Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 11,3, 323–343(1995)

RESOLUCIÓN APROXIMADA DE SISTEMAS LINEALES CON RETARDOS PUNTUALES USANDO SERIES DE TAYLOR

CARLOS F. ALASTRUEY
y
JOSÉ R. GONZÁLEZ DE MENDÍVIL

Departamento de Electricidad y Electrónica
Universidad del País Vasco
Apdo. 664; 48080 Bilbao, España

RESUMEN

Este trabajo presenta un método aproximado -basado en la representación por series de Taylor y en la teoría de los operadores asociados de integración y retardo- para obtener soluciones analíticas de sistemas lineales con varias variables de estado y de control y múltiples retardos puntuales externos e internos. Se presentan varios ejemplos numéricos donde se muestran las mejoras en exactitud que proporciona este método frente a otros.

SUMMARY

An approximate method -based on Taylor series expansions and the theory of its associated operators of integration and delay- to obtain analytical solutions for linear systems containing several state and control variables and multiple inner and outer point delays is the aim of this paper. Several numeric examples are introduced to point out the accuracy improvements of the present method compared to other ones.

INTRODUCCIÓN

La importancia de los sistemas con retardo es bien conocida para quien trabaja en Modelización y Control. En realidad no existe ningún sistema dinámico real que esté completamente libre de retardos, por cuanto las señales toman un tiempo finito en su propagación por cualquier medio. En un amplio abanico de casos es posible despreciar el efecto de estos retardos. Sin embargo, en general ello no es posible cuando el valor del retardo es significativo comparado con la escala de tiempos del sistema dinámico. Esto sucede en los procesos de difusión, curvas de hornos, ciertos procesos químicos y biológicos y en general siempre que una entrada a un sistema tarde un tiempo finito en hacer efecto o su efecto influya en todo un intervalo de tiempo y no sólo puntualmente.

Recibido: Noviembre 1993

 ISSN 0213–1315

El problema añadido en los sistemas con retardo consiste en la enorme dificultad para obtener expresiones analíticas del comportamiento de dichos sistemas.

El presente trabajo está orientado a obtener expresiones aproximadas, pero suficientemente precisas, del comportamiento dinámico de las variables de estado de un sistema multivariable con múltiples retardos internos y externos. Esto permitirá obtener estimaciones "on-line" con una velocidad en compromiso con el grado de exactitud requerido, con lo que el diseñador podrá adaptar el método de acuerdo con las necesidades de cada caso. La principal novedad que aporta este trabajo en la resolución de sistemas respecto a la literatura consiste en extender el método de resolución para incluir el caso de retardos puntuales tanto en el estado como en el control (hasta ahora sólo se había resuelto para retardos puntuales en el estado).

El artículo se organiza como sigue: en la Sección A se presentan los métodos matemáticos que conforman la base sobre la que se construirán los resultados. La Sección B resuelve aproximadamente la ecuación de estado de un sistema con múltiples retardos puntuales internos y externos. La Sección C introduce algunos ejemplos de aplicación donde se comparan las soluciones exactas con las que proporciona el método. La Sección D realiza una discusión acerca de la necesidad de utilizar métodos aproximados de resolución en el caso general. Finalmente, la Sección E presenta las conclusiones más destacadas del trabajo.

A. MÉTODOS MATEMÁTICOS DE APROXIMACIÓN POR SERIES

La idea básica del tratamiento por series de los sistemas con retardo consiste en convertir la ecuación diferencial en una forma algebraica a través del uso de matrices operacionales de retardo e integración. Desde que se introdujera por primera vez una matriz operador de retardo para las series de Walsh se han realizado numerosos trabajos tendentes a ampliar esta técnica con el uso de otras series que pudieran representar más fielmente los sistemas de control con retardo.

La ventaja más evidente de este tratamiento respecto a otros es su idoneidad para ser realizado eficazmente en software. Esta circunstancia práctica suele ser determinante frente a otras consideraciones debido a que muchas veces un buen algoritmo, póngase por caso el control adaptivo, no puede ser utilizado en la práctica ya que el tiempo de cómputo puede exceder al tiempo real de muestreo. Además, la representación mediante series posee otra gran ventaja: la exactitud viene determinada por el número de términos del desarrollo empleados. De este modo es posible ajustar las necesidades de cada problema concreto de una forma simple así como buscar compromisos a medida entre el tiempo de cómputo y la exactitud.

En años recientes se ha realizado un considerable progreso hacia la solución de los problemas de control mediante el uso de series ortogonales. Se ha prestado mucha atención al estudio de sistemas con un solo retardo y también con múltiples retardos. Chen y Hsiao (1975)[3] introdujeron los operadores para las series de Walsh, que han sido utilizados para resolver ecuaciones diferenciales con retardos.

Actualmente, las series de Jacobi, Chebyshev, Legendre y Taylor son las más estudiadas a este respecto, incluso en el caso de retardos múltiples y variables.

Existen en la literatura notables trabajos realizados para los polinomios desplazados de Legendre (Hwang y Chen, 1985)[11] y las series de Chebyshev (Horng y Chou, 1985)[9]. Los resultados más satisfactorios los arrojan las series de Taylor, si bien Chen y Yang (1987)[4] establecieron una correspondencia muy útil y sencilla entre la representación con Taylor y la representación con series polinómicas.

Las series de Taylor, aunque no están basadas en polinomios ortogonales, también pueden ser aplicadas al análisis de varios problemas en sistemas dinámicos. En concreto, Chen y Yang (1987)[4] han utilizado las series de Taylor para el análisis de sistemas dinámicos con retardo. Chung y Sun (1987)[5] han aplicado también las series de Taylor al estudio de sistemas dinámicos con retardo, usando la función escalón unidad, tanto para el caso de coeficientes constantes en las matrices de estado y control, como para el caso de matrices variables de estado y control $A(t), Bi(t), D(t)$, siendo los primeros autores en resolver el problema de la identificación para un sistema de esa clase. Mohsen Razzaghi y Mehdi Razzaghi (1989)[13] realizaron una versión modificada del trabajo de Chung y Sun. Para los dos ejemplos escalares propuestos en su trabajo, su método modificado daba una precisión algo mayor que la de Chung y Sun, lo cual no tiene por qué ser extrapolable al caso multidimensional, que por otra parte nunca aparece tratado como ejemplo en los trabajos citados. Esta ausencia se explica porque resulta muy difícil en la práctica hallar una solución analítica para un sistema con retardo inherente, debido a la forma de la solución analítica (de la Sen 1988)[6]. Al no existir solución analítica fácilmente accesible en el caso multidimensional, no hay tampoco un modelo de solución exacta con el que comparar los resultados aproximados. Es por ello que en la literatura se da esta ausencia de ejemplos. A continuación se expresan los resultados matemáticos sobre las series de Taylor que nos permitirán abordar la solución de los sistemas con retardo.

