}_\beta(\alpha, \beta) = \int_a^b \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{t}_\beta \mu_{(\beta)} d\eta \quad (27)$$

A partir de la Tabla I y de la composición del vector de tensiones \mathbf{s}^* dada en (19), es fácil comprobar que se cumple:

$$\mathbf{t}_\alpha = A^* \mathbf{E}_1^T \cdot \mathbf{s}^*, \quad \mathbf{t}_\beta = B^* \mathbf{E}_2^T \cdot \mathbf{s}^*$$

y por lo tanto, en virtud de (18), (13) y (14)₂ se deduce:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_\alpha(\alpha, \beta) &= A \left[\int_a^b \mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \mu d\eta \right] \cdot \mathbf{v}(\alpha, \beta) \\ \mathbf{f}_\beta(\alpha, \beta) &= B \left[\int_a^b \mathbf{B}_2^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \mu d\eta \right] \cdot \mathbf{v}(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Recurriendo ahora a la definición (22), y empleando la descomposición en bloques de la matriz de deformación \mathbf{B} dada en (14)₂, se puede reescribir la matriz de rigideces \mathbf{D} como

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{00} & \mathbf{D}_{01} & \mathbf{D}_{02} \\ \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{20} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{rs} = \int_a^b \mathbf{B}_r^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_s \mu d\eta \quad (r = 0a2, \quad s = 0a2) \quad (29)$$

y por lo tanto, a partir de (21) es sencillo deducir

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{,\alpha}} &= \mathbf{D}_{10}\mathbf{u} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}_{,\beta} = \frac{1}{A}\mathbf{f}_\alpha \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{,\beta}} &= \mathbf{D}_{20}\mathbf{u} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}_{,\beta} = \frac{1}{B}\mathbf{f}_\beta \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Las ecuaciones (27) y (30) proporcionan dos definiciones alternativas, estática y constitutiva, de los esfuerzos generalizados de una lámina delgada consistentes con una determinada hipótesis cinemática, descrita por (10).

Supongamos que la estructura registra unos desplazamientos virtuales a partir de una configuración de equilibrio definida por \mathbf{u}_0 . La nueva configuración de la pieza podrá expresarse como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \hat{\mathbf{u}}(\alpha, \beta) \quad (31)$$

donde ε es una constante arbitraria pequeña y $\hat{\mathbf{u}}(\alpha, \beta)$ cualquier función vectorial que satisfaga las adecuadas condiciones de continuidad y las condiciones de contorno cinemáticas (si existen). Para que la estructura esté en equilibrio, la energía potencial ha de ser estacionaria, luego ha de anularse la primera variación de V para todo desplazamiento virtual:

$$\delta V = \varepsilon \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_0} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{0,\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{,\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{0,\beta}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{,\beta} \right] d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}_E^T \cdot \hat{\mathbf{u}} ds \right\} = 0 \quad \forall \varepsilon \quad (32)$$

donde $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_0}$ representa $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}$ para $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, etc. Anotando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{0,\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{,\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{0,\beta}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{,\beta} &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(AB \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{0,\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{u}} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(AB \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{0,\beta}} \cdot \hat{\mathbf{u}} \right) \right] - \\ &- \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(AB \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{0,\alpha}} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(AB \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{0,\beta}} \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

y observando que el primer sumando del segundo miembro de esta ecuación es una divergencia, le es de aplicación del teorema de Gauss, con lo que la ecuación (32) se transforma en:

$$\begin{aligned} \delta V = \varepsilon \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_0} - \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(AB \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{0,\alpha}} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(AB \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{0,\beta}} \right) \right] \right) \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega + \right. \\ \left. + \int_{\partial\Omega} \left(\left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{0,\alpha}} n_\alpha + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{0,\beta}} n_\beta \right] - \mathbf{f}_E \right)^T \cdot \hat{\mathbf{u}} ds \right\} = 0 \quad (33) \end{aligned}$$

siendo (n_α, n_β) las componentes de la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$ sobre Σ , en la base natural $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$. La ecuación (33) debe satisfacerse, en configuraciones de equilibrio, para cualquier variación de los desplazamientos. Por lo tanto deberán anularse tanto la integral de superficie como la integral de contorno:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} - \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(AB \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}, \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(AB \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}, \beta} \right) \right] = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Omega \quad (34)$$

$$\left(\left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}, \alpha} n_\alpha + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}, \beta} n_\beta \right] - \mathbf{f}_E \right)^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_E = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (35)$$

