Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 6, 1 , 97–108(1990)

O MÉTODO DO LAGRANGEANO AUMENTADO NO ESTUDO DE CABOS UMBILICAIS

FERNANDO A. ROCHINHA*
RUBENS SAMPAIO*
y
PATRICK LE TALLEC**

**Departamento de Engenharia Mecânica,
Pontifícia Universidade Católica,
Rio de Janeiro, Brasil*

***Laboratoire Central des Ponts
et Chaussées,
Paris, Francia*

RESUMEN

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo numérico para cabos umbilicais hiperelásticos que experimentem grandes deslocamentos e grandes rotações. O modelo mecânico resulta num sistema não-linear, que é resolvido por um método de decomposição-coordenação via Lagrangeano Aumentado. Este tratamento possibilita a descrição do acoplamento existente entre flexão e torção em cabos submetidos à grandes delocamentos.

SUMMARY

The aim of this paper is to present the numerical modeling of large displacements and large rotations of hyperelastic pipeline. The mechanical model results in a non linear system, that is solved by a Augmented Lagrangian splitting method. This treatement makes possible the description of the coupling which appears between fleixon and torsion in the large dispalcements of a pipeline.

INTRODUÇÃO

Técnicas numéricas capazes de tratar problemas não lineares vem sendo alvo de inúmeros pesquisadores. Isto se deve ao fato que, cada vez mais, surgen modelos sofisticados para a descrição de realidades físicas que, ao fim, geram sistemas de equações não lineares.

O estudo de cabos umbilicais representa un exemplo das situações mencionadas no parágrafo anterior. Na ligação entre plataformas e poços petrolíferos são utilizados cabos de grande comprimento (conhecidos industrialmente como cabos umbilicais) para o transporte de fluidos (lama de perfuração e óleo bruto) e de sinais elétricos. A

Recibido: Marzo 1989

 ISSN 0213–1315

geometria particular destes cabos sugere a utilização de modelos que explorem este fato, minimizando, assim, o custo em projetos e cálculos computacionais. Porém, não deve ser esquecido que os mesmos cabos são, em muitas situações de operação, submetidos à grandes deslocamentos, aonde surgem efeitos complexos como o acoplamento flexão-torção.

Neste trablaho, será utilizado, para a descrição do comportamento mecânico de cabos umbilicais, um modelo unidimensional baseado em[1] que permite, por força das poucas restrições impostas, a descrição do movimento de cabos que experimentam grandes deslocamentos. Este modelo, que utiliza de uma forma sistemática a noção dos vetores diretores[2], se mostra ao mesmo tempo simples e eficaz já que, como será visto mais adiante, conduz a um problema "bem posto" do ponto de vista matemático, pode ser resolvido numericamente e alcança resultados muito bons na descrição de efeitos como o do acoplamento flexão-torção.

Para a solução de problemas de cabos umbilicais é proposta uma formulação variacional consistente que permite uma descomposição via Lagrangeano Aumentado, gerando, assim, um problema de ponto-de sela, que é resolvido por um algoritmo de UZAWA.

Por fim, são apresentado alguns resultados numéricos que evidenciem a capacidade e a eficácia do método proposto.

MODELO MATEMÁTICO

O modelo que será agora apresentado aproveita, desde o início , a forma geométrica particular dos cabos umbilicais. Para tanto, uma configuração qualquer é caracterizada através de três campos vetoriais. O primeiro destes, denotado por r, é o vetor posição, segundo uma origem previamente escolhida, de uma curva c inmersa em $\mathbb{R}^3$. Neste Trabalho, c é interpretada como o lugar geométrico dos centroídes das seções que estão associadas à cada ponto da curva. Os outros dois campos restantes, chamados diretores e denotados por d_1 o d_2, são utilizados na decrição do movimento dessas seções. Os campos citados são parametrizados por **S** o comprimento de arco tomado em **C** (a curva c na configuração de referência).

