

CONDICIÓN ABSORBENTE DISCRETA NO LOCAL (DNL) EN DIFERENCIAS FINITAS PARA MODELOS ELÍPTICOS DE PROPAGACIÓN DE ONDAS EN EL MAR

RUPERTO P. BONET
NORBERTO NIGRO
MARIO A. STORTI
y
SERGIO R. IDELSOHN

*Grupo de Tecnología Mecánica del INTEC
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
Tel: + 54-42-55 91 75, Fax: + 54-42-55 09 44
E-mail: rbonet@intec.unl.edu.ar*

RESUMEN

El método de diferencias finitas es empleado para obtener soluciones aproximadas de problemas de radiación y dispersión de ondas modeladas por la ecuación de Berkhoff en dominios no acotados. Un método operacional ha sido desarrollado para incorporar la condición de radiación exacta en el infinito en el esquema numérico. La determinación del espectro del operador discreto de Helmholtz sobre un dominio estructurado ha posibilitado la obtención de una condición de frontera perfectamente absorbente no local en el medio discreto. Las pruebas numéricas validan estas conclusiones.

NON-LOCAL ABSORBING DISCRETE BOUNDARY CONDITION (DNL) IN FINITE ELEMENTS FOR WATER WAVES ELLIPTIC MODELS

SUMMARY

The finite difference method is used to approximate the solutions of Berkhoff's equation for water radiation and scattering in an unbounded domain. To incorporate the exact far field radiation condition in the numerical scheme an operational method has been developed. The determination of Helmholtz discrete operator spectrum over a structured domain allows the design of a non-local perfectly absorbent boundary condition in the discrete medium. Numerical tests validate these conclusions.

Recibido: Septiembre 1997

INTRODUCCIÓN

La solución numérica de problemas de radiación y/o dispersión gobernados por la ecuación de Berkhoff^{1,15} y sus sucesivas extensiones, las cuales envuelven dominios de fluidos no acotados, requieren especial tratamiento cuando son empleados métodos de cálculo sobre un dominio computacional, tales como el método de los elementos finitos o el de diferencias finitas. Estas soluciones describen una amplia variedad de fenómenos físicos, incluyendo la propagación de ondas en puertos, alrededor de rompeolas, estructuras flotantes o islas. Tales soluciones pueden ser afectadas por la presencia de reflexiones físicas de las ondas salientes del dominio computacional. Tal problemática ha sido objeto de estudio por muchos investigadores, lo cual ha propiciado el desarrollo de procedimientos de cálculo que organizan la absorción de las ondas salientes dispersas por el medio.

Algunos modelos de elementos finitos propuestos por Mei¹² y desarrollados por Tsay y Liu¹⁶, Kostense¹¹, Chen y Houston⁴ y Xu y Panchang⁻⁷ aproximan la batimería y representan la región exterior al dominio computacional por una profundidad constante. De esta manera es posible describir en forma exacta las propiedades de las ondas dispersadas fuera del dominio computacional. Las ondas dispersadas tienen que satisfacer la condición de radiación en el infinito y ellas pueden ser descritas por una serie de Fourier-Bessel, o utilizando elementos infinitos (H.S. Chen)⁵.

Han sido empleados aproximaciones parabólicas de diversos órdenes como condiciones de frontera para las ondas dispersadas en regiones rectangulares y de revolución. Tales aproximaciones son obtenidas aplicando métodos de separación del campo incidente y reflejado, considerando como dirección predominante aquella en la que viajan las ondas que se dispersan del medio. Según estas aproximaciones las ondas que viajan en tales direcciones son absorbidas totalmente, pero no así en el resto de los casos, hecho que hizo notar Kirby¹⁰. En estas aproximaciones locales la expresión dependiente de la componente lateral determina las ondas que incidiendo al contorno pueden ser absorbidas por la condición impuesta. Panchang *et al.*^{13,14,18} han utilizado condiciones de frontera aproximadas con estas características y recientemente han desarrollado aproximaciones parabólicas en coordenadas radiales y aplicadas a lo largo de un segmento circular, ubicado como frontera artificial del dominio computacional. Tales aproximaciones se expresan en términos de la distancia radial y son válidas en el campo cercano. Ellas son aplicables si la profundidad es constante en la región exterior al dominio computacional, de igual manera que el procedimiento desarrollado por Dalrymple y Martin⁶.