$\varepsilon \hat{\mathbf{u}}_E(s)$ define la variación de los desplazamientos generalizados de los puntos de la curva cerrada $\partial\Omega(s)$. La ecuación (34) proporciona un sistema de n ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden en las n componentes de los desplazamientos generalizados (basta recordar las definiciones del funcional F y del vector \mathbf{v}). Define las *ecuaciones de equilibrio interno de las láminas delgadas* mientras que la ecuación escalar (35) proporciona las condiciones de contorno que debe verificar la solución. Para su adecuada interpretación, conviene recurrir a la definición constitutiva de los esfuerzos generalizados (30), resultando el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} - \frac{1}{AB} [(B\mathbf{f}_\alpha)_{,\alpha} + (A\mathbf{f}_\beta)_{,\beta}] &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}, \alpha} - \frac{1}{A} \mathbf{f}_\alpha &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}, \beta} - \frac{1}{B} \mathbf{f}_\beta &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$[(\mathbf{f}_\alpha \nu_\alpha + \mathbf{f}_\beta \nu_\beta) - \mathbf{f}_E]^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_E = 0 \quad (37)$$

siendo (ν_α, ν_β) las componentes de la normal exterior a $\partial\Omega$ sobre Σ en la base natural unitaria $\{\mathbf{a}_1/A, \mathbf{a}_2/B\}$. El sistema (36) constituye un conjunto de $3n$ ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden, en las n componentes de los desplazamientos generalizados y en las $2n$ componentes de los esfuerzos generalizados. El enunciado completo de problema de valores iniciales requiere la ecuación (37), que describe las condiciones de contorno en los términos adecuados, puesto que de ella se deducen

- (1) condiciones de contorno cinemáticas (o de desplazamiento impuesto), si algunas componentes de $\hat{\mathbf{u}}_E(s)$ se anulan, y
- (2) condiciones de contorno estáticas, las cuales exigen que las restantes componentes de los esfuerzos en el contorno tomen valores impuestos iguales a \mathbf{f}_E .

Nótese que los esfuerzos generalizados aparecen como variables auxiliares en toda la formulación anterior, por lo tanto su interpretación o conocimiento exhaustivo no

es indispensable. Ello proviene del planteamiento tridimensional adoptado, el cual determina el estado tensional en cada punto del cuerpo mediante la ecuación

$$s^* = C \cdot B \cdot v$$

la cual no depende de f_α y f_β . Por ello, se ha prescindido de las tradicionales representaciones de los esfuerzos en esta primera parte del trabajo. De hecho, según prueba la ecuación (27) éstos no son una propiedad intrínseca del estado tensional sino que dependen directamente de la hipótesis cinemática adoptada.

PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES EN PLACAS Y LÁMINAS

Si bien el sistema de ecuaciones diferenciales (36) depende de dos variables, los parámetros de superficie (α, β) adoptados, éste se transforma en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias bajo determinadas circunstancias geométricas: cuando la superficie de referencia Σ es de revolución o traslación, el análisis puede reducirse a un problema en una variable mediante formulación armónica. El caso extremo de esta evolución lo constituyen las láminas de revolución solicitadas axisimétricamente, para las cuales el problema es puramente unidimensional.

En cualquier caso, siempre que el problema se reduzca a integrar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, los resultados presentados en la Parte 1 de este artículo¹ serán totalmente aplicables al análisis de láminas y en particular, a la construcción de las *ecuaciones de transferencia y de rigidez* de las láminas:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_2 \\ f_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ f_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{f}_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

Para definir completamente las matrices de transferencia $G(s)$, de rigidez K y los vectores de valores iniciales $\{\tilde{u}_2, \tilde{f}_2\}$ o $\{\hat{f}_1, \hat{f}_2\}$ bastará nuevamente obtener la solución general del problema homogéneo asociado al sistema de ecuaciones diferenciales que rigen nuestro problema de equilibrio, y en ello juega un papel privilegiado el operador W definido por la relación

$$E'_H = W \cdot E_H, \quad E'_H = \frac{d}{ds} E_H \quad (39)$$

donde E_H es el vector estado de la solución homogénea. El resto del proceso a seguir para detallar completamente (38) está descrito paso a paso en la sección "*Presentación unificada de la resolución de problemas elásticos en piezas alargadas*" incluida en la Parte 1, y es la aplicación directa y sin modificación alguna.

Por ello, a continuación presentaremos la deducción del operador \mathbf{W} en dos casos concretos: el análisis axisimétrico de láminas de revolución y el análisis armónico de placas rectangulares.

Análisis axisimétrico de láminas de revolución

La particularización sistemática de los resultados de la sección anterior a problemas puramente axisimétricos se desarrolla en las líneas siguientes, apoyándose para ello en la nomenclatura de la Figura 2.

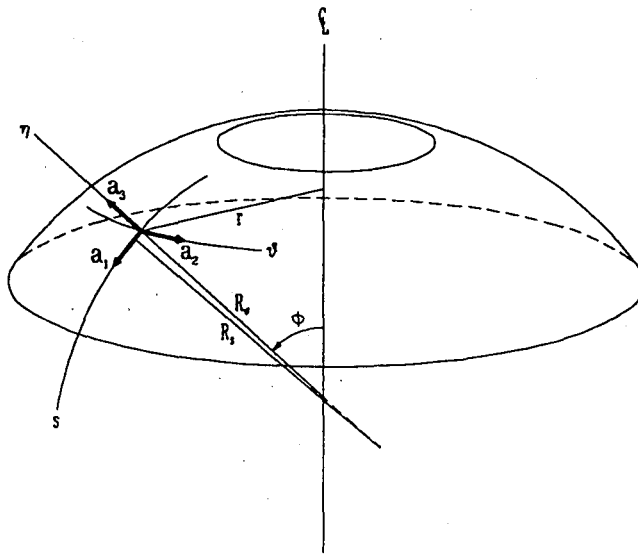


Figura 2. Sistema de referencia de una lámina de revolución.