Os dois diretores são tomados unitários e ortogonais entre si. Esta é uma hipótese restritiva à deformação das seções, já que a posição $x(X)$ de toda particula X do cabo após deformação será dada por

$$x(X) = r(S) + X_1 d_1(S) + X_2 d_2(S) + \psi(S, X_1, X_2) d_3(S) \tag{1}$$

onde X_1 e X_2 são as coordenadas de X na configuração de referência, d_3 é o terceiro diretor tomado igual à $d_1 \times d_2$ e ψ é a função de empenamento como definido em[3]. Fisicamente, (1) representa um movimento aonde as seções dos cabos experimentam apenas pequenas deformações. No entanto, não são feitas restrições sobre r ou mesmo sobre a posição dos diretores, o que implica que os cabos poderão ser submetidos à grandes rotações das seções. Segundo[4], a hipótese de pequenas deformações para as seções fornece resultados bastante realistas.

Da hipótese de ortonormalidade das seções é definido o campo **u** através de

$$d_i' = u \times d_i \qquad (i = 1, 3) \tag{2}$$

onde' designa a derivada em relação a S. Como pode ser encontrada em[4], as componentes de u na base dos diretores: u_1 e u_2 são medidas de flexão, enquanto u_3 é uma medida de torção, . Neste modelo as seções não são obrigadas a permanecerem orvetogonais a c. Assim sendo o cisalhamento é expresso através das componentes v_1 e v_2 do vetor r', o vetor tangente a c sendo o alongamento expresso por $v_3 - 1$.

Como pode ser visto em [1], os u_i e v_i definidos no parágrafo anterior são medidas de deformação objetivas para cabos umbilicais submetidos ao movimento x. Elas são definidas independentemente do observador e permitem. pela intergração de (2) e r', a determinação de x, a menos de um movimento rígido. A bem da verdade, ainda restaria determinar a função ψ. Porém esta é, dentro do regime de pequenas deformações, determinada previamente[3] em função da forma geométrica de seção.

Para que a ambiguidade na determinação de x seja retirada é necessária a prescrição de condiçãoes de contorno. Neste trabalho, estas condições se restringirão à:

$$r(0) = 0 \tag{3}$$

e uma ou mais das seguintes

$$r(L) = r_L \tag{4}$$

$$d_i(0 \;\text{ ou }\; L) = d_L^{\circ} \qquad \text{para} \qquad i \in \{1, 2, 3\} \tag{5}$$

$$d_i(0 \;\text{ ou }\; L) = d_i^{\circ} \qquad \forall \qquad i \in \{1, 2, 3\} \tag{6}$$

onde $S = L$ determina a outra extremidade do cabo. As condições (3) e (4) são prescrições da posição das extremidades enquanto (5) caracteriza uma articulação e (6) o engastamento.

A postulação dos balanços de momento linear e angular conduz, respectivamente, às seguintes equações de equilíbrio para cabos umbilicais:

$$n' + f = 0 \tag{7}$$

$$m' + r' \times n + g = 0 \tag{8}$$

onde n é a força de contato, m o momento interno, f um carregamento externo distribuído e g o momento externo distribuído.

Neste trabalho, os cabos serão considerados hiperelásticos, o que tem um papel fundamental na análise numérica do problema, como pode ser visto em[4]. Portanto, os esforços deste modelo se relacionam com as deformações através de:

$$n = \frac{\partial w}{\partial u_i} d_i \tag{9}$$

$$m = \frac{\partial w}{\partial v_i} d_i \tag{10}$$

onde w é uma densidade de energia elástica que descreve a resposta mecânica dos cabos umbilicais.

Em suma, o problema de encontrar uma configuração de equilíbrio $\Phi = (r, d_i)$ de um cabo consiste em resolver o sistema de equações ordinária à valor de contorno (27)–(28). Por força das restrições escolhidas, permitindo grandes deslocamentos e rotações este sistema é não-linear, o que, do ponto de vista matemático, representa grandes difilcutades na solução. Tal fato exige uma estratégia numérica sofisticada que permite, inclusive, o enfrentamento de problemas com múltiplas soluções, caso comun em sistemas da natureza não linear. Nos próximos capítulos serão mostrados uma formulação matemática consistente para o problema e sua respectiva estratégia numérica.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A escolha da densidade de energia w tem um papel fundamental na formulação do problema de cabos. Por isto, neste trablaho é escolhida a seguinte forma quadrática:

