Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 11, 1, 507–517(1995)

ANÁLISIS NUMÉRICO DE UNA FORMULACIÓN PARA EL PROBLEMA DE FLUENCIA TRANSIENTE

GUILLERMO SÁNCHEZ*
ABIMAEL F.D. LOULA**
y
NELSON MORAGA***

* *Depto. Matemática y C.C., Universidad de Santiago de Chile*
Casilla 307, Correo 2, Santiago de Chile, Chile

***LNCC-CNPq*
Rua Lauro Müller 455, CEP 22290-160, Rio de Janeiro, Brazil

****Depto. Ingeniería Mecánica, Universidad de Santiago de Chile*
Casilla 10233, Santiago de Chile, Chile

RESUMEN

En este trabajo analizamos el problema de fluencia transiente o de elasto-fluencia, para lo cual presentamos una nueva formulación mixta y demostramos el carácter asintótico de la solución. Para obtener la solución de este problema, utilizamos el método de elementos finitos en la aproximación espacial y el esquema de Euler implícito en la discretización temporal. Demostramos estabilidad y convergencia, y presentamos cotas de error para las soluciones de los problemas semi-discreto y totalmente discreto, mostrando que ellos conservan el carácter asintótico de la solución del problema continuo.

SUMMARY

In this work we analyse the problem of transient flow or elastic flow, presenting a new mixed formulation and demostrating the asymptotic nature of the solution. To find the solution for the problem the finite element method is used for the spatial discretisation and the implicit Euler scheme for the domain. We demonstrate stability and convergence and present the error for the solution of the semi–discrete and completely discrete problems showing that they preserve the asymptotic nature of the continuum problem solution.

Recibido: Enero 1995

 ISSN 0213–1315

EL PROBLEMA DE FLUENCIA TRANSIENTE

Por simplicidad, consideraremos solamente condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas. Así nuestro problema de *fluencia transiente* o problema de *elasto-fluencia* puede ser escrito como

Problema T Determinar el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$, $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ y el campo de velocidades $\mathbf{u} : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ tales que

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \qquad \text{en} \qquad \Omega \times [0, \infty) \tag{1}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^c = \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \text{en} \qquad \Omega \times [0, \infty) \tag{2}$$

$$\mathbf{D}^e = \mathbb{C}\dot{\boldsymbol{\sigma}} \qquad \text{en} \qquad \Omega \times [0, \infty) \tag{3}$$

$$\mathbf{D}^c = A(\boldsymbol{\sigma}) \qquad \text{en} \qquad \Omega \times [0, \infty) \tag{4}$$

con condiciones de contorno

$$\mathbf{u} = 0 \qquad \text{en} \qquad \Gamma \times [0, \infty) \tag{5}$$

y condiciones iniciales dadas por la solución del problema *elástico* que consiste en

Problema E Determinar el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^e : \Omega \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ y el campo de desplazamientos $\mathbf{u}^e : \Omega \to \mathbb{R}^2$ tales que

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}^e + \mathbf{f} = 0 \qquad \text{en} \qquad \Omega \tag{6}$$

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{B}\mathbf{u}^e \quad \text{en} \quad \Omega \tag{7}$$

$$\mathbf{D}^e = \mathbb{C}\boldsymbol{\sigma}^e \quad \text{en} \quad \Omega \tag{8}$$

con condición de contorno

$$\mathbf{u}^e = 0 \qquad \text{en} \qquad \Gamma \tag{9}$$

Notemos que la tasa de deformación total está compuesta por una parte *elástica* y otra de *fluencia*, esto es

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^c = \mathbb{C}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + A(\mathbf{S})$$

donde $\mathbb{C}^{-1}$ es el tensor de *elasticidad isotrópica* y $A(\mathbf{S})$ es en general, una función no lineal de la componente desviadora del tensor de tensión

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}$$

siendo p la presión hidrostática y $\mathbf{Bu} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$, el tensor de las tasas de deformaciones.