Las medidas geométricas propias de las superficies de revolución incluidas en las ecuaciones (9) serán:

$$\left. \begin{aligned} A &= 1, & A^* &= 1 + \eta/R_s \\ B &= r, & B^* &= (1 + \eta/R_\theta)r \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Las ecuaciones cinemáticas (11) adoptarán ahora la siguiente forma desarrollada:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_s^* \\ \epsilon_\theta^* \\ \epsilon_\eta^* \\ \gamma_{s\eta}^* \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\eta/R_s} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{1}{1+\eta/R_s} \frac{1}{R_s} \\ \frac{1}{1+\eta/R_s} \frac{\cos \phi}{r} & \frac{1}{1+\eta/R_\theta} \frac{1}{R_\theta} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{1+\eta/R_s} \frac{1}{R_s} & \frac{1}{1+\eta/R_s} \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u^* \\ w^* \end{array} \right\} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}^* \quad (41)$$

mientras que la ecuación constitutiva (19) se escribirá:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_s^* \\ \sigma_\theta^* \\ \sigma_\eta^* \\ \tau_{s\eta}^* \end{Bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} 1 + \alpha & \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 + \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 + \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_s^* \\ \epsilon_\theta^* \\ \epsilon_\eta^* \\ \gamma_{s\eta}^* \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}^* \quad (42)$$

y las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno (36) y (37) serán ahora:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} - \frac{1}{r} \frac{d}{ds} (r \mathbf{f}_s) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'} - \mathbf{f}_s &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$$(\mathbf{f}_s - \mathbf{f}_E)^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_E = 0 \quad (44)$$

con $\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{u}}{ds}$ y los esfuerzos generalizados

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_s &= \int_a^b \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{t}_s \mu_{(s)} d\eta \\ \mathbf{t}_s &= \{\sigma_s^*, \tau_{s\eta}^*\}^T, \quad \mu_{(s)} = 1 + \eta/R_s \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

El sistema (43) es de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en las n componentes de los desplazamientos generalizados \mathbf{u} y las n componentes de los esfuerzos generalizados \mathbf{f}_s . La definición del funcional F , aplicada al caso que nos interesa conduce a la ecuación siguiente:

$$F = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{D}_{00} \mathbf{u} + 2\mathbf{u}^T \mathbf{D}_{01} \mathbf{u}' + \mathbf{u}'^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{u}') - \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{Q} \quad (46)$$

con

$$\mathbf{D}_{mn} = \int_a^b \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_n \mu d\eta \quad (m = 0, 1 \text{ y } n = 0, 1) \quad (47)_1$$

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{I} \mathbf{E} \mathbf{h}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{E}_1 \mathbf{h}, \quad \mu = (1 + \eta/R_s)(1 + \eta/R_\theta) = \mu_{(s)} \mu_{(\theta)} \quad (47)_2$$

El operador $\mathbf{I} \mathbf{E}$ se definió en (41) y \mathbf{E}_1 se deduce de esta misma ecuación como cofactor de las derivadas parciales respecto de la variable s , resultando

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\mu_{(s)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando la ecuación (46), el sistema (43) puede expresarse alternativamente como sigue:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}'_s + \mathbf{Q} &= \mathbf{D}_{00} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{01} \mathbf{u}' - \frac{\cos \phi}{r} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_s &= \mathbf{D}_{10} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{u}' \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

y por lo tanto, siempre que exista la inversa de \mathbf{D}_{11} podremos definir el operador \mathbf{W} en la forma en que se introdujo en la relación (39), resultando para problemas

axisimétricos:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11}^{-1} \\ \mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{01}\mathbf{D}_{11}^{-1} - \frac{\cos\phi}{r}\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Para obtener la forma explícita del operador \mathbf{W} necesitaremos en primer lugar evaluar las matrices \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 , luego adoptar una determinada hipótesis cinemática. Este requisito es necesario si se desea mayor precisión sobre la estructura de la ecuación (49), la cual rige el problema axisimétrico conjuntamente con las condiciones de contorno (44). Por ello, esta parte se ha reservado para la sección de aplicaciones.

Sin embargo, en su escritura general para problemas axisimétricos puros, el operador \mathbf{W} tan solo difiere del correspondiente a problemas en estructuras 1D en el término $-(\cos\phi/r)\mathbf{I}$. Además, sólo adoptará un valor constante para el caso de lámina cilíndrica, para el cual tanto el radio R como el ángulo ϕ son constantes. En este caso, este último es precisamente $\pi/2$, conduciendo a que el término $-(\cos\phi/r)\mathbf{I}$ se anule.

Análisis armónico de placas rectangulares

Las ecuaciones generales de la estática lineal de placas rectangulares elásticas se obtienen por simple particularización de los sistemas generales (36) y (37) a coordenadas cartesianas, resultando sucesivamente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} - (\mathbf{f}_{x,x} + \mathbf{f}_{y,y}) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{,x}} - \mathbf{f}_x &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_{,y}} - \mathbf{f}_y &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$[(\mathbf{f}_x\nu_x + \mathbf{f}_y\nu_y) - \mathbf{f}_E]^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_E = 0 \quad (51)$$

con

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_x &= \int_b^a \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{t}_x dz & , & & \mathbf{f}_y &= \int_a^b \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{t}_y dz \\ \mathbf{t}_x &= \{\sigma_x^*, \tau_{xy}^*, \tau_{xz}^*\}^T & , & & \mathbf{t}_y &= \{\tau_{yx}^*, \sigma_y^*, \tau_{yz}^*\}^T \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

y las definiciones cinemáticas contenidas en la Tabla II.