La serie de Taylor se define de la siguiente forma

$$T_0(t) = 1;\ T_1(t) = t;\ T_2(t) = t^2; \ldots ;\ T_i(t) = t^i \ \text{ para } \ i = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Es bien conocido que si la función $f(t)$ es analítica en las proximidades del origen, puede ser expandida en serie de potencias, de donde se obtiene la familiar fórmula de Maclaurin. Para obtener una expresión aproximada de la función analítica $f(t)$, puede truncarse la serie en el término m

$$f(t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i T_i(t) \tag{2}$$

Definiendo los vectores $\mathbf{a} = [a_0 a_1 \ldots a_{m-1}]^T$ vector de coeficientes de Taylor y $\mathbf{T} = [T_0 T_1 \ldots T_{m-1}]^T$ vector de Taylor (o vector de la base de Taylor), (2) puede ser escrita en forma compacta como un producto escalar de ambos vectores

$$f(t) = \mathbf{a}^T \mathbf{T}(t) \tag{3}$$

Los elementos del vector de Taylor cumplen la relación de recurrencia $T_i(t) = tT_{i-1}(t)$. Para la serie de Taylor es posible buscar un conjunto de operadores matriciales que efectúan, entre otras, las operaciones de integración y retardo. De este modo el cálculo se simplifica sobremanera, ya que la integración y el hallar un vector retardado a partir de un vector actual se convierten en simples productos de matrices.

El Operador Integración

El Operador integración P, de dimensión $m \times m$, siendo m el número de términos tomados en los desarrollos para las series de Taylor, puede calcularse a partir de la ecuación

$$\int_{\alpha}^{t} T(t)dt = P(\alpha)T(t) \tag{4}$$

de donde se obtiene el operador propuesto por Razzaghi y Razzaghi (1989)[13] y que será usado en lo sucesivo.

El Operador Retardo

El vector de Taylor retardado $T(t-k)$ estará relacionado con $T(t)$ a través de la transformación $T(t-k) = S(k)T(t)$, donde $S(k)$ es el operador retardo de Taylor, de dimensión $m \times m$, que fue también calculado por Razzaghi y Razzaghi (1989)[13].

B. PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADO

Considérese el siguiente sistema dinámico con múltiples retardos en el estado y en el control

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + \sum_{j=1}^{r} B_j(t)x(t-\tau_j) + C(t)U(t) + \sum_{k=1}^{s} D_k(t)U(t-\delta_k) \\ x(t) &= F(t),\ t \in [-\max\{\tau_j\},\ 0),\ U(t) = G(t),\ t \in [-\max\{\delta_k\},\ 0) \end{aligned} \tag{5}$$

donde τ_j, δ_k son números reales (0, 1) y donde se supone, sin pérdida de generalidad, que están ordenados de la siguiente forma
Si $s < r$:

$$\tau_1 < \delta_1 < \tau_2 < \delta_2 < \ldots < \tau_s < \delta_s < \tau_{s+1} < \ldots < \tau_r$$

Si $r \leq s$:

$$\tau_1 < \delta_1 < \tau_2 < \delta_2 < \ldots < \delta_{r-1} < \tau_r < \delta_r < \ldots < \delta_s$$

Nota B.1: El orden supuesto anterior es completamente general. En efecto, si se desea cualquier otro orden, basta con escoger s y r suficientemente grandes y cancelar algunos retardos tomando sus matrices correspondientes como el elemento neutro de la suma de matrices con dimensiones adecuadas.

Además:

$$x(t) \in \mathbf{R}^n,\ U(t) \in \mathbf{R}^p,\ \dim(A(t)) = n \times n,\ \dim(B_j(t)) = n \times n$$
$$\dim(C(t)) = n \times p,\ \dim(D_k(t)) = n \times p$$

En (5) se conoce el valor $x(0) = x_0$ dado por $F(0)$ y el de $U(0)$ dado por $G(0)$. Sean

$$\hat{T}(t) = I_n \otimes T(t) \tag{6}$$
$$\hat{T}^T(t) = I_n \otimes T^T(t) \tag{7}$$

entonces

$$\int_\alpha^t \hat{T}^T(t)dt = \hat{T}^T(t)I_n \otimes P^T(\alpha) \tag{8}$$

donde I_n es la matriz identidad $n \times n$, $P(\alpha)$ es la matriz operador de integración definida en (4) y $\otimes$ representa el producto de Kronecker (Bellman 1970)[2].

Como la función $F(t)$ está dada, para cada τ_j es posible expandir $F(t - \tau_j)$ en serie de Taylor y calcular vectores $V_{j0}, \ldots, V_{j(m-1)}$ de dimensión $n \times 1$, de tal forma que (Razzaghi y Razzaghi, 1989)[13]

$$F(t - \tau_j) = \hat{T}^T(t)[V_{j0}^T V_{j1}^T \ldots V_{j(m-1)}^T]^T,\ j = 1, \ldots, r \tag{9}$$

Más adelante será necesario el cálculo de las integrales

$$z_j = \int_0^{\tau_j} B_j(t)F(t - \tau_j)dt \tag{10}$$

Estas integrales incluyen las funciones conocidas $B_j(t)$ y $F(t)$. El valor de la integral (10) se representará por el vector z_j de dimensión $n \times 1$.

Asimismo, al conocerse la función $G(t)$, para cada δk es posible expandir $G(t - \delta k)$ en serie de Taylor y calcular vectores $W_{k_0}, \ldots, W_{k_{(m-1)}}$ de dimensión $p \times 1$ de tal forma que

$$G(t - \delta_k) = \hat{T}^T(t)[W_{k_0}^T W_{k_1}^T \ldots W_{k_{(m-1)}}^T]^T,\ k = 1, \ldots, s \tag{11}$$

y también será necesario resolver las integrales

$$w_k = \int_0^{\delta_k} D_k(t)G(t - \delta_k)dt \tag{12}$$

que precisan un conocimiento a priori de las funciones $D_k(t)$ y $G(t)$. El valor de dichas integrales será designado por el vector w_k de dimensión $p \times 1$.