$$\begin{aligned} w(u_i, v_i, S) = {} & \frac{GA}{2}(S)(v_1^2 + v_2^2) + \frac{EA}{2}(S)(v_3 - 1)^2 + \frac{EI_1}{2}(S)u_1^2 + \\ & + \frac{EI_2}{2}(S)u_2^2 + GJ(S)u_3^2 \end{aligned} \tag{11}$$

onde G e E são, respectivamente, os coeficientes de cisalhamento e Young, enquanto I_1, I_2 e J os momentos de inércia. O primeiro termo leva em conta o cisalhamento, o segundo termo o alongamento, os outros dois a flexão e o último a torção. Apesar de (11) ser uma boa escolha do ponto de vista matemático não é possível serem descrito cabos curvos em configuração livres de esforços, já que o gradiente de w é nulo somente para $u_1 = u_2 = u_3 = v_1 = v_2 = v_3 - 1 = 0$.

A partir de (11) é possível o establecimento de equivalência entre o sistema (7)–(8), mais condições de contorno e mais a exigência de ortonormalidade dos diretores com o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar} \quad \Phi(r, d_i) \qquad \text{tal que} \\ &J(\Phi) = \min \quad J(\hat{\Phi}) \\ &\hat{\Phi} \in K \end{aligned} \tag{12}$$

$K = \{ \ \hat{\phi} = (r, d_i) \in H^1(0, L; \mathbb{R}^{12}), \quad d_i d_j = \delta_{ij}(i,j) = 1.3)$, e condições de contorno previamente escolhidos entre (3) e (6) $\}$. Este resultado é encontrado em[4].

O problema (12) admite a seguinte formulação variacional.

Encontrar$\Phi = (r, d_i) \in K$ tal que, $\forall (p, g_i) \in dK(r, d_i)$ se tenha

$$\frac{\partial J}{\partial(r,d_i)}(r,d_i)\cdot(p,g_i)=\int_0^L f\cdot pds \tag{13}$$

onde $J(r,d_i)=\int_0^L w(S,u_i,v_i)dS$ e $dK(r,d_i)$, o espaço tangente à K é dado formalmente por:

$dK(r,d_i)=\{\ (p,g_i)\in H^1(0,L,\mathbb{R}^{12}),\ p(0)=0,\ p(L)=0$, se (4) é imposta, $g_K(0 \text{ ou } L)=0$ se (5) ou (6) são impostas, $\exists U\in H^1(0,L;\mathbb{R}^3)$ com $g_i=U\times d_i(i=1,3)\}$

Como o já esperado o problema variacional (13) é altamente não linear, fato expresso pela não convexidade de K. Neste trabalho, o problema, será tratado via uma técnica de "decomposição-coordenação"por Lagrangeano Aumentado[6], que consiste na introdução de uma variável suplementar$\{\tau_i\}$, sobre a qual é imposta como restrição a igualdade como $\{d_i\}$, na dualização do problema e, ainda, na adição de um termo de regularização,. Assim sendo, é construído o seguinte Lagrangeano Aumentado.

$$L_R(r,d_i,\tau_i,\lambda_i)=J(r,d_i)+\sum_{i=j}^{3}\int_0^L\{\frac{R}{2}|d_i-\tau_i|^2+\lambda_i\cdot(d_i-\tau_i)\}dS \tag{14}$$

onde **R** é um número positivo e arbitrário. A introdução do termo $\frac{R}{2}|d_i-\tau_i|^2$ é justificada em[6], aonde são apresentados alguns resultados numéricos que demonstram que este termo melhora as condições regularidade do problema.

A partir de (14) o siguiente problema de "ponto-de-sela"pode ser construído.

$$\text{Encontrar}\quad \{(r,d_i),\tau_i,\lambda_i\}\in H\times L^2(0,L,0_3^+)\times L^2(0,L,\mathbb{R}^9)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L_R}{\partial(r,d_i)}(r,d_i,\tau_i,\lambda_i)\cdot(p,g_i)=\int_0^L f\cdot pdS, && \forall\ (p,g_i)\in dH\\
&\frac{\partial L_R}{\partial\tau_i}(r,d_i,\tau_i,\lambda_i)\cdot U\times\tau_i=0\ , && \forall\ U\in L^2(0,L;\mathbb{R}^3)\\
&\frac{\partial L_R}{\partial\lambda_i}(r,d_i,\tau_i,\lambda_i)\cdot\mu_i=0, && \forall\ \{\mu_i\}\in L^2(0,L;\mathbb{R}^9)
\end{aligned} \tag{15}$$

onde

$H=\{\ (r,d_i)\in H^1(0,L;\mathbb{R}^{12}),\ r(0)=0,\ (r,d_i)$ satisfazendo condições de contorno escolhidos entre (4 e 6)$\}$