Dada una placa rectangular de dimensiones $B \times L$, supongamos que pueden escogerse unas funciones $\Psi_N(x)$ ortogonales y que satisfagan todas las condiciones de contorno en los bordes $x = 0, L$ tales que

$$\mathbf{u}(x, y) = \sum_{N=1}^{\infty} \Psi_N(x) \cdot \mathbf{u}_N(y) \quad (53)$$

Entonces, las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno (50) y (51) que rigen el equilibrio de la placa se transforman en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para cada sumando N del desarrollo en serie (53):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_N} - \frac{d}{dy}(\mathbf{f}_{yN}) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'_N} - \mathbf{f}_{yN} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$[\mathbf{f}_{yN}(y = B) - \mathbf{Q}_{BN}]^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_N(y = B) - [\mathbf{f}_{yN}(y = 0) + \mathbf{Q}_{0N}]^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_N(y = 0) = 0 \quad (55)$$

con

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \mathbf{v}_N^T \cdot \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{v}_N - \mathbf{Q}_N^T \cdot \mathbf{u}_N \right] \quad (56)$$

Las definiciones de todos los sistemas que intervienen en las ecuaciones (54) a (56) se incluyen en la Tabla III.

Variable	Definición	Expresión General	Expresión en coordenadas cartesianas
\mathbf{e}^*	Vector de deformaciones de los puntos de la placa. De 6×1 .	$\mathbf{e}^* = \mathbf{IEd}^*$	$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^* \\ \epsilon_y^* \\ \epsilon_z^* \\ \gamma_{xy}^* \\ \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix}$
\mathbf{B}	Matriz de deformación del espacio placa. De $6 \times 3n$.	$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2]$ $\mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_3 \mathbf{h}'$ $\mathbf{B}_1 = \mathbf{E}_1 \mathbf{h}$ $\mathbf{B}_2 = \mathbf{E}_2 \mathbf{h}$	$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 100 \\ 000 \\ 000 \\ 010 \\ 001 \\ 000 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 000 \\ 010 \\ 000 \\ 100 \\ 000 \\ 001 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 000 \\ 000 \\ 001 \\ 000 \\ 100 \\ 010 \end{bmatrix}$

Tabla II. Definiciones cinemáticas en coordenadas cartesianas.

SISTEMA	DEFINICIÓN
$\mathbf{f}_{yN}(y)$	$\frac{2}{L} \int_{x=0}^L \Psi_N(x) \cdot \mathbf{f}_y(x, y) dx$
$\mathbf{Q}_N(y)$	$\frac{2}{L} \int_{x=0}^L \Psi_N(x) \cdot [\mathbf{h}_a^T \cdot \mathbf{q}_a(x, y) + \mathbf{h}_b^T \cdot \mathbf{q}_b(x, y) + \int_a^b \rho^* \mathbf{h}(z)^T \cdot \mathbf{b}(x, y, z) dz] dx$
\mathbf{Q}_{0N}	$\frac{2}{L} \int_{x=0}^L \Psi_N(x) \cdot \int_a^b \mathbf{h}(z)^T \cdot \mathbf{q}_0(x, z) dz dx$
\mathbf{Q}_{BN}	$\frac{2}{L} \int_{x=0}^L \Psi_N(x) \cdot \int_a^b \mathbf{h}(z)^T \cdot \mathbf{q}_B(x, z) dz dx$
\mathbf{D}_N	$\frac{2}{L} \int_{x=0}^L \hat{\Psi}_N^T \mathbf{D} \hat{\Psi}_N dx$

Tabla III. Análisis armónico, definiciones básicas.

Los restantes elementos contenidos en la ecuación (56) que caracteriza el funcional F , no incluidos en la Tabla III son los siguientes:

$$\mathbf{v}_N(y) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_N(y) \\ \mathbf{u}'_N(y) \end{array} \right\}, \quad \mathbf{u}'_N = \frac{d}{dy} \mathbf{u}_N \quad (57)$$

y

$$\hat{\Psi}_N(x) = \begin{bmatrix} \Psi_N & \mathbf{0} \\ \frac{d}{dx} \Psi_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi_N \end{bmatrix} \quad (58)$$

Nótese también que las condiciones de contorno (55) asociadas a las aristas ($y = 0, B$) hacen intervenir unas fuerzas de borde \mathbf{Q}_{0N} y \mathbf{Q}_{BN} producidas por las presiones aplicadas en estas caras del contorno, \mathbf{q}_0 y \mathbf{q}_B respectivamente.