Es claro que en este problema la componente hidrostática del tensor de tensiones está siempre bien definida toda vez que la deformación elástica es compresible, o sea, $\mathrm{div}\mathbf{u}^e \neq 0$ y siendo

$$p = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{I} \tag{10}$$

de (8) , resulta la siguiente relación constitutiva

$$p^e = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbb{C}^{-1}\mathbf{D}^e) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{div}\mathbf{u}^e \tag{11}$$

donde λ es el módulo de compresibilidad, p^e y $\mathbf{u}^e$ son los campos de presión y de desplazamientos elásticos, en el instante inicial. Consecuentemente, el problema de elasto-fluencia con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas, está bien definido en $U \times V$. En Guerreiro[10] se analiza la siguiente formulación para el problema de fluencia transiente:

Problema M^t Determinar $\{\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{u}(t)\} \in U \times V$ tal que $\forall\, t \in [0, \infty)$

$$-c(\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\tau}) - (A(\boldsymbol{\sigma}(t)), \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}(t)) = 0\,, \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in U \tag{12}$$

$$b(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v})\,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \tag{13}$$

donde

$$(A(\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\tau}) = \int_\Omega A(\mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\tau}\, d\Omega\,, \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in U$$

$$b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \mathbf{Bv}\, d\Omega\,, \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in U\,, \ \forall\, \mathbf{v} \in V$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, d\Omega\,, \quad \forall\, \mathbf{f} \in V^*\,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \quad \text{y}$$

$$c(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_\Omega \mathbb{C}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}\, d\Omega\,, \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in U$$

con condición inicial $\boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}^e$ dada por la solución del problema elástico definido por las ecuaciones (6) - (8) , o su forma variacional

$$-c(\boldsymbol{\sigma}^e, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}^e) = 0\,, \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in U \tag{14}$$

$$b(\boldsymbol{\sigma}^e, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v})\,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \tag{15}$$

siendo U y V los espacios de las tensiones y velocidades y V^* el espacio dual de V, definidos por

$$U = \{\boldsymbol{\tau} = [\tau_{ij}] \ ; \ \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega), i, j = 1, 2\} \text{ y}$$

$$V = \{\mathbf{v} = \{v_i\} \ ; \ v_i \in H_0^1(\Omega) \ , \ i = 1, 2\}$$

La forma bilineal $c(\cdot, \cdot)$ es elíptica y continua, esto es, existen $\gamma_c > 0$ y $M_c < \infty$, tales que

$$c(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) \geq \gamma_c \|\boldsymbol{\tau}\|_U^2 \, , \, \forall \boldsymbol{\tau} \in U \tag{16}$$

$$c(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) \leq M_c \|\boldsymbol{\sigma}\|_U^2 \|\boldsymbol{\tau}\|_U^2 \, , \, \forall \boldsymbol{\sigma} \ , \ \boldsymbol{\tau} \in U \tag{17}$$

Definiendo la norma

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_c = \sqrt{c(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})} \ , \ \forall \boldsymbol{\tau} \in U \tag{18}$$

tenemos

$$\gamma_c \|\boldsymbol{\tau}\|_U \leq \|\boldsymbol{\tau}\|_U \leq M_c \|\boldsymbol{\tau}\|_U \tag{19}$$

o sea, las normas $\|\cdot\|_c$ y $\|\cdot\|_U$ son equivalentes. Debido a este hecho, utilizaremos, indistintamente $\|\cdot\|_c$ o $\|\cdot\|_U$.

En Guerreiro[9] se demuestra el siguiente resultado sobre el comportamiento asintótico de la solución del **Problema** $\mathbf{M}^t$.

Teorema 1 Sean $\{\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{u}(t)\} \in U \times V$ y $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}\} \in U_0 \times V$ soluciones del **Problema** $\mathbf{M}^t$ y **Problema M**, respectivamente. Entonces

$$\lim_{t \to \infty} \|\boldsymbol{\sigma}(t) - (\boldsymbol{\sigma} + c\mathbf{I})\|_U = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}\|_V = 0$$

donde $c \in \mathbb{R}$, representa una presión hidrostática constante.

Presentaremos la siguiente formulación para el problema de fluencia transiente,

Problema $\overline{\mathbf{M}}^t$ Para cada $t \in [0, \infty)$, determinar $\{\{\mathbf{S}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)\}, \{\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)\}\} \in \bar{U} \times \bar{V}$ tal que

$$-c(\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\tau}) - (\bar{A}(\{\mathbf{S}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)\}), \{\mathbf{T}, \boldsymbol{\tau}\}) + \bar{B}(\{\mathbf{T}, \boldsymbol{\tau}\}, \{\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)\}) = 0 \ , \quad \forall \{\mathbf{T}, \boldsymbol{\tau}\} \in \bar{U} \tag{20}$$