Bonet, Nigro y Storti³ desarrollan una condición de radiación aproximada en el dominio computacional mediante el empleo del método de los filtros de esponja⁹. Este método típicamente se basa en la incorporación de la expresión operacional de la aproximación parabólica de primer orden a la ecuación modelo con un cierto amortiguamiento, el cual es ajustable por la selección conveniente de los parámetros que lo definen. Tal procedimiento posibilita amortiguar ondas incidentes al contorno con un ángulo hasta aproximadamente 70 grados y tiene la ventaja de su simple implementación computacional, empero el uso de una región ficticia para definir la función amortiguante eleva el costo computacional.

El método DtN propuesto por Givoli y Keller⁸ plantea un problema de valores frontera en una región acotada mediante la imposición de una relación no local entre la función y su derivada normal sobre una frontera artificial. Tal relación se expresa mediante una serie infinita que contiene integrales espaciales no locales, cuya discretización acopla todos los grados de libertad sobre la frontera artificial y resulta una matriz densa, totalmente llena.

En este trabajo desarrollamos una condición de frontera discreta y no-local (DNL), que a diferencia de la formulación DtN, resuelve en el discreto la ecuación de Helmholtz definida sobre la región exterior al dominio computacional. Tal procedimiento se basa en obtener la descomposición espectral del operador discretizado y a tal efecto se obtiene una matriz llena que acopla todos los grados de libertad sobre la frontera artificial. Mediante esta transformación el campo ondulatorio es desacoplado en sus modos ondulatorios incluyendo los modos de propagación y desvanecientes hacia “adelante” y hacia “atrás”. La condición DNL es derivada ignorando el campo ondulatorio hacia “atrás”. La condición obtenida es válida para todos los ángulos de incidencia y es perfectamente absorbente en el medio discreto y este carácter discreto posibilita el empleo de funciones de interpolación de diversos órdenes en su construcción y su extensión en forma sistemática a diferentes tipos de operadores. La derivación de la condición absorbente DNL y su incorporación en una formulación mediante diferencias finitas para la ecuación de Berkhoff

$$\nabla_h(CC_g\nabla\phi) + k^2CC_g\phi = 0 \quad (1)$$

en problemas bidimensionales son mostrados en este trabajo. En las próximas secciones iniciamos la formulación DNL para problemas asociados a la ecuación de Berkhoff sobre un fondo plano (ecuación de Helmholtz) para regiones rectangulares. Empleando el método en diferencias finitas la ecuación de Helmholtz es discretizada y realizando la descomposición espectral del operador en el medio discreto, la ecuación es desacoplada en N_{lay} (número de nodos colocados en el contorno) ecuaciones escalares en diferencias, cuya estructura genera una ecuación característica cuadrática. De las soluciones de la ecuación característica sólo retenemos los modos que caracterizan el campo ondulatorio “hacia adelante”. Son estudiadas las propiedades de la matriz DNL y su comportamiento respecto a la discretización de la malla empleada y a diferentes ángulos de incidencia al contorno. La formulación DNL es presentada para problemas de radiación y dispersión en regiones limitadas por un arco circunferencial y comparado su comportamiento respecto a la matriz DtN.