Por otra parte, el desarrollo en serie de los desplazamientos generalizados $\mathbf{u}(x, y)$ proporciona a su vez la siguiente expresión de los desplazamientos $\mathbf{d}^*(x, y, z)$ de cualquier punto material de la placa:

$$\mathbf{d}^*(x, y, z) = \mathbf{h}(z) \sum_{N=1}^{\infty} \Psi_N(x) \cdot \mathbf{u}_N(y) \quad (59)$$

la cual puede reescribirse como:

$$\mathbf{d}^*(x, y, z) = \sum_{N=1}^{\infty} \Phi_N(x) \cdot \mathbf{d}_N^*(y, z) \quad (60)$$

con

$$\mathbf{d}_N^*(y, z) = \mathbf{h}(z) \cdot \mathbf{u}_N(y) \quad (61)$$

y las funciones $\Phi_N(x)$ también ortogonales, definidas por la relación:

$$\Phi_N(x) \cdot \mathbf{h}(z) = \mathbf{h}(z) \cdot \Psi_N(x), \quad \Phi_N = (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^T)^{-1} \mathbf{h} \cdot \Psi_N \cdot \mathbf{h}^T \quad (62)$$

donde $\mathbf{h}(z)$ caracteriza la hipótesis cinemática adoptada. Nótese que tanto Φ_N como Ψ_N son matrices diagonales. Por ejemplo, para condiciones de simple apoyo en los bordes, las funciones $\Phi_N(x)$ podrían ser:

$$\Phi_N(x) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_N x & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen} \alpha_N x & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen} \alpha_N x \end{bmatrix}, \quad \alpha_N = \frac{N\pi}{L}. \quad (63)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales equivalentes a (54) será, para cada armónico N :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{f}'_{yN} + \mathbf{Q}_N = \mathbf{D}_{N00} \mathbf{u}_N + \mathbf{D}_{N01} \mathbf{u}'_N \\ \mathbf{f}_{yN} = \mathbf{D}_{N10} \mathbf{u}_N + \mathbf{D}_{N11} \mathbf{u}'_N \end{array} \right\} \quad (64)$$

luego, siempre que exista la inversa de \mathbf{D}_{N11}^{-1} tendremos

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{N11}^{-1}\mathbf{D}_{N10} & \mathbf{D}_{N11}^{-1} \\ \mathbf{D}_{N00} - \mathbf{D}_{N01}\mathbf{D}_{N11}^{-1}\mathbf{D}_{N10} & \mathbf{D}_{N01}\mathbf{D}_{N11}^{-1} \end{bmatrix} \quad (65)$$

Además, la relación (58) permite obtener las distintas submatrices de \mathbf{D}_N en función de la subdivisión de \mathbf{D} dada en (29). resultando:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{N00} &= \frac{2}{L} \int_{x=0}^L (\Psi_N \mathbf{D}_{00} \Psi_N + \Psi_N \mathbf{D}_{01} \Psi'_N + \Psi'_N \mathbf{D}_{10} + \Psi_N + \Psi'_N \mathbf{D}_{11} \Psi'_N) dx \\ \mathbf{D}_{N01} &= \frac{2}{L} \int_{x=0}^L (\Psi_N \mathbf{D}_{02} \Psi_N + \Psi'_N \mathbf{D}_{12} \Psi_N) dx \\ \mathbf{D}_{N11} &= \frac{2}{L} \int_{x=0}^L \Psi_N \mathbf{D}_{22} \Psi_N dx \quad , \quad \Psi'_N = \frac{d}{dx} \Psi_N \end{aligned} \quad (66)$$

Las ecuaciones (65) y (66) definen completamente el operador \mathbf{W}_N a falta de precisar la selección de las funciones ortogonales $\Psi_N(x)$ y de adoptar una determinada hipótesis cinemática.

Nótese que en el caso de placas rectangulares, la escritura de \mathbf{W}_N dada en (65) coincide con la presentada para \mathbf{W} en la Parte 1.

APLICACIONES

Particularización de la cinemática CRM a problemas axisimétricos

Adoptaremos en lo sucesivo el modelo CRM, resultando para (10):

$$\mathbf{d}^*(s, \eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \psi_s \\ \omega_\eta \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{h}(\eta) \cdot \mathbf{u}(s) \quad (67)$$

donde u y w son los desplazamientos de los puntos $\mathbf{r}(s, \eta)$ de Ω en las direcciones coordenadas, ψ_s la rotación de la normal a la superficie de referencia en la dirección del meridiano y ω_η su alargamiento unitario.

Con la ayuda de (41) y (47), las matrices \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 valen finalmente:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\mu(s)R_s} & 0 & \frac{\eta}{\mu(s)R_s} \\ \frac{\text{ctg}\phi}{\mu(\theta)R_\theta} & \frac{1}{\mu(\theta)R_\theta} & \frac{\eta \text{ctg}\phi}{\mu(\theta)R_\theta} & \frac{\eta}{\mu(\theta)R_\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\mu(s)R_s} & 0 & \frac{1}{\mu(s)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\mu(s)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \eta \end{bmatrix} \quad (68)$$