A continuación se expanden $x(t)$, $U(t)$, $A(t)$, $B_j(t)$, $C(t)$ y $D_k(t)$ en expansiones de coeficientes de serie de Taylor expresadas como sigue

$$x(t) = \hat{T}^T(t)[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T \tag{13}$$

$$U(t) = \hat{T}^T(t)[U_0^T\, U_1^T \dots U_{m-1}^T]^T \tag{14}$$

$$A(t) = [A_0\, A_1 \dots A_{m-1}]\hat{T}(t) \tag{15}$$

$$B_j(t) = [B_{j_0}\, B_{j_1} \dots B_{j_{(m-1)}}]\hat{T}(t) \tag{16}$$

$$C(t) = [C_0\, C_1 \dots C_{m-1}]\hat{T}(t) \tag{17}$$

$$D_k(t) = [D_{k_0}\, D_{k_1} \dots D_{k_{(m-1)}}]\hat{T}(t) \tag{18}$$

donde x_i, A_i, B_{j_i}, U_i, C_i, D_{k_i} $(i = 0, 1, \dots, m-1)$ son matrices de coeficientes de series de Taylor. También es posible escribir $x(0)$ como

$$x(0) = \hat{T}(t)[x^T(0)\ \bar{0}^T \dots \bar{0}^T]^T \tag{19}$$

donde $\bar{0}$ denota un vector $n \times 1$ de ceros.

Ahora, para $0 \leq t \leq 1$ se integra (5) sobre el intervalo $[0, t]$ y se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) = \int_0^t A(t')x(t')dt' + \int_0^t \sum_{j=1}^{r} B_j(t')x(t' - \tau_j)dt' + \\ + \int_0^t C(t')U(t')dt' + \int_0^t \sum_{k=1}^{s} D_k(t')U(t' - \delta_k)dt' \end{aligned} \tag{20}$$

Por otra parte se tiene, usando (13) y (15), que (Razzaghi y Razzaghi 1989)[13]

$$\begin{aligned} A(t)x(t) &= [A_0\, A_1 \dots A_{m-1}]\hat{T}(t)\hat{T}^T(t)[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T \\ &= \hat{T}^T(t)\tilde{A}^T[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T \end{aligned} \tag{21}$$

donde $\tilde{A}^T$ es el operador

$$\begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_1 & A_0 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & A_1 & A_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m-1} & A_{m-2} & A_{m-3} & \dots & A_0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

donde cada A_i, $i = 0, \dots, (m-1)$ es un bloque $n \times n$; por tanto, (22) es una matriz $nm \times nm$. Del mismo modo

$$C(t)U(t) = \hat{T}^T(t)\tilde{C}^T[U_0\, U_1 \dots U_{m-1}]^T \tag{23}$$

donde el operador $\tilde{C}^T$ es la matriz $pm \times pm$

$$\begin{bmatrix} C_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1 & C_0 & 0 & \dots & 0 \\ C_2 & C_1 & C_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m-1} & C_{m-2} & C_{m-3} & \dots & C_0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Para $0 \leq t \leq \tau_1$, de (20) se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{T}^T(t)[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T = & \int_0^t \hat{T}^T(t')\tilde{A}^T[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T dt' + \\ & + \int_0^t \sum_{j=1}^{r} [B_{j_0}\, B_{j_1} \dots B_{j_{(m-1)}}]\hat{T}(t')F(t'-\tau_j)dt' + \\ & + \int_0^t \hat{T}^T(t')\tilde{C}^T[U_0^T\, U_1^T \dots U_{m-1}^T]^T dt' + \\ & + \int_0^t \sum_{k=1}^{s} [D_{k_0}\, D_{k_1} \dots D_{k_{(m-1)}}]\hat{T}(t')G(t'-\delta_k)dt' + \\ & + \hat{T}(t)[x^T(0)\ \bar{0}^T \dots \bar{0}^T]^T \end{aligned} \tag{25}$$

Usando la expresión (9), obtenemos

$$\begin{aligned} & [B_{j_0}\, B_{j_1} \dots B_{j_{(m-1)}}]\hat{T}(t)\hat{T}^T(t)[V_{j_0}^T\, V_{j_1}^T \dots V_{j_{(m-1)}}^T]^T = \\ & = \hat{T}^T(t)\tilde{B}_j^T[V_{j_0}^T\, V_{j_1}^T \dots V_{j_{(m-1)}}^T]^T \end{aligned} \tag{26}$$

donde $\tilde{B}_j^T$ es la matriz $nm \times nm$

$$\begin{bmatrix} B_{j_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_{j_1} & B_{j_0} & 0 & \dots & 0 \\ B_{j_2} & B_{j_1} & B_{j_0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{j_{(m-1)}} & B_{j_{(m-2)}} & B_{j_{(m-3)}} & \dots & B_{j_0} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Del mismo modo, usando la expresión (11), se obtiene

$$\begin{aligned} & [D_{k_0}\, D_{k_1} \dots D_{k_{(m-1)}}]\hat{T}(t)\hat{T}^T(t)[W_{k_0}^T\, W_{k_1}^T \dots W_{k_{(m-1)}}^T]^T = \\ & = \hat{T}^T(t)\tilde{D}_k^T[W_{k_0}^T\, W_{k_1}^T \dots W_{k_{(m-1)}}^T]^T \end{aligned} \tag{28}$$

donde la matriz $\tilde{D}_k^T$ es la matriz $pm \times pm$

$$\begin{bmatrix} D_{k_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_{k_1} & D_{k_0} & 0 & \dots & 0 \\ D_{k2} & D_{k_1} & D_{k_0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{k_{(m-1)}} & D_{k_{(m-2)}} & D_{k_{(m-3)}} & \dots & D_{k_0} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Introduciendo las expresiones (26) y (28) en (25) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} [x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T = {} & \hat{P}^T(0)\tilde{A}^T[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T + \\ & + \sum_{j=1}^{r} \hat{P}^T(0)\tilde{B}_j^T[V_{j_0}^T\, V_{j_1}^T \dots V_{j_{(m-1)}}^T]^T + \\ & + \hat{P}^T(0)\tilde{C}^T[U_0^T\, U_1^T \dots U_{m-1}^T]^T + \\ & + \sum_{k=1}^{s} \hat{P}^T(0)\tilde{D}_k^T[W_{k_0}^T\, W_{k_1}^T \dots W_{k_{(m-1)}}^T]^T + \\ & + [x^T(0)\ \bar{0}^T \dots \bar{0}^T]^T \end{aligned} \tag{30}$$

Definamos

$$R^{(1)} = I_{mn} - \hat{P}^T(0)\tilde{A}^T \tag{31}$$

$$\begin{aligned} Q^{(1,1)} = {} & \sum_{j=1}^{r} \hat{P}^T(0)\tilde{B}_j^T[V_{j_0}^T\, V_{j_1}^T \dots V_{j_{(m-1)}}^T]^T + \hat{P}^T(0)\tilde{C}^T[U_0^T\, U_1^T \dots U_{(m-1)}^T]^T + \\ & + \sum_{k=1}^{s} \hat{P}^T(0)\tilde{D}_k^T[W_{k_0}^T\, W_{k_1}^T \dots W_{k_{(m-1)}}^T]^T + [x^T(0)\ \bar{0}^T \dots \bar{0}^T]^T \end{aligned} \tag{32}$$

Entonces, (30) queda

$$[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T = [R^{(1)}]^{-1}Q^{(1,1)} \tag{33}$$

de donde se determinan los coeficientes del desarrollo de Taylor de las variables de estado para el intervalo entre 0 y el primer retardo de estado τ_1.