Los ejemplos numéricos son presentados para demostrar la validez del procedimiento desarrollado y la importancia de la selección de los modos “hacia adelante” en la precisión de la solución numérica. El primer ejemplo corresponde a la difracción de una onda plana por un rompeolas semi-infinito. En este caso se verificó que la solución numérica sobre una malla rectangular es invariante a la posición del contorno DNL, lo cual muestra su carácter perfectamente absorbente. Luego son presentados dos ejemplos de radiación de un cilindro por una carga uniforme o armónica circunferencialmente. En el segundo caso las ondas se dispersan en todas las direcciones con el modo circunferencial excitado y la solución numérica mediante

DNL simula adecuadamente la incidencia de las ondas dispersadas al contorno del dominio computacional. Finalmente se presenta una comparación entre las condiciones de contorno locales (en coordenadas rectangulares) en su versión discreta y global frente a la versión discretizada de la DNL.

FORMULACIÓN DNL EN COORDENADAS RECTANGULARES

Obtengamos la solución de la ecuación de Helmholtz en una región rectangular Ω con una frontera abierta (Figura 1) descrita mediante el problema (2)

$$\begin{aligned} \Delta\phi + k^2\phi &= 0 && \text{en } \Omega \\ \phi &= \bar{\phi} && \text{en } AB \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= 0 && \text{en } AD \text{ y } BC \\ &&& +c. \text{ tipo DNL en } DC \end{aligned} \quad (2)$$

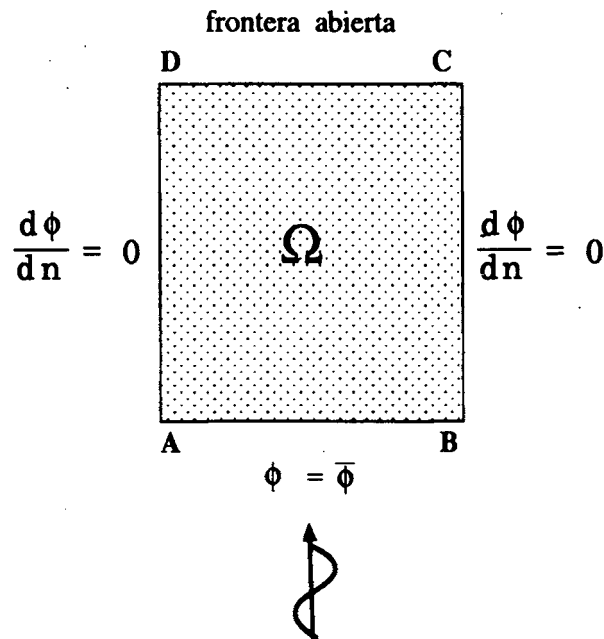


Figura 1. Un modelo de dominio rectangular

Consideremos la discretización por diferencias finitas de la ecuación de Helmholtz en una malla “estructurada” (Figura 2), es decir donde los nodos se hallan dispuestos en “capas” y denotemos por ϕ^j el vector de potencias nodales de los nodos correspondientes a la capa j .

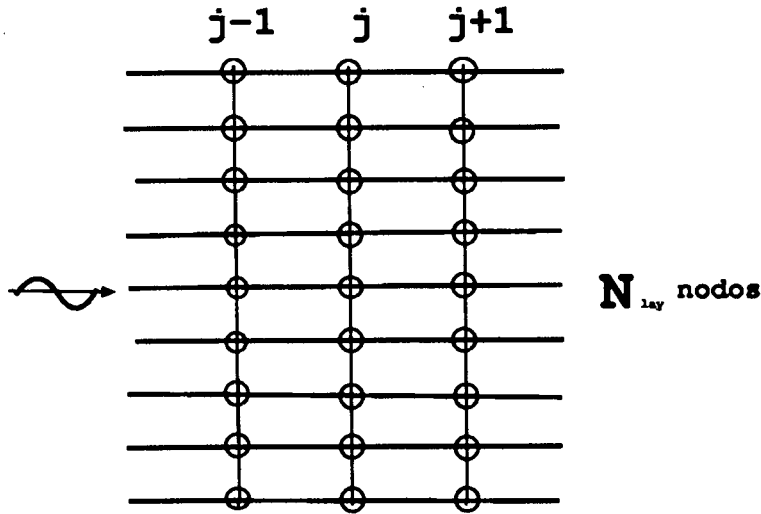


Figura 2. Discretización de una malla estructurada.