Las submatrices que forman el operador \mathbf{D} se calculan a partir de (47)₁ utilizando la definición del operador constitutivo \mathbf{C} dada en (42) junto con (68); adoptando como superficie de referencia la superficie media de la lámina obtendremos:

$$\mathbf{D}_{00} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 \mu d\eta =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{Gh}{R_s^2} + E^* h \left(\frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} \right)^2 & E^* h \frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} \left(\frac{1}{R_\theta} + \frac{\nu^*}{R_s} \right) \\ E^* h \frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} \left(\frac{1}{R_\theta} + \frac{\nu^*}{R_s} \right) & E^* h \left[\left(\frac{1}{R_\theta} + \frac{\nu^*}{R_s} \right)^2 + \frac{1-\nu^{*2}}{R_s^2} \right] \\ -\frac{Gh}{R_s} & 0 \\ \nu^* E^* h \frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} & \nu^* E^* h \left(\frac{1}{R_\theta} + \frac{1}{R_s} \right) \\ -\frac{Gh}{R_s} & \nu^* E^* h \frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} \\ 0 & \nu^* E^* h \left(\frac{1}{R_\theta} + \frac{1}{R_s} \right) \\ Gh + \frac{E^* h^3}{12} \left(\frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} \right)^2 & E^* h^3 \frac{\text{ctg}\phi}{12R_\theta} \left(\frac{1}{R_\theta} + \frac{\nu^*}{R_s} \right) \\ E^* h^3 \frac{\text{ctg}\phi}{12R_\theta} \left(\frac{1}{R_\theta} + \frac{\nu^*}{R_s} \right) & E^* h + \frac{E^* h^3}{12} \left[\left(\frac{1}{R_\theta} + \frac{\nu^*}{R_s} \right)^2 + \frac{1-\nu^{*2}}{R_s^2} \right] \end{bmatrix}$$

(69)₁

$$\mathbf{D}_{01} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mu d\eta =$$

$$\begin{bmatrix} \nu^* E^* h \frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} & -\frac{Gh}{R_s} & 0 & 0 \\ E^* h \left(\frac{1}{R_s} + \frac{\nu^*}{R_\theta} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Gh & \nu^* E^* h^3 \frac{\text{ctg}\phi}{12R_\theta} & 0 \\ \nu^* E^* h & 0 & \frac{E^* h^3}{12} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{\nu^*}{R_\theta} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

(69)₂

$$\mathbf{D}_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mu d\eta =$$

$$\begin{bmatrix} E^* h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Gh & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E^* h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Gh^3}{12} \end{bmatrix}, E^* = 2G(1 + \alpha) \text{ y } \nu^* E^* = 2G\alpha$$

(69)₃

Estas submatrices se han evaluado bajo la hipótesis de lámina delgada (4)₁, la cual permite simplificar los cálculos de las integrales que las definen adoptando $\mu_{(s)} = \mu_{(\theta)} = 1$. Con ellas, resulta elemental determinar la forma explícita del operador **W**:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11}^{-1} \\ \mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01} & \mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{01}\mathbf{D}_{11}^{-1}\frac{\cos\phi}{r}\mathbf{I} \end{bmatrix} \\
 -\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10} &= \frac{1}{1-\nu} \begin{bmatrix} -\nu\frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} & -\left(\frac{1-\nu}{R_s} + \frac{\nu}{R_\theta}\right) & 0 & -\nu \\ \frac{1-\nu}{R_s} & 0 & -(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} & -\left(\frac{1-\nu}{R_s} + \frac{\nu}{R_\theta}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}_{11}^{-1} &= \frac{(1+\nu)}{Eh} \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{12}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{h^2} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta}\right) & \frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta^2} & 0 & \nu\frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} \\ \frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta^2} & \frac{1}{R_\theta^2} & 0 & \frac{\nu}{R_\theta} \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12}\left(\frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta}\right)^2 & h^2\frac{\text{ctg}\phi}{12R_\theta^2} \\ \nu\frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} & \frac{\nu}{R_\theta} & h^2\frac{\text{ctg}\phi}{12R_\theta^2} & 1 + \frac{h^2}{12R_\theta^2} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}_{01}\mathbf{D}_{11}^{-1} - \frac{\cos\phi}{r}\mathbf{I} &= \frac{1}{1-\nu} \begin{bmatrix} -(1-2\nu)\frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} & -\frac{1-\nu}{R_s} & 0 & 0 \\ \frac{1-\nu}{R_s} + \frac{\nu}{R_\theta} & -(1-\nu)\frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & -(1-2\nu)\frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} & 0 \\ \nu & 0 & \frac{1-\nu}{R_s} + \frac{\nu}{R_\theta} & -(1-\nu)\frac{\text{ctg}\phi}{R_\theta} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(70)_{1,2,3,4}

Nos interesaremos a continuación por la composición del vector de esfuerzos generalizados correspondiente a teoría CRM. En virtud de la fórmula (45) este valdrá:

$$\mathbf{f}_s = \int_a^b \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{t}_s \mu(s) d\eta = \int_a^b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{ss}^* \\ \tau_{s\eta}^* \end{Bmatrix} \mu(s) d\eta = \begin{Bmatrix} N_s \\ Q_s \\ M_s \\ M_{s\eta} \end{Bmatrix}$$

$$N_s = \int_a^b \sigma_s^* \mu(s) d\eta, \quad Q_s = \int_a^b \tau_{s\eta}^* \mu(s) d\eta, \quad M_s = \int_a^b \eta \sigma_s^* \mu(s) d\eta, \quad M_{s\eta} = \int_a^b \eta \tau_{s\eta}^* \mu(s) d\eta$$

(71)_{1,2}

Como caso particular de lámina axisimétrica, proponemos a continuación la lámina cilíndrica. El sistema coordenado de estudio sería ahora el descrito en la Figura 3.