Para $\tau_1 \leq t \leq \delta_1$ se tiene

$$\begin{aligned} x(t) = {} & \int_0^t A(t')x(t')dt' + \int_0^{\tau_1} B_1(t')F(t'-\tau_1)dt' + \int_{\tau_1}^t B_1(t')x(t'-\tau_1)dt' + \\ & + \int_0^t \sum_{j=2}^{r} B_j(t')F(t'-\tau_j)dt' + \int_0^t C(t')U(t')dt' + \\ & + \int_0^t \sum_{k=1}^{s} D_k(t')U(t'-\delta_k)dt' \end{aligned} \tag{34}$$

Ahora bien,

$$B_1(t')x(t'-\tau_1) = [B_{10}\, B_{11} \dots B_{1(m-1)}]\hat{T}(t')\hat{T}^T(t'-\tau_1)[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T \qquad (35)$$

Entonces, utilizando (10) y (7)

$$\hat{T}^T(t-\tau_1) = I_n \otimes T^T(t-\tau_1) = I_n \otimes T^T(t)S^T(\tau_1) = \hat{T}^T(t)\hat{S}^T(\tau_1) \qquad (36)$$

Además, si escribimos z_1 en la ecuación (10) como

$$z_1 = \hat{T}^T(t)[z_1^T\, \bar{0}^T \dots \bar{0}^T]^T \qquad (37)$$

de (34) se sigue que

$$\begin{aligned}
[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T = {} & \hat{P}^T(0)\tilde{A}^T[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T + \\
& + \hat{P}^T(\tau_1)\tilde{B}_1^T\hat{S}^T(\tau_1)[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T + \\
& + \sum_{j=2}^{r} \hat{P}^T(0)\tilde{B}_j^T[V_{j0}^T\, V_{j1}^T \dots V_{j(m-1)}^T]^T + \\
& + \hat{P}^T(0)\tilde{C}^T[U_0^T\, U_1^T \dots U_{m-1}^T]^T + \\
& + \sum_{k=1}^{s} \hat{P}^T(0)\tilde{D}_k^T[W_{k0}^T\, W_{k1}^T \dots W_{k(m+1)}^T]^T + \\
& + [x^T(0)\; \bar{0}^T \dots \bar{0}^T]^T + [z_1^T\, \bar{0}^T \dots \bar{0}^T]^T
\end{aligned} \qquad (38)$$

Y de nuevo, finalmente

$$[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T = [R^{(2)}]^{-1}Q^{(2,1)} \qquad (39)$$

donde

$$R^{(2)} = I_{mn} - \hat{P}^T(0)\tilde{A}^T - \hat{P}^T(\tau_1)\tilde{B}_1^T\hat{S}^T(\tau_1) \qquad (40)$$

$$\begin{aligned}
Q^{(2,1)} = {} & \sum_{j=2}^{r} \hat{P}^T(0)\tilde{B}_j^T[V_{j0}^T\, V_{j1}^T \dots V_{j(m-1)}^T]^T + \\
& + \hat{P}^T(0)\tilde{C}^T[U_0^T\, U_1^T \dots U_{m-1}^T]^T + \\
& + \sum_{k=1}^{s} \hat{P}^T(0)\tilde{D}_k^T[W_{k0}^T\, W_{k1}^T \dots W_{k(m+1)}^T]^T + \\
& + [x^T(0)\; \bar{0}^T \dots \bar{0}^T]^T + [z_1^T\, \bar{0}^T \dots \bar{0}^T]^T
\end{aligned} \qquad (41)$$

de donde se determinan los coeficientes del desarrollo de Taylor de las variables de estado para el intervalo entre el primer retardo de estado τ_1 y el primer retardo de control δ_1.

Para $\delta_1 \leq t \leq \tau_2$ y siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene

$$[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T = [R^{(2)}]^{-1} Q^{(2,1)} \tag{42}$$

donde $R^{(2)}$ viene dada por (40) y

$$\begin{aligned} Q^{(2,2)} = & \sum_{j=2}^{r} \hat{P}^T(0)\tilde{B}_j^T[V_{j0}^T\, V_{j1}^T \dots V_{j(m-1)}^T]^T + \\ & + \hat{P}^T(0)\tilde{C}^T[U_0^T\, U_1^T \dots U_{m-1}^T]^T + \\ & + \hat{P}^T(\delta_1)\tilde{D}_1^T\hat{S}^T(\delta_1)[U_0^T\, U_1^T \dots U_{m-1}^T]^T + \\ & + \sum_{k=2}^{s} \hat{P}^T(0)\tilde{D}_k^T[W_{k_0}^T\, W_{k_1}^T \dots W_{k_{(m+1)}}^T]^T + \\ & + [x^T(0)\; \bar{0}^T \dots \bar{0}^T]^T + [z_1^T + w_1^T\, \bar{0}^T \dots \bar{0}^T]^T \end{aligned} \tag{43}$$

y donde se ha escrito w_1 en (12) como

$$w_1 = \hat{T}^T(t)[w_1^T\, \bar{0}^T \dots \bar{0}^T]^T \tag{44}$$

En general, para $\tau_q \leq t \leq \delta_q$ se tiene

$$[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T = [R^{(q+1)}]^{-1} Q^{(q+1,1)} \tag{45}$$

donde

$$R^{(q+1)} = I_{mn} - \hat{P}^T(0)\tilde{A}^T - \sum_{j=1}^{q} \hat{P}^T(\tau_j)\tilde{B}_j^T\hat{S}^T(\tau_j) \tag{46}$$

$$\begin{aligned} Q^{(q+1,1)} = & \sum_{j=q+1}^{r} \hat{P}^T(0)\tilde{B}_j^T[V_{j0}^T\, V_{j1}^T \dots V_{j(m-1)}^T]^T + \\ & + \hat{P}^T(0)\tilde{C}^T[U_0^T\, U_1^T \dots U_{m-1}^T]^T + \\ & + \sum_{k=1}^{q-1} \hat{P}^T(\delta_k)\tilde{D}_k^T\hat{S}^T(\delta_k)[U_0^T\, U_1^T \dots U_{m-1}^T]^T + \\ & + \sum_{k=q}^{s} \hat{P}^T(0)\tilde{D}_k^T[W_{k_0}^T\, W_{k_1}^T \dots W_{k_{(m-1)}}^T]^T + \\ & + \left[x^T(0) + \sum_{j=1}^{q} z_j^T + \sum_{k=1}^{q-1} w_k^T\, \bar{0}^T \dots \bar{0}^T\right]^T \end{aligned} \tag{47}$$