$0_3^+=\{\ \{\tau_i\}(i=1,3)\in\mathbb{R}^9,\ \{\tau_i\}$é um triendo ortonormal$\}$

Em[5] é demostrada que toda solução de problema (15) é, também, uma solução do problema variacional (12).

UM ALGORITMO PARA A FORMULAÇÃO PROPOSTA

A principal vantagem da formulação Lagrangeana (15) reside na possibilidade de utilização de um algoritmo do tipo UZAWA na solução numérica do problema. Associado a um método de relaxação por blocos, esse algoritmo permite a decomposição do problema inicial, altamente não-linear, em uma sequência de problemas simples de serem resolvidas. O algoritmo é formalmente apresentado em seguida.

Escoher $\{\lambda_i^o\}$ em $L^2(0,L;\mathbb{R}^3)$ e $\{\tau_i^{-1}\}$ em $L^2(0,L;0_3^+)$.

$\{\lambda_i^n\}$ e $\{\tau_i^{n-1}\}$ conhecidos, calcular (r^n,d_i^n), $\{\tau_i^n\}$ e $\{\lambda_i^{n+1}\}$ resolvendo iterativamente.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L_R}{\partial(r,d_i)}(r^n,d_i^n,\tau_i^n;\lambda_i^n)\cdot(p,g_i)=\int_0^L f\cdot pdS, && \forall\ (p,g_i)\in dH\quad (r^n,d_i^n)\in H \\ &\frac{\partial L_R}{\partial\tau_i}(r^n,d_i^n,\tau_i^n;\lambda_i^n)\cdot U\times\tau_i^n=0\ , && \forall\ U\in L^2(0,L;\mathbb{R}^3) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\{\tau_i^n\}\in L^2(0,L;0_3^+) \tag{17}$$

$$\lambda_i^{n+1}=\lambda_i^n+R|d_i^n-\tau_i^n| \tag{18}$$

O algoritmo que acaba de ser descrito introduz dois problemas: o primeiro (16), é resolvido ponto a ponto, através de técnicas matriciais e o segundo (17) corresponde ao problema variacional (3) sem a restrição $(r^n,d_i^n)\in K$. Ele pode, então, ser resolvido globalmente via o método dos Elementos Finitos.

O Algorítmo para a solução do problema (16) se baseia na de composição a valor singular[7], introduzindo:

$$B_{ij}=(R\grave{d}_i+\lambda_i)\cdot e_j,\qquad B=Q^gDQ^d \tag{19}$$

$$Q_{ij}^\tau=\tau_i\cdot e_j \tag{20}$$

$$A_{ij}=e_{ijk}U\cdot e_k \tag{21}$$

onde $\{e_i\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, D uma matriz diagonal e Q^g, e Q^d matrizes ortogonais diretas. Assim:

$$\{R(\tau_i-d_i)-\lambda_i\}\cdot U\times\tau_i=\ \text{Traço}\ \{(RQ^\tau-B)^TQ^\tau A\}$$

de (14) e (16) o siguinte problema é encontrado:

Encontrar Q^τ e $L^2(0,L;O_3^+)$ tal que, para toda matriz A antissimétrica, se tenha:

$$\int_o^L \text{Traço } \{(RQ^r - B)^T Q^r A\} dS = 0 \tag{22}$$

e admite como solução

$$Q^r = Q^g Q^d \tag{23}$$

já que:

$$\text{Traço } \{(RQ^g Q^d - B)^T Q^g Q^d A\} = \text{ Traço } \{RA - (Q^d)^r T D Q^d A\} = 0$$

A partir de (23), o algorítmo para (20)é construido como:

. Calcular B através de (25).
. Calcular e tridiagonalizar BB^T.
. Calcular os valores singulares $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ de BB^T.

