

DETERMINACIÓN DE AUTOVALORES USANDO EL MÉTODO OPTIMIZADO DE RAYLEIGH-RITZ Y “PSEUDO” DESARROLLOS DE FOURIER

P.A.A. LAURA
D.V. BAMBILL
R.E. ROSSI
P. DÍAZ
V.A. JEDERLINIC
y
K. RODRÍGUEZ

*Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET)
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca, Argentina
Fax: + 54-91-551447 E-mail: dbambill@criba.edu.ar*

RESUMEN

Hace algo más de un siglo Lord Rayleigh sugirió el uso de un parámetro de optimización en las funciones coordenadas polinómicas a ser utilizadas en la aplicación de su actualmente famoso método, teniendo como meta el minimizar el autovalor determinado.

Tres décadas después el célebre analista y diseñador de sistemas mecánicos, Stodola, utilizó este enfoque al determinar la frecuencia fundamental de un álabe. Linus Pauling y Bright-Wilson implementaron el enfoque utilizando funciones exponenciales en problemas de mecánica cuántica y Timoshenko y Goodier también lo hicieron, utilizando también funciones exponenciales, en un problema de torsión de barras elásticas.

En este trabajo se presentan aplicaciones del criterio de Rayleigh, pero difiriendo del enfoque de los autores citados, se usan funciones trigonométricas que contienen parámetros de optimización en su argumento, tomando como sistemas mecánicos vibrantes casos de placas o losas rectangulares con un borde libre.

EINGENVALUE DETERMINATION USING THE OPTIMIZED METHODS OF RAYLEIGH-RITZ AND PSEUDO FOURIER DEVELOPMENTS

SUMMARY

Over 100 years ago Lord Rayleigh suggested the inclusion of a parameter γ , as an exponent in one of the terms of the expression which constitutes the proposed coordinate function. Minimization of the desired eigenvalue with respect to γ allows for its optimization.

Recibido: Febrero 1997

Well known authors like Stodola, the Nobel Laureate Linus Pauling and his eminent associate Bright-Wilson and Timoshenko and Goodier have employed the approach in the first half of the XX century and in recent years, several researchers from the USA and Argentina, have used it extensively.

The present paper reports numerical experiments performed by the authors where the optimization parameters γ_n are contained in the argument of a trigonometric expansion.

The method is applied in the case of a vibrating rectangular plate with a free edge and other combinations of boundary conditions in the other three edges. Finally a few situations where rectangular holes are practiced in the plate, are considered.

INTRODUCCIÓN

Hace más de 120 años que Lord Rayleigh propuso su actualmente famoso método, piedra basal de una de las metodologías más utilizadas en la solución aproximada de problemas de la mecánica del continuo, tanto en lo que se refiere a enfoques analíticos como en lo que concierne a técnicas numéricas que discretizan el sistema. Con posterioridad, y ya hace más de un siglo, Rayleigh sugirió el uso de un parámetro exponencial en las funciones coordenadas polinómicas que permitiese optimizar el autovalor buscado.

Varias décadas después Stodola utilizó esta técnica de optimización en la determinación de la frecuencia fundamental de un álabe; Linus Pauling y Bright-Wilson la aplicaron en problemas de mecánica cuántica y Timoshenko y Goodier en un problema de torsión de barras elásticas. Estos tres últimos autores emplearon el enfoque incluyendo el parámetro de optimización en el exponente de funciones exponenciales.

Más recientemente Schmidt y Bert, independientemente utilizaron la técnica, desconociendo la sugerencia de Lord Rayleigh, en diversos problemas de vibraciones y pandeo*.

Su enfoque fue luego utilizado por varios investigadores argentinos habiendo sido implementado también en algunos códigos de elementos finitos.