Asimismo, para $\delta_q \leq t \leq \tau_{q+1}$ se tiene

$$[x_0^T\, x_1^T \dots x_{m-1}^T]^T = [R^{(q+1)}]^{-1} Q^{(q+1,2)} \tag{48}$$

donde $R^{(q+1)}$ viene dada por (46) y

$$
\begin{aligned}
Q^{(q+1,2)} = & \sum_{j=q+1}^{r} \hat{P}^T(0)\tilde{B}_j^T[V_{j0}^T\, V_{j1}^T \dots V_{j(m-1)}^T]^T + \\
& + \hat{P}^T(0)\tilde{C}^T[U_0^T\, U_1^T \dots U_{m-1}^T]^T + \\
& + \sum_{k=1}^{q} \hat{P}^T(\delta_k)\tilde{D}_k^T \hat{S}^T(\delta_k)[U_0^T\, U_1^T \dots U_{m-1}^T]^T + \\
& + \sum_{k=q+1}^{s} \hat{P}^T(0)\tilde{D}_k^T[W_{k0}^T\, W_{k1}^T \dots W_{k(m-1)}^T]^T + \\
& + \left[x^T(0) + \sum_{j=1}^{q} z_j^T + \sum_{k=1}^{q} w_k^T\, \bar{0}^T \dots \bar{0}^T \right]^T
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Nota B.2: Obsérvese que en las soluciones generales (45) y (48) aparecen dos términos en el lado derecho: matrices del tipo R (46) y matrices del tipo Q (47 y 49). Se ve que las matrices R van almacenando la información correspondiente a los términos de estado con o sin retardo que han superado su fase de inicialización. Por otra parte, las matrices Q almacenan la información correspondiente a los términos de estado con retardo que aún no han superado su fase de inicialización, así como toda la información correspondiente a los términos del control. A medida que pasa el tiempo, hay una transferencia de información de la matriz Q a la R, a medida que nuevos términos correspondientes a las variables de estado (matrices B_j) se van incorporando a la dinámica normal del sistema.

C. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Como se dijo en la introducción de la Sección B, los ejemplos de aplicación del método de Taylor al estudio de sistemas con retardo que aparecen en la literatura son extremadamente simples. Hasta donde llega nuestro conocimiento, no sabemos de ningún trabajo donde se presente un ejemplo que no sea escalar, si exceptuamos precisamente las publicaciones relativas a este trabajo[1]. Es conocido que el método proporciona buenos resultados para los ejemplos escalares existentes[5,13], pero no hay disponibles ejemplos complejos o demostraciones rigurosas de la bondad del método.

En esta sección se presenta un sistema escalar (Ejemplo 1) ya tratado por Chung y Sun (1987)[5] y Razzaghi y Razzaghi (1989)[13] para el cual el método funciona correctamente. A continuación se presenta el caso de un sistema libre con dos variables de estado y dos retardos puntuales (Ejemplo 2). En ambos casos se comparan los resultados con la solución exacta.

Ejemplo 1

Considérese el sistema retardado descrito por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t-0.35) + x(t-0.7) + 1 \\ x(t) &= 0, \quad t \leq 0 \end{aligned} \tag{50}$$

Aunque este sistema es invariante, el método descrito se puede aplicar. En las tablas de resultados se comparan los que arroja este método con los de Chung y Sun (1987)[5]. Se ha escogido $m = 5$. Obsérvese que en este ejemplo la matriz A es idénticamente nula.

Para $0 \leq t \leq 0.35$ se obtiene

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{T}(t)[1\,0\,0\,0\,0] \\ D(t) &= [1\,0\,0\,0\,0]\hat{T}(t) \end{aligned}$$

y por la ecuación (30) ó (33) se llega a

$$[x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4]^T = [0\,1\,0\,0\,0]$$

y por lo tanto

$$x(t) = t \tag{51}$$

Para $0.35 < t < 0.7$, se obtiene de las ecuaciones (42), (40) y (43)

$$[x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4]^T = [I_5 - P^T(0.35)\tilde{B}_1^T S^T(0.35)]^{-1} Q^{(2,1)} \tag{52}$$

donde $\tilde{B}_1^T$ resulta ser una matriz de identidad 5×5, P y S están definidos y $Q^{(2,1)}$ es un vector 5×1 dado por

$$Q^{(2,1)} = [0\,1\,0\,0\,0]^T \tag{53}$$

La Tabla I da los valores de la solución exacta y sus aproximaciones aplicando el presente método y el de Chung y Sun (1987)[5]

Para $0.7 < t < 1$, de (45), (46) y (47) se obtiene

$$[x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4]^T = [I_5 - P^T(0.35)\tilde{B}_1^T S^T(0.35) - P^T(0.7)\tilde{B}_2^T S^T(0.7)]^{-1} Q^{3,1} \tag{54}$$

La Tabla II contiene los resultados para este nuevo intervalo.

Tiempo (t)	Valor exacto $x(t)$	Nuestro método $x(t)$	Chung y Sun $x(t)$
0.35	0.35000	0.35000	0.35000
0.40	0.40125	0.40261	0.40264
0.45	0.45500	0.45729	0.45734
0.50	0.51125	0.51408	0.51417
0.55	0.57000	0.57307	0.57321
0.60	0.63125	0.63434	0.63456
0.65	0.69500	0.69797	0.69829
0.70	0.76125	0.76404	0.76451

Tabla I. Valores aproximados de $x(t)$ para $0.35 < t < 0.7$

Tiempo (t)	Valor exacto $x(t)$	Nuestro método $x(t)$	Chung y Sun $x(t)$
0.70	0.76125	0.76404	0.76451
0.75	0.83217	0.84367	0.84675
0.80	0.90642	0.92057	0.92479
0.85	0.98681	1.00164	1.00730
0.90	1.07258	1.08708	1.09454
0.95	1.16385	1.17708	1.18674
1.00	1.26075	1.27184	1.28417