Seguido pelas fórmulas de Cardan aplicadas ao polinômio característico da forma tridiagonal de BB^T.

. Calcular os vectores própios de BB^T resolvendo

$$BB^T g_j = b_j g_j, \quad |g| = 1$$

. Fazer $D_{11} = \sqrt{b_1}$, $D_{22} = \sqrt{b_2}$, $D_3 3 = \sqrt{b_3}$ signal (det B)
. Fazer $Q^g_{ij} = g_j \cdot e_i$
. Fazer $r_i = (Q^g D^{-1} (Q^g)^T B)_{ij} e_j$

Todos os cálculos acima são feitos ponto a ponto; não requerendo mais do que 80 operações algébracas elementares por ponto.

Para demonstrar o funcionamento da resolução do problema (17) é escolhido,neste trablaho, a seguinte forma para a densidades da energia de deformação:

$$w(u_i, v_i, S) = \frac{EI_1}{2}(S)u_j^2 + \frac{EI_2}{2}(S)u_2^2 + G\frac{I_3}{2}(S)u_3^2 \tag{24}$$

A forma acima difere de (11) por não levar em conta o cisalhamento e o alongamento. Esta escolha, bastante realista para cabos umbilicais, conduz à um problema, do ponto de vista numérico, melhor condicionado[8].

A partir de (24) é obtido o siguiente funcional de energia elástica:

$$J(r, d_i) = \int_0^L \{\frac{E}{2}\{(I_2 + I_3 - I_1)|d_1|^2 + (I_3 + I_1 - I_2)|d_2|^2 + (I_1 + I_2 - I_3)|r''|^2\}\} dS$$

É importante ser lembrado que na expressão acima o cisalhamento não é levado em conta, sendo tal fato expresso por $r' = d_3$.

Por construção de Lagrangeano (14), o problema (17) é equivalente à:

Encontrar $(r^n, d^n,) \in H$ tal que:

$$\frac{\partial J}{\partial(r, d_i)}(r^n, d_i^n) \cdot (p, g_i) = \int_0^L \{f \cdot p - [R(r^n)' - \tau_3^{n-1}) + \lambda_3^n] -$$
$$- p' - [R(d_\alpha^n - \tau_\alpha^{n-1}) + \lambda_\alpha^n] \cdot g_\alpha\} dS \qquad \forall (p, g_i) \in dH \tag{25}$$

Em (25) as variáveis r^n e $d_\alpha^n(\alpha = 1, 2)$ são desacopláveis. O cálculo de r^n se resume, então, a resolução de 3 equações bi-harmônicas:

$$\begin{aligned} &\int_0^L \frac{E}{2}(I_1 + I_2 - I_3)(r^n)'' \cdot p'' dS + R \int_0^L (r^n)' \cdot p' dS = \\ &= \int_0^L (R\tau_3^{n-1} - \lambda_3^n) \cdot p' dS + \int_0^L f \cdot p dS \\ &\qquad \forall p \in d[H^2(0, L; E) + C.C] \end{aligned} \tag{26}$$

enquanto o de $d_\alpha^n(\alpha = (1, 2))$ a resolução de 6 equações harmônicas:

$$\begin{aligned} &\int_0^L \frac{E}{2}(I_2 + I_3 + I_1) d_1' \cdot g' dS + R \int_0^L d_1 \cdot g = \\ &= \int_0^L (R\tau - \lambda_j) \cdot g dS \\ &\int_0^L \frac{E}{2}(I_3 + I_1 + I_2) d_2' \cdot g dS + R \int_0^L d_2 \cdot g = \\ &= \int_0^L (R\tau_2 - \lambda_2) \cdot g dS \\ &\qquad \forall g \in d[H^1(0, L; E) + C.C.] \end{aligned} \tag{27}$$

A discretização das equações (26) e (27) é feita através do método dos Elementos Finitos. Para as equações bi-harmônicas são utilizados elementos de Hernite de grau 3, equanto para as equações harmônicas foram escolhidos elementos de Lagrange de grau 2. Com isto, são obtidas para r 3 elementos finitos, a 4 graus de liberdades cada um, e para d_α 6 elementos finitos independentes, a 3 graus de liberdade cada um. As matrizes resultantes da discretização são fatorizadas pelo método do Cholesky apenas uma vez, já que independem da iteração n de UZAWA.