En este trabajo se presentan autovalores determinados en el caso de una placa rectangular vibrante con un borde libre y diversas combinaciones de apoyos en los tres restantes, habiéndose incluido los parámetros de optimización γ_n en los argumentos de funciones sinusoidales (Figura 1). Por último se considera la situación en que se han practicado orificios rectangulares en los sistemas estructurales mencionados habiéndose determinado también los autovalores, en forma independiente, mediante el método de elementos finitos (Figura 2).

* La referencia 1 describe en detalle aspectos históricos de método y contiene un listado exhaustivo de la bibliografía existente.

FORMULACIÓN DE LA TEORÍA PROPUESTA

En el caso de una placa delgada, de un material caracterizado por la ley de Hooke, y que ejecuta oscilaciones de pequeña amplitud W vibrando en uno de sus modos normales, el problema queda definido por minimización de la conocida funcional

$$J(W) = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \mu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy - \frac{\rho h}{2} \omega^2 \iint W^2 dx dy \quad (1)$$

La función $W(x, y)$ debe satisfacer las condiciones prescriptas en el contorno. Si se busca una solución aproximada $W_a(x, y)$ es conveniente expresarla en la forma

$$W \simeq W_a = \sum_{j=1}^N A_j f_j(x, y) \quad (2)$$

donde cada función coordenada $f_j(x, y)$ satisface, al menos, las condiciones esenciales de borde. La metodología de Rayleigh-Ritz requiere

$$\frac{\partial J}{\partial A_j}(W) = 0; j = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

y en definitiva resultará un determinante ecuación en los autovalores.

En el caso de los elementos estructurales mostrados en la Figura 1, donde se tiene un borde libre, satisfacer las condiciones naturales en $x = a$ se torna una tarea complicada ya que se deberían construir funciones coordenadas que satisfagan

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) |_{x=a} = 0 \quad (4a)$$

$$\left[\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right] |_{x=a} = 0 \quad (4b)$$

Un criterio utilizado frecuentemente en la literatura ha sido el de construir funciones coordenadas en base a la condición aproximada

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} |_{x=a} = \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} |_{x=a} = 0 \quad (5)$$

El enfoque, sumamente sencillo, desarrollado en² ha sido tomar como "función base", en la dirección x , y cuando $x = 0$ está simplemente apoyado

$$\text{sen} \frac{\pi x}{\gamma_1 a}; \quad \gamma_1 > 1 \quad (6)$$

Obviamente, el parámetro γ_1 será ahora el parámetro de optimización de Rayleigh (contenido ahora en el argumento de una función trigonométrica). Al obtener el coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega a^2$ mediante el planteo clásico del método de Rayleigh-Ritz, resulta

$$\Omega_1 = \Omega_1(\gamma_1) \quad (7)$$

dado que Ω_1 es una cota superior se requerirá

$$\frac{d\Omega_1}{d\gamma_1} = 0 \quad (8)$$

lo cual permitirá optimizar el autovalor buscado.

El procedimiento podrá ser planteado en términos de una expresión similar a la (2), donde cada función coordenada contendrá un γ_j y en definitiva la optimización de Ω_1 logrará mediante la condición

$$\frac{d\Omega_1}{d\gamma_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

Por supuesto, autovalores de orden superior también pueden ser optimizados³. Los casos en que la rigidez flexional D es variable o que el material de la placa es ortótropo no ofrecen dificultad conceptual.

A título de experimentación numérica en el presente trabajo se utilizaron

- Figura 1a

$$W_a = \text{sen} \frac{\pi y}{b} \sum_{j=1}^3 A_j \text{sen}^2 \frac{\pi x}{\gamma_j a} \quad (10)$$

- Figura 1b

$$W_a = \text{sen}^2 \frac{\pi y}{b} \sum_{j=1}^3 A_j \text{sen}^2 \frac{\pi x}{\gamma_j a} \quad (11)$$

Es fácil verificar que cada función coordenada satisface idénticamente las condiciones esenciales de borde. También es posible, y en algunos casos conveniente, utilizar otro tipo de funciones (por ejemplo polinómicas) para representar la variación del modo de vibración en la dirección y .