La ecuación discreta correspondiente a los nodos de una capa interior j es de la forma

$$A\phi^{j-1} + B\phi^j + A\phi^{j+1} = 0 \quad (3)$$

donde la matriz \mathbf{B} es una matriz tridiagonal y la matriz \mathbf{A} es una matriz diagonal. La matriz de coeficientes correspondiente a la capa $j-1$ es igual a la de la capa $j+1$ debido a la simetría del operador. Premultiplicando por A^{-1} toda la ecuación y haciendo la descomposición espectral de $(A^{-1}B)$ obtenemos

$$A^{-1}B = V\Lambda V^{-1} \quad (4)$$

donde Λ es una matriz diagonal formada por los autovalores de $A^{-1}B$ y V el sistema de autovectores de $A^{-1}B$. Para un número de onda $k(x, y) = k$ constante en la región Ω , discretizada por una malla uniforme, Λ y V pueden ser expresadas en forma explícita

$$\Lambda(i) = -(2 - (kh)^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{(i-1)\pi}{2(N_{\text{lay}} - 1)} \right)) \quad (5)$$

$$V(i, j) = \sqrt{\frac{2}{(N_{\text{lay}} - 1)}} \sin \left(\frac{(i-1) * j\pi}{(N_{\text{lay}} - 1)} \right)$$

para $i = 1, 2, \dots, N_{\text{lay}}$. Con la descomposición (4) la ecuación (3) puede ser escrita en la forma

$$V^{-1}\phi^{j-1} + \Lambda V^{-1}\phi^j + V^{-1}\phi^{j+1} = 0 \quad (6)$$

Si definimos $U = V^{-1}\phi^j$ escribimos (6) en la forma

$$U^{j-1} + \Lambda U^j + U^{j+1} = 0 \quad (7)$$

siendo C y C_g las velocidades de fase y grupo, respectivamente. Finalmente, se tienen las igualdades

$$\frac{\delta\mu^\pm}{\mu^\pm} = \mp \frac{|\delta\omega|h}{C_g} \quad (17)$$

$$\mu_p^\pm = \left(1 \mp \frac{|\delta\omega|h}{C_g}\right) \mu^\pm \quad (18)$$

las cuales muestran que μ_p^\pm se mueve sobre el rayo definido por μ^\pm , en el caso de μ^+ hacia el interior del círculo y en el caso de μ^- hacia el exterior del mismo, lo cual significa físicamente que las ondas que viajan con componente μ^- divergen hacia ∞ , y por lo tanto son eliminadas. Efectivamente, mediante el principio de absorción límite haciendo $\delta\omega$ tender hacia cero se tiene la elección $\mu = \mu^+$.

Para cualquier i tenemos que

$$(u^+)_i^j = c_i^+ \mu_i^{+j} \quad (19)$$

Recomponiendo el vector U^+ en la base canónica $(e_i)_{i=1, \dots, N_{\text{lay}}}$ se tiene

$$\begin{aligned} (U^+)^{j+1} &= \sum_{i=1}^{N_{\text{lay}}} (u_i^{j+1})^+ e_i \\ &= \sum_{i=1}^{N_{\text{lay}}} (u_i^j)^+ \mu_i e_i \\ &= G(U^+)^j \end{aligned} \quad (20)$$

siendo la matriz $G = \text{diag}(\mu_1(\lambda), \dots, \mu_{N_{\text{lay}}}(\lambda))$, y volviendo a la base V se tiene que

$$\begin{aligned} (\phi^+)^{j+1} &= V(U^+)^{j+1} \\ &= VG(U^+)^j \\ &= (VGV^-)(V(U^+)^j) \\ &= F(\phi^+)^j \end{aligned} \quad (21)$$