A convergência da algorítmo de UZAWA é controlada pelos seguintes testes:

$$\frac{(\int_0^L \{|r^n - r^{n-j}|^2 + |(r^n)^1 - (r^{n-1})|^2 + |d_1^n - d_1^{n-1}|^2 + |d_2^n - d_2^{n-1}|^2\} dS)^{\frac{1}{2}}}{(\int_0^L \{|r^n|^2 + |(r^n)|^1 + |d_1^n|^2 + |d_2^n|^2\} dS)^{\frac{1}{2}}} \leq 10^{-5}$$

$$(\int_0^L \{|r' - \tau_3|^2 + |d_1 - \tau_1|^2 + |d_2 - \tau_2|^2\} dS)^{\frac{1}{2}} \leq 10^{-3} \tag{28}$$

A não existência de um teste para os multiplicadores $\{\lambda_i\}$ se deve a dificuldade de convergência destes[9]. Esta dificuldade se reflete no cálculo dos esforços que, ao invés de serem calculadas como uma combinação dos multiplicadores, são obtidos em:

$$\begin{aligned}
&(\text{momento fletor}) \quad & m_f &= \frac{dw}{du_\alpha} d_\alpha = -EI_1(r'' \cdot d_1) + EI_2(r'' \cdot d_1) d_2 \\
&(\text{momento torsor}) \quad & m_T &= \frac{dw}{du_3} d_3 = 2GI_3(d_1' \cdot d_2) r' \\
& & n &= N + F
\end{aligned}$$

onde N é a reação na extremidade $S = L$ e $F(S) = \int_S^L f(t) dt$.

RESULTADOS

Neste capítulo é mostrada uma aplicação da modelagem numérica apresentada. É escolhido um cabo inicialmente retilíneo, com 20 metros de comprimento, imerso no plano x z,engastado em uma extremidade e livre na outra. Sendo adotada a densidade de energia (24) o cabo é considerado inextensível, logo, se for imposto um deslocamento qualquer à extremidade livre, a curva c assume uma forma não retilínea. Portanto, o cabo é submetido a uma flexão. O exemplo que será mostrado, apesar de não representar operações cotidianas de cabos umbilicais, evidencia a capacidade do modelo de descrever o comportamento mecânico dos cabos quando submetidos à grande deslocamentos, inclusive o acoplamento flexão-torção, e demostra, tambén, a eficácia do método numérico utilizado.

O exemplo consiste de um cabo que está engastado na extremidade de coordenadas (0,0,0) e com a outra, de coordenadas (20,0,0), livre. A esta última é imposto um deslocamento prescrito por $y = 20 - x$. Os parâmetros escolhidos para o problema são $EI_1 = 235$ da $N \times m^2$, $EI_2 = 360$ da $N \times m^2$,$EI_3 = 100$ da $N \times m^2$. Os cabos possuem seção elíptica. As condições de contorno são descritas por:

$$r(0) = 0 \quad , \quad r'(0) = i$$

$$d_1(0) = j \quad , \quad d_2(0) = k$$

$$r(L) = (X_F, 20 - X_F, 0)$$

onde $\{i, j, k\}$ é a base vetorial associada ao sistema de coordenadas XYZ e X_F determina o deslocamento imposto.

A Figura 1 mostra a evolução da configuração do cabo $X_F = 19m$ e $X_F = 16m$.