Por último se consideró el caso en que la placa posee una perforación rectangular ($a_1 \times b_1$), tal que $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$ habiéndose utilizado la expresión (Figura 2)

$$W_a = \left(\frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4} \right) \sum_{j=1}^3 A_j \text{sen}^2 \frac{\pi x}{\gamma_j a} \quad (12)$$

para el caso en que la placa posee tres bordes empotrados y uno libre. Se obtuvo una solución independiente mediante el método de elementos finitos mostrándose una razonable concordancia.

RESULTADOS NUMÉRICOS

La Tabla I contiene valores de Ω_1 para el caso de la placa o losa rectangular mostrada en la Figura 1a. Se observa una buena convergencia en los valores de Ω_1 a medida que el número de términos N es incrementado. Las diferencias con los valores determinados por A.W. Leissa⁴, quien los obtuvo de un determinante-ecuación de 36×36 , son del orden del 0.1 % para $N = 3$.

$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho \cdot h}{D}} \omega_1 \cdot a^2$					
	$\frac{a}{b}$				
	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
Leissa [4]	63,6800	24,6942	12,6874	7,4767	4,9004
$N = 1$	63,8888 $\gamma_1 = 2,60$	25,4705 2,79	13,1999 2,97	7,7917 3,17	5,0708 3,30
$N = 2$	63,9115 $\gamma_1 = 9$ $\gamma_2 = 1,01$	24,7847 3,93 1,01	12,7341 3,37 1,01	7,5018 3,27 1,01	4,9131 3,31 1,01
$N = 3$	63,7608 $\gamma_1 = 50$ $\gamma_2 = 1,01$ $\gamma_3 = 0,50$	24,7132 50 1,10 0,54	12,6977 4,27 1,08 0,54	7,4819 3,52 1,05 0,54	4,9031 3,57 1,09 0,55

Tabla I. Valores de Ω_1 en el caso del sistema mostrado en la Figura 1a

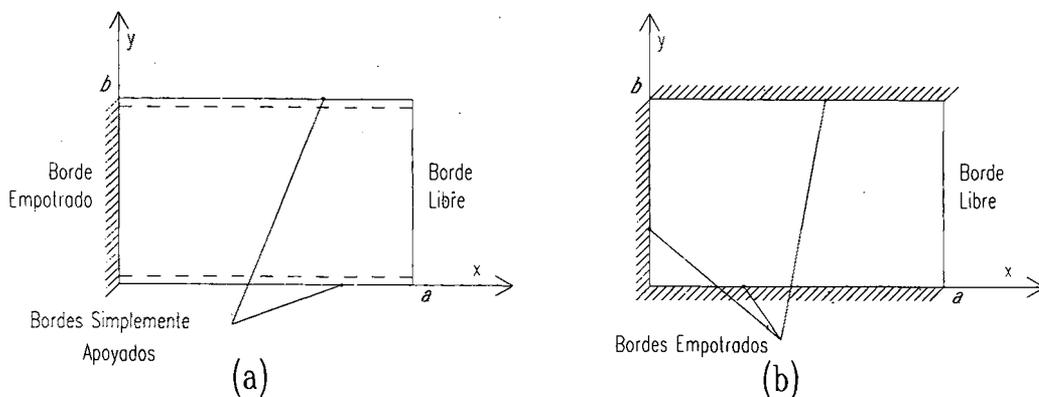


Figura 1. Placas o losas rectangulares con un borde libre

En el caso del sistema de la Figura 1b se observa en la Tabla II una diferencia mayor con los valores de⁴, si bien la convergencia de la técnica propuesta es razonablemente adecuada. Las máximas diferencias con los valores determinados en⁴ son del orden del 2 %.