Tabla II. Valores aproximados de $x(t)$ para $0.7 < t < 1.0$

Ejemplo 2

Considérese el siguiente sistema libre con dos variables de estado y dos retardos en el estado

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/(t^2+3t+2) & 1/(t^2+5t+6) \\ 6/(t^2+3t+2) & -2/(t^2+5t+6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & t/(t^2+4.6t+5.04) \\ t/(t^2+2.6t+1.46) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-0.2) \\ x_2(t-0.2) \end{bmatrix} + \tag{55a}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & t/(t^2+3.6t+2.99) \\ t/(t^2+1.6t+0.39) & 1/(t^2+3.6t+2.99) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-0.7) \\ x_2(t-0.7) \end{bmatrix}$$

con condiciones iniciales

$$x(t) = F(t) = [(1+t)(2+t) \quad (2+t)(3+t)] \text{ para } t \leq 0 \tag{55b}$$

y

$$x^T(0) = [2 \;\; 6] \tag{55c}$$

Se comprueba por simple sustitución que una solución exacta del sistema (55) para $t > 0$ viene dada precisamente por el vector $F(t)$ de condiciones iniciales, es decir

$$x^T(t) = [(1+t)(2+t) \quad (2+t)(3+t)] \tag{56}$$

es una solución exacta del sistema (55). Compararemos esta solución con la aproximada que proporciona el método de Taylor.

La solución según el método de Taylor se calcula de la siguiente forma: si tomamos el número de términos en el desarrollo de Taylor $m = 3$ y siendo X el vector solución definido en (33), se tiene que

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.1667 \\ 3.0000 & -0.3333 \end{pmatrix}; \ A_1 = \begin{pmatrix} -1.5000 & -0.1389 \\ -4.5000 & 0.2778 \end{pmatrix}; \ A_2 = \begin{pmatrix} 1.7500 & 0.0880 \\ 5.2500 & -0.1759 \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$B_{10} = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix}; \ B_{11} = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.1984 \\ 0.6849 & 0.0000 \end{pmatrix}; \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 0.0000 & -0.1811 \\ -1.2197 & 0.0000 \end{pmatrix} \tag{58}$$

$$B_{20} = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.3345 \end{pmatrix}; \ B_{21} = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.3345 \\ 2.5641 & -0.4027 \end{pmatrix}; \ B_{22} = \begin{pmatrix} 0.0000 & -0.4027 \\ -10.5194 & 0.3730 \end{pmatrix} \tag{59}$$

Además se tiene que

$$F(t-\tau_1) = F(t-0.2) = [(0.8+t)(1.8+t) \quad (1.8+t)(2.8+t)] \tag{60}$$

Por tanto

$$[V_{10}^T \, V_{11}^T \, V_{12}^T]^T = [1.4400 \ \ 5.0400 \ \ 2.6000 \ \ 4.6000 \ \ 1.0000 \ \ 1.0000]^T \tag{61}$$

Asimismo

$$F(t-\tau_2) = F(t-0.7) = [(0.3+t)(1.3+t) \ \ (1.3+t)(2.3+t)] \tag{62}$$

$$[V_{20}^T \, V_{21}^T \, V_{22}^T]^T = [0.3900 \ \ 2.9900 \ \ 1.6000 \ \ 4.1200 \ \ 1.0000 \ \ 1.0000]^T \tag{63}$$

Con los datos anteriores es posible construir la solución aproximada del vector del estado.

Para $0 < t < 0.2$

$$\begin{aligned} X^T &= [R^{(1)}]^{-1} Q^{(1,1)} = [I_6 - \hat{P}^T(0)\tilde{A}^T]^1 \\ &\left[\sum_{j=1}^{2} \hat{P}^T(0)\tilde{B}_j^T [V_{j0}^T \, V_{j1}^T \, V_{j2}^T]^T + [x^T(0) \, \bar{0}^T \, \bar{0}^T]^T \right] = \\ &= [2.0000 \ \ 6.0000 \ \ 3.0002 \ \ 5.0004 \ \ 1.0002 \ \ 0.9936] \end{aligned} \tag{64}$$

Obsérvese que como el valor en $t = 0$ para x es conocido a priori e igual a [2 6], una forma (aunque no exhaustiva) de comprobar que no se ha deslizado ningún error al introducir los datos es que el desarrollo (64) para $t = 0$ arroje el resultado [2 6], lo que efectivamente hace.

La Tabla III muestra la comparación entre los valores exactos y aproximados de la primera variable de estado para este intervalo. La Tabla IV hace lo propio con la segunda variable de estado.

Tiempo (t)	Valor exacto $x_1(t)$	Nuestro método $x_1(t)$
0.00	2.0000	2.0000
0.02	2.0604	2.0604
0.04	2.1216	2.1216
0.06	2.1836	2.1836
0.08	2.2464	2.2464
0.10	2.3100	2.3100
0.12	2.3744	2.3744
0.14	2.4396	2.4396
0.16	2.5056	2.5056
0.18	2.5724	2.5724
0.20	2.6400	2.6401

Tabla III. Valores exactos y aproximados de $x_1(t)$ para $0 < t < 0.2$

Tiempo (t)	Valor exacto $x_2(t)$	Nuestro método $x_2(t)$
0.00	6.0000	6.0000
0.02	6.1004	6.1004
0.04	6.2016	6.2016
0.06	6.3036	6.3036
0.08	6.4064	6.4064
0.10	6.5100	6.5100
0.12	6.6144	6.6144
0.14	6.7196	6.7195
0.16	6.8256	6.8255
0.18	6.9324	6.9323
0.20	7.0400	7.0398

Tabla IV. Valores exactos y aproximados de $x_2(t)$ para $0 < t < 0.2$

Para $0.2 < t < 0.7$

$$z_1 = \int_0^{0.2} B_1(t)F(t-0.2)dt = \int_0^{0.2} \begin{bmatrix} 0 & t/(t^2+4.6t+5.04) \\ t/(t^2+2.6t+1.46) & 0 \end{bmatrix} \tag{65}$$
$$[(0.8+t)(1.8+t) \quad (1.8+t)(2.8+t)]^T dt = [0.0200 \;\; 0.0198]^T$$

Del mismo modo que en (64) se obtiene

$$\begin{aligned} X^T = [R^{(2)}]^{-1}Q^{(2,1)} &= [I_6 - \hat{P}^T(0)\tilde{A}^T - \hat{P}^T(0.2)\tilde{B}_1^T\hat{S}^T(0.2)]^{-1} \\ &\{\hat{P}^T(0)\tilde{B}_2^T[V_{20}^T\, V_{21}^T\, V_{22}^T]^T + [x^T(0) + z_1^T\bar{0}^T\,\bar{0}^T]^T\} = \\ &= [2.0000 \;\; 6.0000 \;\; 3.0002 \;\; 5.0004 \;\; 1.0002 \;\; 0.9936] \end{aligned} \tag{66}$$

y coincide con (64).