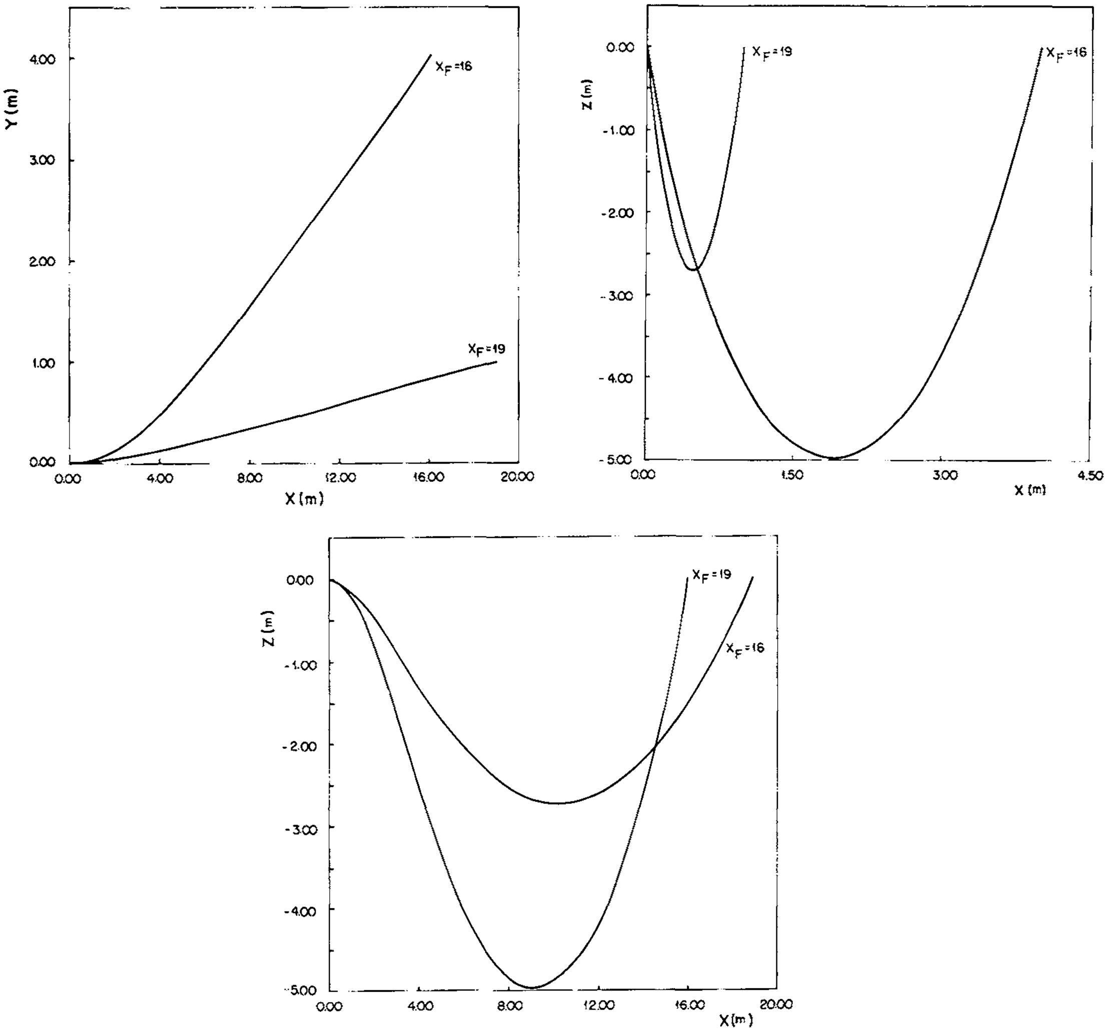

Figura 1. Projeções do cabo planos coordenados X, Y, e Z para $X_F = 16m$ e $X_F = 19m$.

Como já foi dito, o deslocamento imposto à extremidade livre é equivalente a imposição de uma flexão ao cabo. Ao serem analisadas as Figuras 2 e 3 fica claro que associada à esta flexão surge uma torção, o que caracteriza um acoplamento entre as duas deformações.

Todos os ensaios numéricos envolvidos neste exemplo foram feitos num computador Bull DPS 68. A convergência foi alcançada na média em 50 iterações de UZAWA para um $R = 400$. Cada uma das iterações demorou em média 60 segundos.