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho \cdot h}{D}} \omega_1 \cdot a^2$$

	$\frac{a}{b}$				
	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
Leissa [4]	141,106	51,7837	24,0200	11,8804	6,02496
$N = 1$	144,322 $\gamma_1 = 2,52$	53,2229 2,72	24,8482 2,91	12,3917 3,11	6,3207 3,26
$N = 2$	143,6990 $\gamma_1 = 20$ $\gamma_2 = 1,04$	52,7417 30 1,10	24,4920 3,9 1,04	12,1351 3,75 1,09	6,1567 3,52 1,09
$N = 3$	143,598 $\gamma_1 = 40$ $\gamma_2 = 1,00$ $\gamma_3 = 0,50$	52,7214 30 1,10 0,52	24,4638 3,9 1,04 0,52	12,1197 3,75 1,09 0,53	6,1476 3,60 1,09 0,55

Tabla II. Valores de Ω_1 en el caso del sistema mostrado en la Figura 1b

La Tabla III muestra valores de Ω_1 en el caso en que la placa posee una perforación rectangular de dimensiones $(a_1 \times b_1)$ cuyo centro está ubicado sobre $y = \frac{b}{2}$. Se consideran tres posiciones del orificio, tal como se señala en la Figura 2. La Tabla III contiene también los valores de Ω_1 obtenidos mediante un algoritmo sumamente preciso de elementos finitos⁵. Si bien la máxima diferencia es del orden del 6 % ($\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$; $\frac{a_1}{a} = 0.30$) puede concluirse que la concordancia entre ambos conjuntos de autovalores es buena, sobre todo teniendo en cuenta la simplicidad del enfoque analítico por un lado y el hecho de que el número de grados de libertad del sistema varió entre 580 y 760 cuando se utilizó el método de elementos finitos.

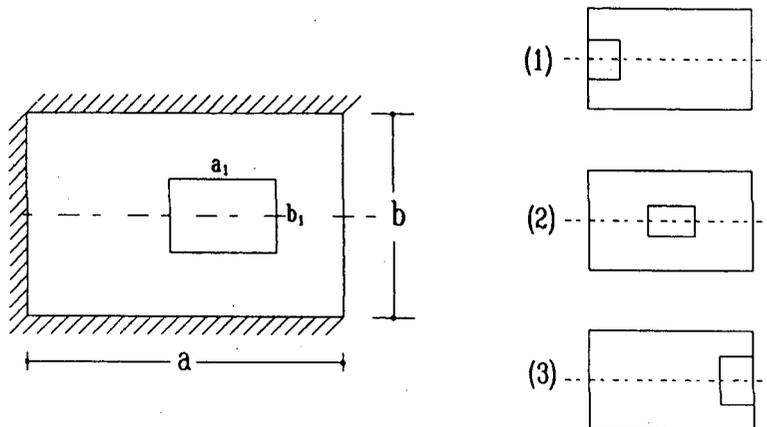


Figura 2. Placa rectangular empotrada en tres bordes y libre en el cuarto con orificio rectangular

Se observa también en la Tabla III el hecho de que en varios casos la frecuencia fundamental aumenta cuando se ha practicado un orificio. Estas situaciones encuadran dentro del fenómeno conocido como "rigidización dinámica".

Una ventaja del criterio propuesto lo constituye el hecho de que puede ser implementado fácilmente en un lenguaje computacional orientado como "Mathematica"⁶.