$$\bar{B}(\{\mathbf{S}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)\}, \{\boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}\}) = G(\{\boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}\}) \ , \quad \forall \{\boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}\} \in \bar{V} \tag{21}$$

donde

$$
\begin{aligned}
(\bar{A}(\{\mathbf{S}(t),\boldsymbol{\sigma}(t)\}),\{\mathbf{T},\boldsymbol{\tau}\}) = (A(\mathbf{S}(t)),\mathbf{T}) + \delta_1(\boldsymbol{\sigma}_D(t) - \mathbf{S}(t),\boldsymbol{\tau}_D - \mathbf{T}) \\
\{\mathbf{S}(t),\boldsymbol{\sigma}(t)\}\ ,\ \{\mathbf{T},\boldsymbol{\tau}\} \in \bar{U}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$$
\bar{B}(\{\mathbf{T},\boldsymbol{\tau}\},\{\boldsymbol{\mu},\mathbf{v}\}) = -(\boldsymbol{\tau}_D - \mathbf{T},\boldsymbol{\mu}) + (\nabla\mathbf{v}^s,\boldsymbol{\tau})\ ,\quad \{\mathbf{T},\boldsymbol{\tau}\} \in \bar{U}\ ,\ \{\boldsymbol{\mu},\mathbf{v}\} \in \bar{V} \tag{23}
$$

y

$$
G(\{\boldsymbol{\mu},\mathbf{v}\}) = (\mathbf{f},\mathbf{v})\ ,\quad \{\boldsymbol{\mu},\mathbf{v}\} \in \bar{V}
$$

con condición inicial $\boldsymbol{\sigma}^e = \boldsymbol{\sigma}(0)$ dada por la solución del problema elástico definido por las ecuaciones

$$
-c(\boldsymbol{\sigma}^e,\boldsymbol{\tau}) + (\boldsymbol{\tau},\nabla\mathbf{u}_0^s) = 0\ ,\quad \forall\boldsymbol{\tau} \in U \tag{24}
$$

$$
(\nabla\boldsymbol{\sigma}^e,\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v})\ ,\quad \forall\mathbf{v} \in V \tag{25}
$$

La situación límite de este problema corresponde al
Problema $\overline{\mathbf{M}}$ Determinar $\{\{\mathbf{S},\boldsymbol{\sigma}\},\{\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u}\}\} \in \bar{U}\times\bar{V}$ tal que

$$
\Big(\bar{A}(\{\mathbf{S},\boldsymbol{\sigma}\}),\{\mathbf{T},\boldsymbol{\tau}\}\Big) + \bar{B}(\{\mathbf{T},\boldsymbol{\tau}\},\{\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u}\}) = 0\ ,\quad \forall\{\mathbf{T},\boldsymbol{\tau}\} \in \bar{U} \tag{26}
$$

$$
\bar{B}(\{\mathbf{S},\boldsymbol{\sigma}\},\{\boldsymbol{\mu},\mathbf{v}\}) = G(\{\boldsymbol{\mu},\mathbf{v}\})\ ,\quad \forall\{\boldsymbol{\mu},\mathbf{v}\} \in \bar{V} \tag{27}
$$

donde

$$
G(\{\boldsymbol{\mu},\mathbf{v}\}) = -(\mathbf{f},\mathbf{v})
$$

estudiado por Sánchez[15].

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA SOLUCIÓN

El comportamiento asintótico de la solución queda de manifiesto por el siguiente resultado:

Teorema 2 Sean $\{\{\mathbf{S}(t),\boldsymbol{\sigma}(t)\},\{\boldsymbol{\lambda}(t),\mathbf{u}(t)\}\}$ y $\{\{\mathbf{S}^\infty,\boldsymbol{\sigma}^\infty\},\{\boldsymbol{\lambda}^\infty,\mathbf{u}^\infty\}\} \in \bar{U}\times\bar{V}$, soluciones del **Problema $\overline{\mathbf{M}}^t$** y **Problema $\overline{\mathbf{M}}$** , respectivamente. Entonces

$$
\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}^\infty\|_U = 0 \tag{28}
$$

$$
\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{\sigma}(t) - (\boldsymbol{\sigma}^\infty + C\mathbf{I})\|_U = 0 \tag{29}
$$

$$
\lim_{t\to\infty} \|\{\boldsymbol{\lambda}(t) - \{\boldsymbol{\lambda}^\infty\|_U = 0 \tag{30}
$$

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^{\infty}\|_V = 0 \tag{31}$$

donde $C \in \mathbb{R}$, representa una presión hidrostática constante.