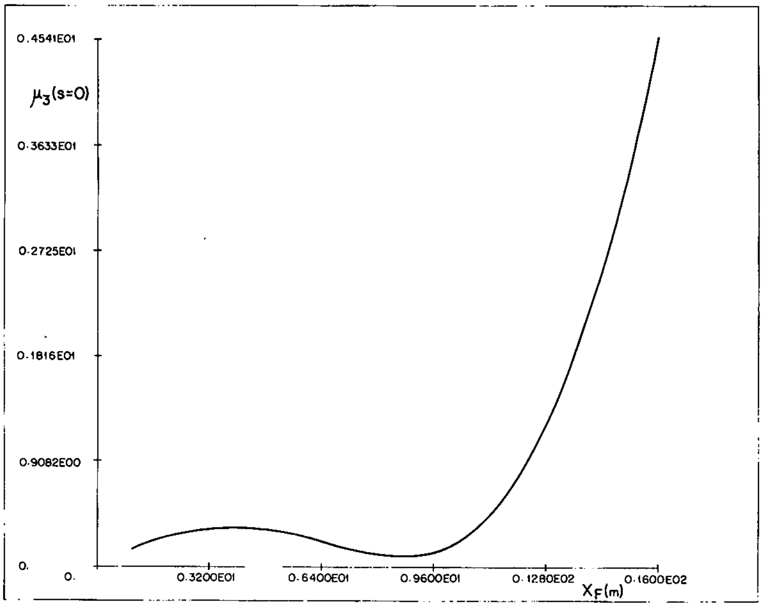

Figura 2. Evolução de torção (u_3) no engaste em funções do deslocamento imposto (X_F).

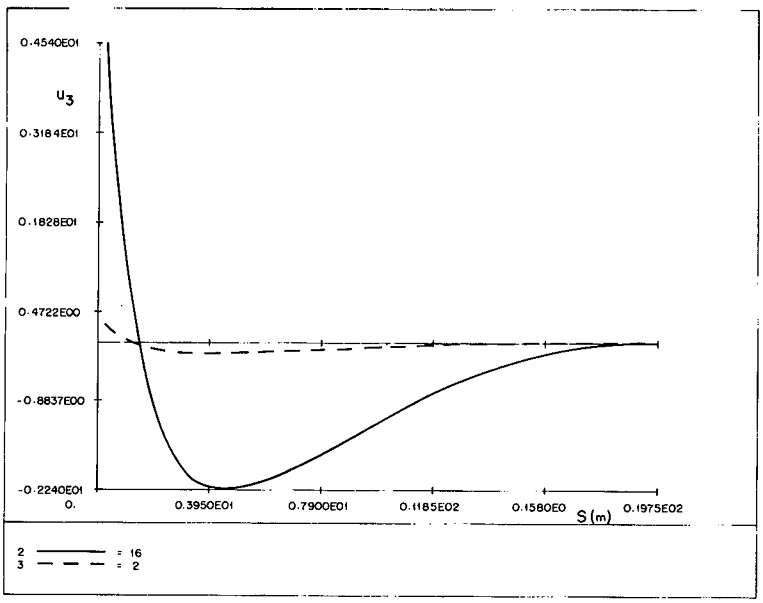

Figura 3. Comparação entre torção experimentada pelo cabo $X_F = 16m$ e $X_F = 2m$.

REFERENCIAS

1. S.S. Antman y C.S. Kenney, "Larged Buckled States of Nonlinearly Elastic Rods under Torsion, Thrust and Gravity", *Arch. Rat Mech. Anal.*, Vol. **76**, pp. 289–337, (1981).

2. E. Cosserat y F. Cosserat, "*Théorie des corps déformables*", Hermann, Paris, (1909).
3. L. Landau y E. Lifchitz, "*Théorie de l'Elasticité*", Editors MIR, Moscou, (1967).
4. F.A. Rochinha, "Uma Contribuição à Teoria de Estruturas Unidimensionais Inelásticas", *Dissertação de Mestrado*, PUC-RJ, 1985.
5. J.F. Bougart, S. Mani y P. Le Tallec, "Modelisatio et Calcul des Grands Deplacements de Tuyaux Elastiques en Flexion et Torsion", *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, a aparecer.
6. M. Fontin y R. Glowinski, "Méthodes de Lagrangien Augmenté", Dunod Bordas, Paris, (1982).
7. G.H. Golub y C.F. Van Loan, "*Matrix Computations*", Johns Hopkins, University Press, Baltimore, (1983).
8. S. Mani, Modelisation et Analyse Numerique des Problemes d'Equilibre d'une Barre Elastique en Grandes Deformations", *These de Doctorat de l'Universite Paris IV*, (1987).
9. P.G. Ciarlet, "Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation", Masson, Paris, (1985).