Finalmente, la matriz F que relaciona los vectores nodales $(\phi^+)^{j+1}$ y $(\phi^+)^j$ se expresa por

$$F = VGV^{-1} \quad (22)$$

Análogamente se cumple

$$(\phi^-)^{j+1} = F^{-1}(\phi^-)^j \quad (23)$$

Puede verse fácilmente a partir de (22) que F satisface la siguiente ecuación matricial

$$AF^2 + BF + A = 0 \quad (24)$$

MATRIZ DNL

El procedimiento DNL basado en el comportamiento del haz cuadrático operacional $A\mu^2 + B\mu + A$, donde A y B representan los operadores matriciales originados por la discretización del operador de Helmholtz con un índice de refracción $k = k(x, y)$ constante, provee una matriz que relaciona los vectores de las capas j y $(j + 1)$, en la dirección normal a la frontera del dominio de cálculo. Dicha matriz posee las características siguientes:

- Es una matriz llena.
- Es una matriz cíclica.
- La suma de los elementos por filas es constante.
- El espectro discreto está ubicado en el círculo unidad, sobre el eje real para ondas que se desvanecen y en el semiplano superior del plano complejo para los modos progresivos.

Dado que la matriz DNL es esencialmente obtenida mediante un procedimiento numérico, la influencia de la discretización resulta de mayor interés en su construcción, y mostremos, como en la medida en que refinemos la malla, la condición DNL se aproxima a la condición perfectamente absorbente del medio continuo. Para describir su comportamiento cualitativo calculamos los errores absolutos de amplitud $|\rho|$ y de fase $|\sigma|$ del vector nodal ϕ^{j+1} respecto al vector nodal $F \cdot \phi^j$, en dependencia de la distancia nodal h de la malla y de los modos transversales k_y generados por una onda monocromática incidente en el contorno. Para ello ponemos la expresión exacta $\phi_l^j = \exp i(k_y h_y l + \sqrt{k^2 - k_y^2} h_x j)$ y mediante las expresiones $|\rho| = \|\phi^{j+1}\| - \|F\phi^j\|$ y $|\sigma| = |\text{fase}(\phi^{j+1}) - \text{fase}(F\phi^j)|$ realizamos los cálculos correspondientes. Se verificó que los errores de amplitud para los modos progresivos es cero, por lo cual profundizaremos en la influencia de la discretización en el error de fase. En la Figura 4 graficamos un

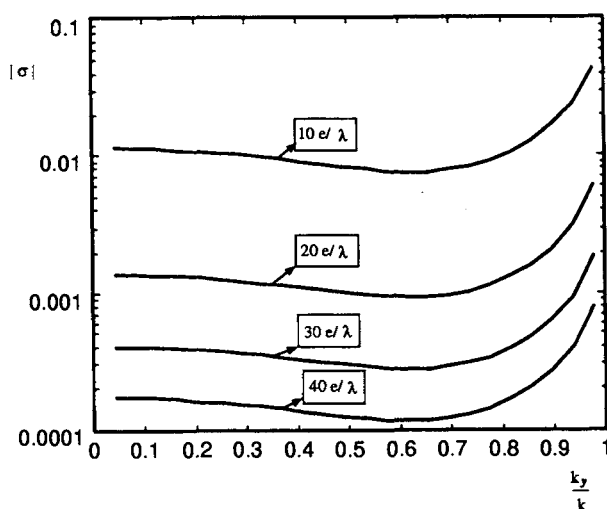


Figura 4. Error de fase con la matriz DNL sobre una malla uniforme para diferentes distancias nodales

haz de curvas de los errores de fase sobre la capa j para diferentes valores de distancias nodales de una malla uniforme, correspondientes a las resoluciones de 10, 20, 30 y 40 elementos por longitud de onda, respectivamente. Como se puede apreciar la sucesión de errores de fase es convergente, hacia cero.