Aunque la tasa de deformación del problema transiente sea compresible, ella tiende a un límite incompresible, por lo que, el método discreto utilizado debe ser capaz de representarla adecuadamente en este límite. Este comportamiento asintótico de la solución del problema transiente ha permitido obtener soluciones aproximadas del problema de fluencia estacionaria vía solución del problema de elasto-fluencia.

APROXIMACIONES POR ELEMENTOS FINITOS

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um dominio poligonal discretizado por uma malla uniforme de N_e elementos finitos tales que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \bar{\Omega}^e \qquad \text{y} \qquad \Omega^e \cap \Omega^f = \emptyset\,, \quad e \neq f$$

donde Ω^e denota el interior del elemento e, y $\bar{\Omega}^e$ su clausura. Sea $Q_h^l(\Omega)$ el espacio de clase C^{-1} , construído con interpolaciones polinomiales de elementos finitos de grado $l \geq 0$, donde h denota el parámetro de malla, esto es $h = \max h_e$, $e = 1, 2, \dots, N_e$, siendo h_e el diámetro del elemento e . Sea $S_h^k(\Omega) = Q_h^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ el espacio de clase C^0 construído con interpolaciones polinomiales de elementos finitos de grado k que se anulan en la frontera de $\bar{\Omega}$.

Definamos las aproximaciones para U y V como $U_h^l = (Q_h^l)^2 \subset U$ y $V_h^k = (S_h^k)^2 \subset V$, respectivamente. Definamos, además $U_{Th}^l = U_h^l \cap U_T$; $U_{0h}^l = U_h^l \cap U_0$ y $Q_{0h}^l = Q_h^l \cap L_0^2(\Omega)$.

En los espacios de elementos finitos $\bar{U}_h = U_{Th} \times U_h^l$ y $\bar{V}_h = U_{Th} \times V_h^k$, definimos la siguiente aproximación del **Problema** $\overline{\mathbf{M}}^t$.

Problema$\overline{\mathbf{PG}}_h^t$ Para cada $t \in [0, \infty)$, determinar $\{\{\mathbf{S}_h(t), \boldsymbol{\sigma}_h(t)\}, \{\boldsymbol{\lambda}_h(t), \mathbf{u}_h(t)\}\}$ $\in \bar{U}_h \times \bar{V}_h$ tal que

$$\begin{aligned} -c(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_h(t), \boldsymbol{\tau}_h) - (\bar{A}_h(\{\mathbf{S}_h(t), \boldsymbol{\sigma}_h(t)\}), \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}) + \bar{B}(\{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}, \{\boldsymbol{\lambda}_h(t), \mathbf{u}_h(t)\}) = \\ = F_h(\{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\})\,, \quad \forall \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\} \in \bar{U}_h \end{aligned} \tag{32}$$

$$\bar{B}(\{\mathbf{S}_h(t), \boldsymbol{\sigma}_h(t)\}, \{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\}) = G(\{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\})\,, \quad \forall \{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\} \in \bar{V}_h \tag{33}$$

donde

$$(\bar{A}_h(\{\mathbf{S}_h(t), \boldsymbol{\sigma}_h(t)\}), \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}) = (\bar{A}(\{\mathbf{S}_h(t), \boldsymbol{\sigma}_h(t)\}), \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}) + \frac{\delta_2 h^2}{\theta}(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}_h, \mathrm{div}\boldsymbol{\tau}_h)_h$$

$$F_h(\{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}) = \frac{\delta_2 h^2}{\theta}(\mathbf{f}, \mathrm{div}\boldsymbol{\tau}_h)_h$$

con condición inicial $\boldsymbol{\sigma}_h(0) = \boldsymbol{\sigma}_h^e$ dada por la solución del problema elástico

Problema$\overline{\mathbf{PG}}_h^e$ Para $t = 0$, determinar $\{\{\mathbf{S}_h^e, \boldsymbol{\sigma}_h^e\}, \{\boldsymbol{\lambda}_h^e, \mathbf{u}_h^e\}\} \in \bar{U}_h \times \bar{V}_h$ tal que

$$c_h(\boldsymbol{\sigma}_h^e, \boldsymbol{\tau}_h) = \bar{B}(\{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}, \{\boldsymbol{\lambda}_h^e, \mathbf{u}_h^e\}) - \frac{\delta_2 h^2}{\theta}(\mathbf{f}, \mathrm{div}\boldsymbol{\tau}_h)_h \ , \quad \forall \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\} \in \bar{U}_h \tag{34}$$

$$\bar{B}(\{\mathbf{S}_h^e, \boldsymbol{\sigma}_h^e\}, \{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\}) = G(\{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\}) \ , \quad \forall \{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\} \in \bar{V}_h \tag{35}$$