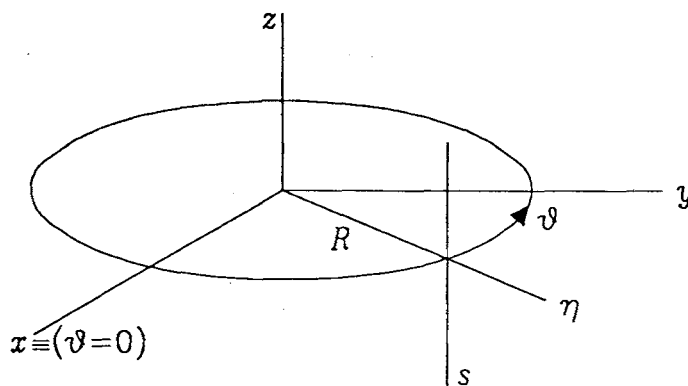


Figura 3. Sistema de referencia de una lámina cilíndrica.

Denominando R al radio de la superficie media de la lámina, el operador \mathbf{W} adopta el siguiente valor:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\nu}{(1-\nu)R} & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu} & \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2 C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{Gh} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu}{(1-\nu)R} & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2 D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{Gh^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{R^2} & 0 & \frac{\nu C}{R} & \frac{\nu}{(1-\nu)R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu C}{R} & 0 & C + \frac{D}{R^2} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{(1-\nu)R} & 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

con las rigideces

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad \text{y} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)^2}$$

Recurriendo a la definición (39), el sistema de ecuaciones diferenciales a integrar queda totalmente definido y es de coeficientes constantes tal y como ya se había anticipado.

Lámina cilíndrica en teoría de Love-Kirchhoff

Supondremos además, en lo sucesivo y para mayor concisión de los cálculos, que se cumple la hipótesis de regularidad de la normal. Utilizando las ecuaciones (68) adecuadamente particularizadas al caso geométrico que nos interesa, se deduce fácilmente:

$$\begin{aligned} \epsilon^* &= \omega_\eta \\ \gamma_{s\eta}^* &= \frac{1}{\mu(s)} \left(\psi_s + \frac{dw}{ds} + \eta \frac{d\omega_\eta}{ds} \right) \end{aligned} \quad (73)$$

y por lo tanto, como la teoría de Love-Kirchhoff exige que $\epsilon_\eta^* = \omega_\eta$ y $\gamma_{s\eta}^*$ sean nulos, se deduce, tal y como se había anticipado, que ω_η ha de ser nulo y que $\psi_s = -w_{,s}$, coincidiendo con la rotación de la tangente en la dirección del meridiano, que denominaremos φ_s en lo sucesivo. Por lo tanto

$$\mathbf{d}^*(s, \eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \eta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi_s \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{h}(\eta) \cdot \mathbf{u}(s) \quad (74)$$

será la ecuación correspondiente a cinemática de Love-Kirchhoff. Por otro lado, recurriendo a la segunda ecuación diferencial que se deduce de (72) tendremos:

$$\frac{dw}{ds} = -\psi_s + \frac{Q_s}{Gh}$$

la cual implica, junto con las observaciones anteriores, que el término Q_s/Gh deba tomarse igual a cero. De ello se deduce que una lámina de Love-Kirchhoff ha de ser infinitamente rígida a cortante. Limitándonos a los grados de libertad w , φ_s y esfuerzos Q_s , M_s consistentes, se llega a la siguiente ecuación de transferencia:

$$\mathbf{E}(s) = \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_s \\ Q_s \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta s \operatorname{ch} \beta s & -(\cos \beta s \operatorname{sh} \beta s + \operatorname{sen} \beta s \operatorname{ch} \beta s)/2\beta \\ \beta(\operatorname{sen} \beta s \operatorname{ch} \beta s - \cos \beta s \operatorname{sh} \beta s) & \cos \beta s \operatorname{ch} \beta s \\ 2\beta^3 D(\cos \beta s \operatorname{sh} \beta s + \operatorname{sen} \beta s \operatorname{ch} \beta s) & -2\beta^2 D \operatorname{sen} \beta s \operatorname{sh} \beta s \\ 2\beta^2 D \operatorname{sen} \beta s \operatorname{sh} \beta s & \beta D(\cos \beta s \operatorname{sh} \beta s - \operatorname{sen} \beta s \operatorname{ch} \beta s) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_0 \\ \varphi_{s0} \\ Q_{s0} \\ M_{s0} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{E}_0$$