FORMULACIÓN DNL PARA PROBLEMAS DE RADIACIÓN Y DISPERSIÓN EN COORDENADAS CIRCUNFERENCIALES

Con el propósito de calcular directamente las ondas dispersadas ϕ^s por la acción de una onda plana incidente

$$\phi^i = A_0 e^{ikr \cos(\theta - \theta_0)} \quad (25)$$

la ecuación (1) puede plantearse como

$$\nabla(CC_g \nabla \phi^s) + k^2 CC_g \phi^s = -CC_g(k^2 - k_0^2)\phi^i \quad (26)$$

sujeta a la condición de frontera de radiación en el infinito

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \sqrt{k_0 r} \left(\frac{\partial}{\partial x} - ik_0 \right) \phi^s = 0 \quad (27)$$

tales que $k = k(x, y)$ es constante e igual a k_0 en el exterior de un dominio acotado Ω .

En (25), A_0 y θ_0 son amplitud y la dirección de la onda incidente, respectivamente. ϕ^s es el potencial de ondas dispersas que satisface la condición de radiación exacta en el infinito (4). De esta forma el potencial $\phi = \phi^i + \phi^s$ representa la solución de la ecuación de Berkhoff, dada en (1). Aquí $\phi = \phi(x, y)$ es el valor del potencial de velocidades en la superficie media $z = 0$, ω es la frecuencia de oscilación, C y C_g denotan las velocidades de fase y de grupo, respectivamente, $k = k(x, y)$ es el número de onda relacionado a la profundidad local $h(x, y)$, mediante la relación de dispersión $\omega^2 = gk \tanh(kh)$

Consideremos la solución de la ecuación de Helmholtz en la región exterior a Ω . Para ello extendemos la región Ω hasta un círculo de radio r_a , el cual representa la frontera artificial donde es aplicable la condición de contorno DNL (Figura 5).

Sea una discretización de la ecuación de Helmholtz en una malla "estructurada" sobre el anillo $r_a \leq r \leq r_b$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, tales que r_b sea suficientemente grande, como para considerar la no influencia de la curvatura del círculo dada respecto a la onda incidente en el medio, o sea, al menos debe cumplirse que $k_0 \cdot r_b \gg 2\pi$. Igual que en el caso rectangular denotemos por ϕ^j el vector de potencias nodales de los nodos correspondientes a la capa j . La ecuación discreta correspondiente a los nodos de la capa interior j es de la forma

$$C^j \phi^{j-1} + B^j \phi^j + A^j \phi^{j+1} = 0 \quad (28)$$

donde la matriz B^j es una matriz tridiagonal y las matrices A^j y C^j son matrices diagonales. A diferencia del caso rectangular las matrices A^j , B^j y C^j son diferentes en capas sucesivas, debido a que dependen de los valores de r en cada capa j y de

la discretización respecto a θ , la cual define los modos circunferenciales. La ecuación discreta correspondiente a los nodos de la capa más alejada $j = M$ es de la forma

$$C^M \phi^{M-1} + B^M \phi^M + A^M \phi^{M+1} = 0 \quad (29)$$

Considerando que la capa $j = M$ se encuentra en el infinito, donde consideramos el medio plano, mediante el procedimiento del apartado anterior obtenemos la matriz DNL correspondiente a dicha capa.