La formulación presentada como **Problema** $\overline{\mathbf{PG}}_h^t$ es variacionalmente consistente, o sea, si $\{\{\mathbf{S}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)\}, \{\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)\}\}$ es solución del **Problema** $\overline{\mathbf{M}}^t$, entonces

$$\begin{aligned} -c(\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\tau}_h) - (\bar{A}_h(\{\mathbf{S}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)\}), \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}) + \bar{B}(\{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}, \{\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)\}) = \\ = F_h(\{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}) \ , \quad \forall \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\} \in \bar{U}_h \end{aligned} \tag{36}$$

$$\bar{B}(\{\mathbf{S}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)\}, \{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\}) = G(\{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\}) \ , \quad \forall \{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\} \in \bar{V}_h \tag{37}$$

En Sánchez[15] se presenta la siguiente formulación de Petrov-Galerkin para el problema de fluencia estacionaria:

Problema $\overline{\mathbf{PG}}_h$ Determinar $\{\{\mathbf{S}_h, \boldsymbol{\sigma}_h\}, \{\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{u}_h\}\} \in \bar{U}_h^l \times \bar{V}_h^k$ tal que

$$\Big(\bar{A}_h(\{\mathbf{S}\ \boldsymbol{\sigma}_h\}), \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}\Big) + \bar{B}(\{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}, \{\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{u}_h\}) = F_h(\{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}) \ , \ \forall \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\} \in \bar{U}_h^l$$

$$\bar{B}(\{\mathbf{S}_h, \boldsymbol{\sigma}_h\}\ \{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\}) = G(\{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\}) \ , \ \forall \{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\} \in \bar{V}_h^k$$

donde

$$\Big(\bar{A}_h(\{\mathbf{S}_h, \boldsymbol{\sigma}_h\}), \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}\Big) = \Big(\bar{A}(\{\mathbf{S}_h, \boldsymbol{\sigma}_h\}), \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}\Big) + \frac{\delta_2 h^2}{\theta}(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}_h, \mathrm{div}\boldsymbol{\tau}_h)_h$$

$$\bar{B}(\{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}, \{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\}) = (\boldsymbol{\tau}_{Dh} - \mathbf{T}_h, \boldsymbol{\mu}_h) - (\nabla \mathbf{v}_h^s, \boldsymbol{\tau}_h)$$

$$F_h(\{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}) = -\frac{\delta_2 h^2}{\theta}(\mathbf{f}, \mathrm{div}\boldsymbol{\tau}_h)_h \ \text{ y}$$

$$G(\{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\}) = -(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)$$

siendo $(\cdot,\cdot)_h$ es un producto escalar dependiente de la malla.

En el resultado siguiente se demuestra que cuando $t \to \infty$, la solución de **Problema** $\overline{\mathbf{PG}}_h^t$ tiende a la solución del problema de fluencia estacionaria, **Problema** $\overline{\mathbf{PG}}_h$, salvo un modo de presión globalmente constante. En este punto observemos que p_h está definido en Q_h y no en Q_{0h} y por lo tanto, al hacer la descomposición $q_h = \bar{q}_h + q_h^*$, la parte $\bar{p}_h$ no incluye solo el modo seccionalmente constante con media global nula, sino también el modo globalmente constante.

Teorema 3 Sean $\{\{\mathbf{S}_h(t), \boldsymbol{\sigma}_h(t)\}, \{\boldsymbol{\lambda}_h(t), \mathbf{u}_h(t)\}\}$ y $\{\{\mathbf{S}_h^\infty, \boldsymbol{\sigma}_h^\infty\}, \{\boldsymbol{\lambda}_h^\infty, \mathbf{u}_h^\infty\}\}$ las soluciones de **Problema** $\overline{\mathbf{PG}}_h^t$ y **Problema** $\overline{\mathbf{PG}}_h$, respectivamente. Entonces, para $k \geq 2$,

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{S}_h(t) - \mathbf{S}_h^\infty\|_U = 0 \tag{38}$$

$$\lim_{t \to \infty} \|\boldsymbol{\sigma}_h(t) - (\boldsymbol{\sigma}_h^\infty + c_h \mathbf{I})\|_U = 0 \tag{39}$$

$$\lim_{t \to \infty} \|\{\boldsymbol{\lambda}_h(t) - \{\boldsymbol{\lambda}_h^\infty\|_U = 0 \tag{40}$$

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}_h^\infty\|_V = 0 \tag{41}$$

donde $c_h \in \mathbb{R}$, representa una presión hidrostática constante.