La Tabla V muestra la comparación entre los valores exactos y aproximados de la primera variable de estado para este intervalo. La Tabla VI hace lo propio con la segunda variable de estado.

Análogamente se seguiría para el último intervalo $0.7 < t < 1$.

Obsérvese la gran exactitud que proporciona el método para el Ejemplo 2, a pesar de que sólo se han tomado tres términos en el desarrollo.

Respecto a la energía de cómputo que consume el método propuesto frente a los de Chen y Yang (1987)[4] y Chung y Sun (1987)[5], la Tabla VII muestra el número medio de operaciones matriciales de iguales dimensiones por intervalo para un sistema libre, siendo r el número de retardos en el estado. Para un sistema controlado con retardos, nuestro método no es comparable con otros, porque hasta ahora no había ningún método que solucionase el problema para el caso de retardos externos.

Tiempo (t)	Valor exacto $x_1(t)$	Nuestro método $x_1(t)$
0.20	2.6400	2.6401
0.25	2.8125	2.8126
0.30	2.9900	2.9901
0.35	3.1725	3.1726
0.40	3.3600	3.3601
0.45	4.725	4.726
0.50	5.500	5.502
0.55	3.9525	3.9527
0.60	4.1600	4.1602
0.65	4.3725	4.3727
0.70	4.5900	4.5902

Tabla V. Valores exactos y aproximados de $x_1(t)$ para $0.2 < t < 0.7$

Tiempo (t)	Valor exacto $x_2(t)$	Nuestro método $x_2(t)$
0.20	7.0400	7.0398
0.25	7.3125	7.3122
0.30	7.5900	7.5895
0.35	7.8725	7.8719
0.40	8.1600	8.1591
0.45	8.4525	8.4514
0.50	8.7500	8.7486
0.55	9.0525	9.0508
0.60	9.3600	9.3579
0.65	9.6725	9.6701
0.70	9.9900	9.9871

Tabla VI. Valores exactos y aproximados de $x_2(t)$ para $0.2 < t < 0.7$

Método	Inversiones	Productos	Sumas
Chen y Yang (1987)	1	$1 + 3r^2$	$3r$
Chung y Sun (1987)	0	$2 + 3r$	$2 + r$
Nuestro método	1	$3 + 2r$	$3 + r$

Tabla VII. Número medio de operaciones matriciales por intervalo para distintos métodos

D. DISCUSIÓN

Si bien en los ejemplos expuestos en la Sección C se disponía de soluciones exactas, en general la obtención de una solución exacta explícita para un sistema dinámico con retardos puntuales es en general imposible o al menos nadie conoce un método para ello. De todas formas, la sospecha de que en realidad es imposible se halla muy extendida entre los investigadores. Aunque existen resultados que dan una solución exacta para este tipo de sistemas (de la Sen 1988)[6], en la práctica la solución provista no es explícita, sino que suele involucrar una ecuación trascendente o bien una ecuación diferencial subsidiaria no resoluble directamente. En el caso general, un sistema con retardos internos -esto es, en el estado- no puede ser reducido a una expresión dinámica libre de retardos. Si el retardo es parte inherente del sistema, siempre aparecerá -explícita o implícitamente- un cierto tipo de retardo en cualquier transformación posterior que se realice sobre el sistema original.

Para ilustrar este problema, consideramos el sistema dinámico (5) con múltiples retardos en el estado y en el control. En principio existirían dos caminos para calcular una solución exacta de dicho sistema, atendiendo a qué consideremos como sistema libre:

Primera forma

Podría considerarse como sistema libre el compuesto por todos los términos relativos a las variables de estado. Es lo que llamaremos Sistema Libre Retardado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{r} B_j x(t - \tau_j) \tag{67}$$

En este caso se tomaría

$$CU(t) + \sum_{k=1}^{s} D_k U(t - \delta_k) \tag{68}$$

como término forzante.

Segunda forma

Podría igualmente considerarse como sistema libre el compuesto por todos los términos relativos a las variables de estado sin retardo. Es lo que llamaremos Sistema Libre No Retardado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{69}$$

En este caso el término forzante sería

$$\sum_{j=1}^{r} B_j x(t - \tau_j) + CU(t) + \sum_{k=1}^{s} D_k U(t - \delta_k) \tag{70}$$

En cualquiera de los dos casos la matriz fundamental $\Psi(t)$ debe satisfacer la ecuación del sistema libre correspondiente. Para el Sistema Libre Retardado se cumplirá

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(t) &= A\Psi(t) + \sum_{j=1}^{r} B_j \Psi(\tau - \tau_j) \Rightarrow \Psi(t) = \\ &= e^{At} \left[I + \sum_{j=1}^{r} \left(\int_{\tau_j}^{t} e^{-A\tau} B_j \Psi(\tau - \tau_j) U(t - \delta_k) d\tau \right) \right] \end{aligned} \tag{71}$$

Para el Sistema Libre No Retardado se cumplirá a su vez

$$\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t) \Rightarrow \Psi(t) = e^{At} \tag{72}$$

A partir de las matrices fundamentales (71) y (72) podemos construir directamente un primer intento de soluciones.

Solución según el Sistema Libre No Retardado

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \left[\sum_{j=1}^{r} B_j x(\tau - \tau_j) + CU(\tau) + \sum_{k=1}^{s} D_k U(\tau - \delta_k) \right] d\tau \tag{73}$$

Precisamente el método que se desarrolla en esta memoria se basa fundamentalmente en una resolución por Taylor de la integral que aparece en (73) por medio de los operadores de integración y retardo, dado que su resolución explícita es en general imposible.