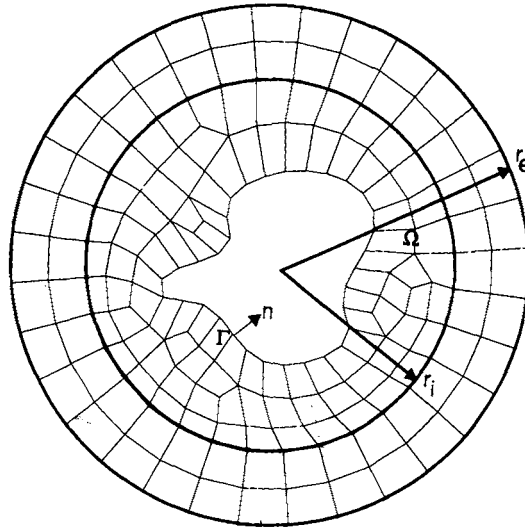


Figura 5. Un modelo de dominio para problemas de radiación

Sustituyendo

$$(\phi^+)^M = F^M (\phi^+)^{M-1} \quad (30)$$

a la ecuación (28) para la capa $j = M - 1$ se obtiene una relación entre $(\phi^+)^{M-1}$ y $(\phi^+)^{M-2}$ mediante la expresión

$$(\phi^+)^{M-1} = -(A^{(M-1)} * F^M + B^{(M-1)})^{-1} * C^{(M-1)} (\phi^+)^{M-2} \quad (31)$$

De aquí que la matriz DNL en la capa $j = M - 1$ adopta la forma

$$F^{M-1} = -(A^{(M-1)} * F^M + B^{(M-1)})^{-1} * C^{(M-1)} \quad (32)$$

Se puede demostrar que la matriz DNL correspondiente a la capa $r = r_a$ se obtiene repitiendo el proceso de cálculo dado por la ecuación (32) desde la capa $j = M - 1$ hasta la capa $j = 1$ (la correspondiente a $r = r_a$). Este proceso lo denominamos condensación de la matriz DNL plana a la matriz DNL circunferencial.

En cuanto al costo computacional, esta operación es equivalente a la factorización de una matriz correspondiente a una malla de diferencias finitas de $N_{lay} \times M$ nodos,

donde M es el número de capas de nodos que se introducen desde r_a hasta r_b , pero con la particularidad de que no es necesario tener todas las matrices A^j , B^j y C^j en memoria al mismo tiempo, sino que se van generando a medida que la condensación avanza. De esta manera si bien el tiempo de CPU se incrementa con el radio exterior r_b la cantidad de memoria requerida no. Recordemos que el cuello de botella para estos problemas es la cantidad de memoria RAM requerida.

La condición DNL se diferencia de la condición DtN⁸ en la resolución del problema exterior asociado a la ecuación de Helmholtz; la primera resuelve el problema en el medio discreto y la segunda mediante aproximaciones por series del tipo Fourier-Bessel. Con la idea de investigar el comportamiento de la condición DNL respecto a la condición DtN, consideramos a sumación de las sumas parciales de la serie hasta un orden 17, la cual garantiza un comportamiento estable independientemente del número de modos circunferenciales considerados en la discretización de la malla de cálculo. Tomemos como modelo ondas armónicas con una longitud de onda $\lambda = 2a$ radiadas circunferencialmente por un cilindro de radio a y para un dominio computacional con $a \leq r \leq 2a$, calculamos el error absoluto del vector $\phi^{j+1} - F \cdot \phi^j$ para cada modo circunferencial a una distancia $R = 0,1 \lambda$ de la frontera del dominio de cálculo, sustituyendo ϕ^j por la expresión exacta $\exp i(k_y h_y l + \sqrt{k^2 - k_y^2} h_x j)$. Se hicieron pruebas para $N = 30$ y 60 modos circunferenciales, cuyos resultados son graficados en la Figura 6. En esta figura se describe el error absoluto modal $|\rho_m|$ respecto al cociente $\frac{n}{kR}$ en el caso de modos circunferenciales progresivos, obteniéndose errores del mismo orden por ambos procedimientos y, según se aprecia, existe un factor 2 en el que difiere la condición DNL de la condición DtN.