ANÁLISIS NUMÉRICO DEL PROBLEMA SEMI-DISCRETO

Utilizaremos la metodología de análisis de problemas parabólicos presentada por Johnson y Thomée, para obtener estimaciones del error para el **Problema** $\overline{\mathbf{PG}}_h^t$.

Definimos una *proyección elíptica*, $\{\{\bar{\mathbf{S}}(t), \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)\}, \{\bar{\boldsymbol{\lambda}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)\}\} \in \bar{U}_h \times \bar{V}_h$, de la solución exacta $\{\{\mathbf{S}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)\}, \{\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)\}\} \in \bar{U} \times \bar{V}$ del **Problema** $\overline{\mathbf{M}}^t$, como la solución del siguiente problema elíptico discreto

$$\begin{aligned} &\hat{A}_h(\{\bar{\mathbf{S}}_h(t), \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h(t)\}, \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}) - \bar{B}(\{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}, \{\{\bar{\boldsymbol{\lambda}}_h(t), \bar{\mathbf{u}}_h(t)\}) = \\ &= \hat{A}_h(\{\mathbf{S}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)\}, \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}) - \bar{B}(\{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}, \{\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)\}), \quad \forall \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\} \in \bar{U}_h \end{aligned} \tag{42}$$

$$\bar{B}(\{\bar{\mathbf{S}}_h(t), \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h(t)\}, \{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\}) = \bar{B}(\{\mathbf{S}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)\}, \{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\}), \quad \forall \{\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_h\} \in \bar{V}_h \tag{43}$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{A}_h(\{\mathbf{S}_h, \boldsymbol{\sigma}_h\}, \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\}) = (\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + \delta_1(\boldsymbol{\sigma}_{Dh} - \mathbf{S}_h, \boldsymbol{\tau}_{Dh} - \mathbf{T}_h) + \frac{\delta_2 h^2}{\theta}(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}_h, \mathrm{div}\boldsymbol{\tau}_h)_h \\ \forall \{\mathbf{S}_h, \boldsymbol{\sigma}_h\}, \ \{\mathbf{T}_h, \boldsymbol{\tau}_h\} \in \bar{U}_h \end{aligned} \tag{44}$$

Haciendo

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{S}} = \mathbf{S}(t) - \bar{\mathbf{S}}_h(t) \qquad \mathbf{e}_{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_h(t) - \bar{\mathbf{S}}_h(t) \tag{45}$$

$$\boldsymbol{\rho}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}(t) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h(t) \qquad \mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}_h(t) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h(t) \tag{46}$$

$$\boldsymbol{\rho}_\lambda = \boldsymbol{\lambda}(t) - \bar{\boldsymbol{\lambda}}_h(t) \qquad \mathbf{e}_\lambda = \boldsymbol{\lambda}_h(t) - \bar{\boldsymbol{\lambda}}_h(t) \tag{47}$$

$$\boldsymbol{\rho}_\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h(t) \qquad \mathbf{e}_\mathbf{u} = \mathbf{u}_h(t) - \bar{\mathbf{u}}_h(t) \tag{48}$$

obtenemos

$$\|\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}_h(t)\|_U \leq \|\boldsymbol{\rho}_\mathbf{S}\|_U + \|\mathbf{e}_\mathbf{S}\|_U \tag{49}$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}(t) - \boldsymbol{\sigma}_h(t)\|_{h,U} \leq \|\boldsymbol{\rho}_\sigma\|_{h,U} + \|\mathbf{e}_\sigma\|_{h,U} \tag{50}$$

$$\|\boldsymbol{\lambda}(t) - \boldsymbol{\lambda}_h(t)\|_U \leq \|\boldsymbol{\rho}_\lambda\|_U + \|\mathbf{e}_\lambda\|_U \tag{51}$$

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_V \leq \|\boldsymbol{\rho}_\mathbf{u}\|_V + \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_V \tag{52}$$