$\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	Posic.	$\frac{a_1}{a}$	Met.
140,7004	51,5937	23,9218	11,8349	6,0108		0	E.F.
141,4770	51,8878	24,0588	11,8900	6,0386			R.R.
140,6765	51,5467	23,8451	11,7143	5,8141	(1)	0,1	E.F.
142,4670	51,8655	24,0194	11,8327	5,9387			R.R.
139,8492	51,4443	23,9053	11,8607	6,0303	(2)	0,1	E.F.
142,1230	52,1126	24,1605	11,9505	6,0682			R.R.
136,3118	50,8957	23,8831	11,9894	6,2034	(3)	0,1	E.F.
143,6280	52,8943	24,6045	12,2230	6,2562			R.R.
140,6495	51,4906	23,7464	11,5429	5,5029	(1)	0,2	E.F.
141,4860	51,8300	23,9331	11,6772	5,6636			R.R.
140,8686	51,7381	24,0462	11,9430	6,0043	(2)	0,2	E.F.
143,5350	52,7562	24,4654	12,1087	6,1338			R.R.
141,3625	52,3966	24,7670	12,6930	6,8043	(3)	0,2	E.F.
146,9630	55,0885	25,6169	13,0590	6,8164			R.R.
140,8332	51,4737	23,6367	11,3588	5,1942	(1)	0,3	E.F.
141,7310	51,8724	23,8814	11,5253	5,3414			R.R.
143,0737	52,7335	24,4434	12,0203	5,7997	(2)	0,3	E.F.
144,9730	53,7021	24,9601	12,3523	6,2365			R.R.
148,2684	56,7560	27,3444	14,3137	7,9310	(3)	0,3	E.F.
150,0080	58,3510	28,5940	14,4560	8,0091			R.R.
141,2728	51,6509	23,5781	11,1473	4,8588	(1)		E.F.
144,5357	53,7134	24,9080	12,0350	5,4594	(2)	0,4	E.F.
152,3855	61,4410	31,4778	17,2622	9,8261	(3)		E.F.
141,7742	51,9370	23,6371	10,9838	4,5302	(1)		E.F.
145,6150	54,3464	25,2488	12,0263	5,1193	(2)	0,5	E.F.
157,0902	65,9426	36,3783	22,1260	12,9375	(3)		E.F.

Tabla III. Valores de Ω_1 en el caso del sistema mostrado en la Figura 2: placa rectangular con tres bordes empotrados y uno libre y un orificio rectangular de igual relación de lados ($\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$) ubicado sobre $y = \frac{b}{2}$ para posiciones: borde izquierdo, centro y borde libre
NOTA: las posiciones (1), (2) y (3) están definidas en la Figura 2

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su reconocimiento al Prof. Ing. C.A. Rossit por su valiosa cooperación y crítica constructiva.

El presente estudio es auspiciado por el CONICET (PIA 6002/96) y la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (Proyecto: 1996-1997, Director: Ing. R.E. Rossi). Los coautores Pablo Díaz, Verónica Jederlinic y Karina Rodríguez son estudiantes de las carreras de ingeniería industrial, ingeniería civil y física, respectivamente, y cursan sus estudios en la Universidad Nacional del Sur. La Srta. Jederlinic cuenta con una beca de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Pcia. de Bs. As.

REFERENCIAS

1. P.A.A. Laura, " Optimization of Variational Methods", *Ocean Engineering*, Vol. **22**, pp. 2235-2250, (1995).
2. P.A.A. Laura, D.V. Bambill, V.A. Jederlinic, K. Rodríguez y P. Díaz, "Rayleigh's Optimization Concept and the Use of Sinusoidal Coordinate Function", Institute of Applied Mechanics (CONICET, Bahía Blanca), Publication IMA No. 96-34, (1996).
3. P.A.A. Laura y V.H. Cortínez, "Optimization of Eigenvalues when Using the Galerkin Method", *American Institute of Chemical Engineers Journal*, Vol. **32**, pp. 1025-1026, (1996).
4. A.W. Leissa, "The Free Vibration of Rectangular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **31**, pp. 257-593, (1973).
5. F.K. Bogner, R.L. Fox y L.A. Schmit, "The Generation of Inter-Element-Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas", *Matrix Methods in Structural Analysis*, AFFDL-TR-66-800, pp. 397-443, (1996).
6. S. Wolfram, "*Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*", Addison-Wesley Publishing Company, (1993).