Solución según el Sistema Libre Retardado[7]

$$\begin{aligned} x(t) = \Psi(t)x_0 + \sum_{j=1}^{r} \int_0^{\tau_j} \Psi(t-\tau) B_j \varphi(\tau - \tau_j) d\tau + \\ + \int_0^t \Psi(t-\tau) \left[CU(\tau) + \sum_{k=1}^{s} D_k U(\tau - \delta_k) \right] d\tau \end{aligned} \tag{74}$$

donde $\varphi(0) = x_0$ y se ha utilizado la matriz de transición $\Psi(t)$ tal como aparece en (71). Al tratar de resolver la ecuación (74) aparecen ciertos problemas. Si se intenta deducir una matriz asociada $\mathcal{A}$ (una de las vías tradicionales de resolución) tal que cumpla la relación diferencial

$$\mathcal{A}e^{\mathcal{A}t} = \frac{d}{dt}(e^{\mathcal{A}t}) \tag{75}$$

y tomando simplemente el caso de un solo retardo puntual en el estado, se tiene que

$$\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t) + B_1\Psi(t - \tau_1)$$

entonces

$$\mathcal{A}e^{\mathcal{A}t} = Ae^{\mathcal{A}t} + B_1 e^{\mathcal{A}(t-\tau_1)} \Rightarrow \mathcal{A} = A + B_1 e^{-\mathcal{A}\tau_1} \tag{76}$$

El problema consiste en que no se puede asegurar que la matriz solución de (76) tenga todos sus autovalores reales o complejos conjugados por pares. Es decir, podrían existir autovalores complejos desacoplados, lo que llevaría a deducir que la solución es formal pero no válida, tal como ha sido señalado por Fiagbedzi y Person (1990)[8].

Otra forma de obtener una solución explícita sería la de integrar por partes la ecuación (71) a fin de obtener una expresión para la matriz de transición que se sustituiría posteriormente en la ecuación (74). Para ilustrar la complejidad del problema, considérese tan solo el caso escalar. Ello implicaría resolver la integral

$$I(\tau) = \int_h^t e^{a\tau} b_1 \Psi(\tau - \tau_1) d\tau \tag{77}$$

Integrando por partes, se tiene que

$$\int_{\tau_1}^{t} e^{at} b\Psi(\tau-\tau_1)d\tau = \frac{1}{a}e^{at}b\Psi\,(\tau-\tau_1)]_{\tau_1}^{t} - \int_{\tau_1}^{t}\frac{1}{a}e^{a\tau}b[a\Psi(\tau-\tau_1)+b\Psi(\tau-2\tau_1)]d\tau \quad (78)$$

Obsérvese que en la ecuación (78) lo único que se ha conseguido al integrar por partes es complicar aún más la ecuación, puesto que la integral que contiene a la función de transición en función del retardo no sólo no se elimina, sino que ahora aparece acompañada de otra integral de la función de transición en función del doble del retardo; es decir, de un problema con un único retardo puntual se ha pasado a otro con dos retardos puntuales. Se puede comprobar que integraciones subsecuentes llevarían a la aparición de nuevos retardos.

E. CONCLUSIONES

El método desarrollado en el presente trabajo es un poderoso instrumento para identificar, con un grado de precisión tan alto como se desee, las variables de estado -esto es, la dinámica- de un sistema con múltiples retardos puntuales en el estado y en el control. Las herramientas básicas son los operadores de multiplicación, integración y retardo. La ecuación (5), resuelta por el método, tiene un carácter muy general y de ahí que el método tenga una extensa aplicabilidad. El método es particularmente adecuado para realizar aplicaciones informáticas, dado que las resoluciones se obtienen de modo sistemático. En la práctica se ha observado que en la elección de m, el número de términos en el desarrollo, debe escogerse una unidad superior a la potencia máxima de las funciones que aparecen. Trabajar con una m superior no aporta mejoras sustanciales en las aproximaciones.

Una de las limitaciones del método es que todos los cálculos se han realizado para el intervalo $[0,\ 1]$. Existen dos vías para solventar este problema: desarrollar operadores para el cambio de escala, de tal forma que se pueda proyectar un intervalo $[0,\ k]$ en $[0,\ 1]$, con k arbitrariamente grande, o bien utilizar, en lugar de desarrollos en series de Taylor, desarrollos en serie de polinomios ortogonales generales, los cuales permiten escoger cualesquiera límites para el intervalo de definición. Esta será una de las extensiones directas del método en el futuro. Otra línea de investigación que queda pendiente es el diseño de leyes de control estabilizadoras para sistemas con retardo utilizando este método.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a los revisores anónimos sus sugerencias, que han contribuido a la mejora de este artículo. Este trabajo ha sido financiado por la Universidad del País Vasco a través del proyecto UPV 224.310-EA061/93.

REFERENCIAS

1. C.F. Alastruey, M. de la Sen, J. Bilbao y J.R. González de Mendívil, "Analysis of Systems with Time-varying Punctual and Distributed Delays in Both State and Control Variables via Taylor Series", *"Proc. 10th IASTED Int. Symp. on Modelling, Identification and Control"*, February 18-21, pp. 253-255, Innsbruck, (1991).
2. Bellman, " *Introduction to Matrix Analysis*" , McGraw-Hill, New York, (1970).
3. Chen y Hsiao, "Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control via Walsh Functions ", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. **20**, pp. 596-603, (1975).
4. Chen y Yang, "Analysis and Parameter Identification of Time-delay Systems via Polynomial Series", *Int. J. of Control*, Vol. **46**, N° 1, pp. 111-127, (1987.)
5. Chung y Sun, "Analysis of the Time-delay Systems Using an Alternative Technique", *Int. J. of Control*, Vol. **46**, N° 5, pp. 1621-1631, (1987).
6. M. de la Sen, "Fundamental Properties of Linear Control Systems with After Effect-I. The Continuous Case", *Mathl. Comput. Modelling*, Vol. **10**, N° 7, pp. 473-489, (1988).
7. M. de la Sen y N. Luo, "Discretization and FIR Filtering of Continuous Linear Systems with Internal and External Points Delays", *Int. J. Control*, (en prensa).
8. Y.A. Fiagbedzi y A.E. Person, "Output Feedback Stabilization of Delay Systems via Generalization of the Transformation Method", *Int. J. of Control*, Vol. **51**, N° 4, pp. 801-822, (1990).
9. Horng y Chou, "Analysis, Parameter Estimation and Optimal Control of Time-delay Systems via Chebyshev Series", *Int. J. of Control*, Vol. **41**, N° 5, pp. 1221-1234, (1985).
10. Horng y Chou, "Analysis and Parameter Identification of Time-delay Systems via Shifted Jacobi Polinomials", *Int. J. of Control*, Vol. **44**, N° 4, pp. 935-942, (1986).
11. Hwang y Chen, "Analysis and Parameter Identification of Time-delay Systems via Shifted Legendre Polinomials", *Int. J. of Control*, Vol. **41**, pp. 403-415, (1985).
12. Lee y Chang, "Analysis of Time-varying Delay Systems via General Orthogonal Polynomials", *Int. J. of Control*, Vol. **45**, N° 1, pp. 169-181, (1987).
13. M. Razzaghi y M. Razzaghi, "Taylor Series Analysis of Time-varying Multi-delay Systems", *Int. J. of Control*, Vol. **50**, N° 1, pp. 183-192, (1989).