$$\begin{bmatrix} (\cos \beta s \operatorname{sh} \beta s - \operatorname{sen} \beta s \operatorname{ch} \beta s)/4\beta^3 D & -\operatorname{sen} \beta s \operatorname{sh} \beta s/2\beta^2 D \\ \operatorname{sen} \beta s \operatorname{sh} \beta s/2\beta^2 D & (\cos \beta s \operatorname{sh} \beta s + \operatorname{sen} \beta s \operatorname{ch} \beta s)/2\beta D \\ \cos \beta s \operatorname{ch} \beta s & \beta(\cos \beta s \operatorname{sh} \beta s - \operatorname{sen} \beta s \operatorname{ch} \beta s) \\ (\cos \beta s \operatorname{sh} \beta s + \operatorname{sen} \beta s \operatorname{ch} \beta s)/2\beta & \cos \beta s \operatorname{ch} \beta s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_0 \\ \varphi_{s0} \\ Q_{s0} \\ M_{s0} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{E}_0 \quad (75)$$

Para ello, basta imponer $\psi_s = \varphi_s = -w_{,s}$ y $\omega_\eta = 0$ en el sistema de ecuaciones diferenciales que se deducen de (72) e integrar directamente las variables seleccionadas en el vector estado $\mathbf{E}(s)$ retenido en (75). La constante β empleada en la ecuación anterior tiene por definición:

$$\beta^4 = \frac{1 - 2\nu}{(1 - \nu)^2} \frac{C}{4DR^2} \quad (76)$$

Otras aplicaciones de esta teoría a distintas morfologías de revolución pueden hallarse en [13].

CONCLUSIONES

En las secciones anteriores se ha mostrado cómo el operador \mathbf{W} , definido en (49) para problemas axisimétricos y en (65) para análisis armónico de placas rectangulares, proporciona sistemáticamente el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden a integrar, mientras que las condiciones de contorno están constituidas respectivamente por las ecuaciones (44) y (55) y se apoyan en la definición de los *esfuerzos generalizados* correspondiente, (45) o (52), siempre asociada a la hipótesis cinemática seleccionada.

Por lo tanto, a lo largo de dos artículos se ha construido una herramienta de análisis conceptualmente única para resolver el problema planteado, independientemente de la caracterización geométrica de la curva directriz de la pieza alargada o de la superficie de referencia de la lámina, aspecto sumamente interesante bajo una doble perspectiva práctica y didáctica.

Nuevamente, los conceptos de *ecuación de rigidez o de transferencia* de las placas y láminas no son más que prestaciones particulares y alternativas del problema de valores

iniciales correspondiente al equilibrio del cuerpo con unas condiciones de contorno dadas. Por lo tanto, la obtención de los sistemas matriciales asociados sigue idénticos pasos que en el caso más común de las piezas alargadas, ecuaciones (38).

Insistiremos nuevamente en que los esfuerzos generalizados aparecen como variables auxiliares en toda la formulación anterior, por lo tanto su interpretación o conocimiento exhaustivo no será indispensable. Éstos, recordemos, no son una propiedad intrínseca del estado tensional sino que dependen directamente de la hipótesis cinemática adoptada.

Finalmente, puede comprobarse fácilmente como la formulación propuesta permite obtener las ecuaciones de equilibrio de las láminas en su forma clásica². Basta expresar $\partial F/\partial \mathbf{u}$ en función de \mathbf{f}_α y \mathbf{f}_β y desarrollar las ecuaciones (36) componente a componente.

REFERENCIAS

1. S. Monleón, "Tópicos del análisis unidimensional de estructuras. Parte 1. Vigas y arcos", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **9**, 2, pp. 161-179, (1993).
2. K. Washizu, "*Variational methods in Elasticity and Plasticity*", Pergamon Press, 2nd. Ed., (1974).
3. E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic bodies", *J. Appl. Mech.*, Vol. **12**, No. 2, pp. 69-77, (1945).
4. R.D. Mindlin, "Influence of rotary influence and shear on flexural vibrations of isotropic, elastic plates", *J. Appl. Mech.*, Vol. **18**, pp. 31-38, (1951).
5. E. Y F. Cosserat, "*Théorie des corps déformables*", Herman éditeurs(1909).
6. A.E.H. Love, "*A treatise on the mathematical theory of elasticity*", 4th ed., (1968).
7. A.E. Green y W. Zerna, "*Theoretical Elasticity*", Oxford University Press, 2nd Ed., (1968).
8. M. Dikmen, "*Theory of thin elastic shells*", Pitman Books Ltd., (1982).
9. P.M. Naghdi, "*The theory of shells and plates*", Handbuch de Physik, Band VI a/2, Springer, (1972).
10. G. Kirchhoff, "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe", *Crelles J.*, Vol. **40**, pp. 51-58, (1850).
11. H.L. Langhaar, "*Energy methods in Applied Mechanics*", Wiley, (1962).
12. R. Courant y D. Hilbert, "*Methods in Mathematical Physics*", Vol. **1**, Interscience, (1953).
13. P. Fuster, S. Monleón, J.F. Moyá y F. Bonet, "Tratamiento semi-analítico unificado de problemas elásticos unidimensionales. Aplicación a láminas delgadas con simetría de revolución", *Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería*, U.P.C., (1986).
14. D.L. Kreider, R.G. Kuller y D.R. Ostberg, "*Elementary differential equations*", Addison-Wesley, (1968).