Los errores $\|\boldsymbol{\rho}_\mathbf{S}\|_U$, $\|\boldsymbol{\rho}_\sigma\|_{h,U}$, $\|\boldsymbol{\rho}_\lambda\|_U$ y $\|\boldsymbol{\rho}_\mathbf{u}\|_V$, de la proyección elíptica pueden ser estimados a partir del análisis numérico clásico para problemas de elasticidad compresible, esto es

$$\|\boldsymbol{\rho}_\mathbf{S}\|_U \leq C(h^{l+1}|\mathbf{S}|_{l+1} + h^{l+1}|\boldsymbol{\sigma}|_{l+1} + h^{l+1}|\boldsymbol{\lambda}|_{l+1} + h^k|\mathbf{u}|_{k+1}) \tag{53}$$

$$\|\boldsymbol{\rho}_\sigma\|_{h,U} \leq C(h^{l+1}|\mathbf{S}|_{l+1} + h^{l+1}|\boldsymbol{\sigma}|_{l+1} + h^{l+1}|\boldsymbol{\lambda}|_{l+1} + h^k|\mathbf{u}|_{k+1}) \tag{54}$$

$$\|\boldsymbol{\rho}_\lambda\|_U \leq C(h^{l+1}|\mathbf{S}|_{l+1} + h^{l+1}|\boldsymbol{\sigma}|_{l+1} + h^{l+1}|\boldsymbol{\lambda}|_{l+1} + h^k|\mathbf{u}|_{k+1}) \tag{55}$$

$$\|\boldsymbol{\rho}_\mathbf{u}\|_V \leq C(h^{l+1}|\mathbf{S}|_{l+1} + h^{l+1}|\boldsymbol{\sigma}|_{l+1} + h^{l+1}|\boldsymbol{\lambda}|_{l+1} + h^k|\mathbf{u}|_{k+1}) \tag{56}$$

A continuación mostraremos un resultado sobre la convergencia del **Problema** $\overline{\mathbf{PG}}_h^t$.

Teorema 4 Sean $\{\mathbf{S}(t), \boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)\}$ y $\{\mathbf{S}_h(t), \boldsymbol{\sigma}_h(t), \boldsymbol{\lambda}_h(t), \mathbf{u}_h(t)\}$ soluciones del **Problema** $\overline{\mathbf{M}}^t$ y del **Problema** $\overline{\mathbf{PG}}_h^t$, respectivamente. Entonces $\forall l \geq k \geq 2$ y $\forall t \in [0, \infty)$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}_h(t)\|_U \leq Ch^k \sup_{s \leq t} \Big(&|\mathbf{S}(s)|_k + |\boldsymbol{\sigma}(s)|_k + |\boldsymbol{\lambda}(s)|_k + |\mathbf{u}(s)|_{k+1} + \\ &+ |\dot{\mathbf{S}}(s)|_k + |\dot{\boldsymbol{\sigma}}(s)|_k + |\dot{\boldsymbol{\lambda}}(s)|_k + |\dot{\mathbf{u}}(s)|_k \Big)\end{aligned} \tag{57}$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}(t)-\boldsymbol{\sigma}_h(t)\|_{h,U} \leq Ch^k \sup_{s\leq t}\Big(|\mathbf{S}(s)|_k+|\boldsymbol{\sigma}(s)|_k+|\boldsymbol{\lambda}(s)|_k+|\mathbf{u}(s)|_{k+1}+ \\ +|\dot{\mathbf{S}}(s)|_k+|\dot{\boldsymbol{\sigma}}(s)|_k+|\dot{\boldsymbol{\lambda}}(s)|_k+|\dot{\mathbf{u}}(s)|_k\Big) \tag{58}$$

$$\|\boldsymbol{\lambda}(t)-\boldsymbol{\lambda}_h(t)\|_{U} \leq Ch^k \sup_{s\leq t}\Big(|\mathbf{S}(s)|_k+|\boldsymbol{\sigma}(s)|_k+|\boldsymbol{\lambda}(s)|_k+|\mathbf{u}(s)|_{k+1}+ \\ +|\dot{\mathbf{S}}(s)|_k+|\dot{\boldsymbol{\sigma}}(s)|_k+|\dot{\boldsymbol{\lambda}}(s)|_k+|\dot{\mathbf{u}}(s)|_k\Big) \tag{59}$$

$$\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}_h(t)\|_{V} \leq Ch^k \sup_{s\leq t}\Big(|\mathbf{S}(s)|_k+|\boldsymbol{\sigma}(s)|_k+|\boldsymbol{\lambda}(s)|_k+|\mathbf{u}(s)|_{k+1}+ \\ +|\dot{\mathbf{S}}(s)|_k+|\dot{\boldsymbol{\sigma}}(s)|_k+|\dot{\boldsymbol{\lambda}}(s)|_k+|\dot{\mathbf{u}}(s)|_k\Big) \tag{60}$$

CONCLUSIONES

La formulación mixta presentada para el problema de fluencia transiente se obtuvo introduciendo dos nuevas variables: la tensión desviadora $\mathbf{S}$, que es una variable primal, y el multiplicador $\boldsymbol{\lambda}$ asociado a la restricción $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}_D$.

Se obtuvo cotas para el error y tasas de convergencia de la solución aproximada al utilizar el método de Petrov-Galerkin. Se demostró el comportamiento asintótico de la solución. Usando la idea de la proyección elíptica, se demostró que el método de Petrov-Galerkin, al ser aplicado al problema semi-discreto, converge con el mismo orden que el problema estacionario.

AGRADECIMIENTOS

A DICYT de la Universidad de Santiago de Chile, y al LNCC-CNPq, donde se realizó gran parte de este trabajo.

REFERENCIAS

1. R. Feijóo y E. Taroco, "Algoritmos Numéricos en Creep Secundario", *Anais do II Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia e IV Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil*, Curitiba, pp. 113-130, (1980).
2. R. Feijóo, E. Taroco y J.N.C. Guerreiro, "Métodos Computacionales en el Análisis de Tensiones", *Encontro sobre Análise de Componentes Estruturais em Temperaturas Elevadas*, Rio de Janeiro, Brazil, (1983).
3. M. Fortin, "Old and New Finite Elements for Incompressible Flows", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 1, pp. 347-431, (1981).

4. M. Fortin y R. Glowinski, "Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems", (1983).
5. L.P. Franca, *New Mixed Finite Element Methods*, Ph. D. Dissertation, Stanford University, (1987).
6. L.P. Franca, T.J.R. Hughes, A.F.D. Loula y I. Miranda, "A New Family of Stable Elements of Nearly Incompressible Elasticity Based on a Mixed Petrov-Galerkin Finite Element Formulation", *Numerische Matematik*, Vol. **53**, pp. 123-141, (1988).
7. R. Glowinski, "Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems", Springer-Verlag, (1984).
8. R. Glowinski y P. Le Tallec, "Augmented Lagrangian and Operator–Splitting Methods in Nonlinear Mechanics", SIAM, (1989).
9. J.N.C. Guerreiro, *Novos Métodos de Elementos Finitos Mistos para Análise de Fluência*, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, (1988).
10. J.N.C. Guerreiro y A.F.D. Loula, "Finite Element Analysis of Transient Creep Problems", *Compuational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **117**, pp. 309–329, (1994).
11. J.N.C. Guerreiro, A.F.D. Loula y G. Sánchez, " Una Formulación de Petrov-Galerkin para el Problema de Fluencia Estacionaria", *Applied Mathematics for Engineering Sciences*, pp. 239–251, (1991).
12. C. Johnson y V. Thomée, "Error Estimates for Some Mixed Finite Element Methods for Parabolic Problems", *Revue Française d'Automatique Informatique et Recherche Opérationnelle*, Ser. Rouge Anal Numér. **15**, pp. 41-78, (1981).
13. A.F.D. Loula y J.N.C. Guerreiro, "A New Finite Element Method for Nonlinear Creeping Flows", I Pan American Congress of Applied Mechanics, Rio de Janeiro, January, Brazil, (1989).
14. A.F.D. Loula y J.N.C. Guerreiro, "Finite Element Analysis of Nonlinear Creeping Flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **79**, pp. 87–109, (1990).
15. G. Sánchez, *Análise Numérica de Problemas de Fluência*, Tesis de doctorado, IM-UFRJ, (1993).
16. G. Sánchez, A.F.D. Loula, J.N.C. Guerreiro, "Algoritmos para Problemas Elípticos Não Lineares com Restrições", XV CNMAC, São Carlos, S.P., (1992).
17. G. Sánchez, A.F.D. Loula y J.N.C. Guerreiro, "Algorithms to Solve Nonlinear Steady-State Creep Flow Problems", *II Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, La Coruña, España, (1993).