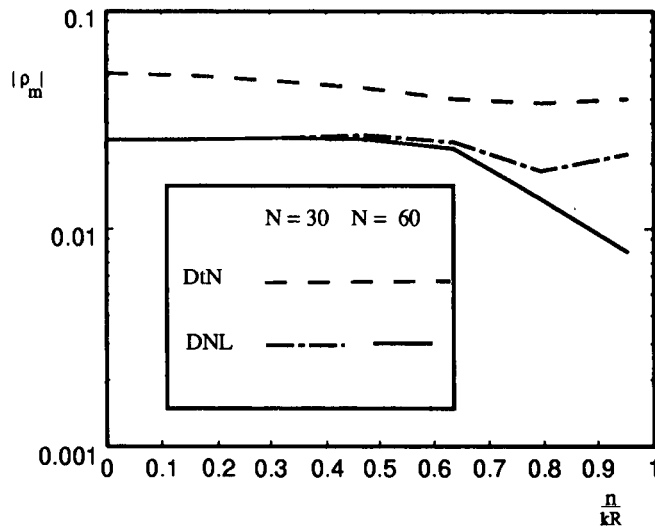


Figura 6. Radiación armónica circunferencialmente de un cilindro de radio a , $ka = \pi$, a lo largo de la frontera artificial $R = 2a$. Comparación DNL-DtN

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Los ejemplos son seleccionados de forma tal de contar con soluciones analíticas o una comprensión intuitiva del comportamiento de las mismas, con el propósito de evaluar la calidad de las soluciones computadas.

Difracción de ondas por un rompeolas semi-infinito

La solución exacta para el caso de la difracción producida por un rompeolas semi-infinito y perfectamente reflejante localizado sobre un fondo horizontal (ecuación de Helmholtz) fue dada por Sommerfeld y se puede encontrar en diversas referencias en la forma siguiente⁷

$$\phi(r, \theta) = f(\sigma)e^{-ikr \cos(\theta - \theta_0)} + f(\sigma')e^{-ikr \cos(\theta + \theta_0)} \quad (33)$$

donde

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sigma &= 2(kr/\pi)^{1/2} \sin((\theta - \theta_0)/2) \\ \sigma' &= -2(kr/\pi)^{1/2} \sin((\theta + \theta_0)/2) \\ f\sigma &= \frac{(1+i)}{2} \int_{-\infty}^{\sigma} e^{-i\pi t^2} f^2 dt = \frac{(1+i)}{2} \left(\frac{(1-i)}{2} + C(\sigma) - iS(\sigma) \right) \end{aligned} \quad (34)$$

donde S y C son las integrales de Fresnel seno y coseno, k el número de onda (constante), θ_0 el ángulo que forma la dirección de propagación con la parte positiva del eje de las x y θ el ángulo que forma el radio vector del punto (x, y) con la parte positiva del eje x . El valor $|\phi(r, \theta)|$ representa el coeficiente de difracción respecto al rompeolas, si consideramos que la onda incidente tiene amplitud uno.

Las Figuras 7 y 8 muestran los patrones de difracción analíticos y numéricos para una onda monocromática de periodo $T = 16$ s y una longitud de onda de $\lambda = 186,5$ m que incide con un ángulo de 90 grados al rompeolas, que se encuentra situado en un dominio rectangular con una extensión de $932,50 \times 466,25$ m y una profundidad de 15 m. Se empleó una resolución de 100×50 nodos sobre un dominio computacional con condiciones de frontera laterales perfectamente reflejantes.

Como se aprecia en la Figura 7, la solución analítica aproximada presenta un "ruido" detrás del rompeola en la zona de sombra, lo cual imprime una diferencia cualitativa con la solución numérica obtenida para un flujo nulo sobre el rompeolas (Figura 8). A pesar de la influencia de las reflexiones laterales en los resultados numéricos el comportamiento de la solución numérica a pocas longitudes de ondas del rompeolas se corresponde adecuadamente con los resultados analíticos.

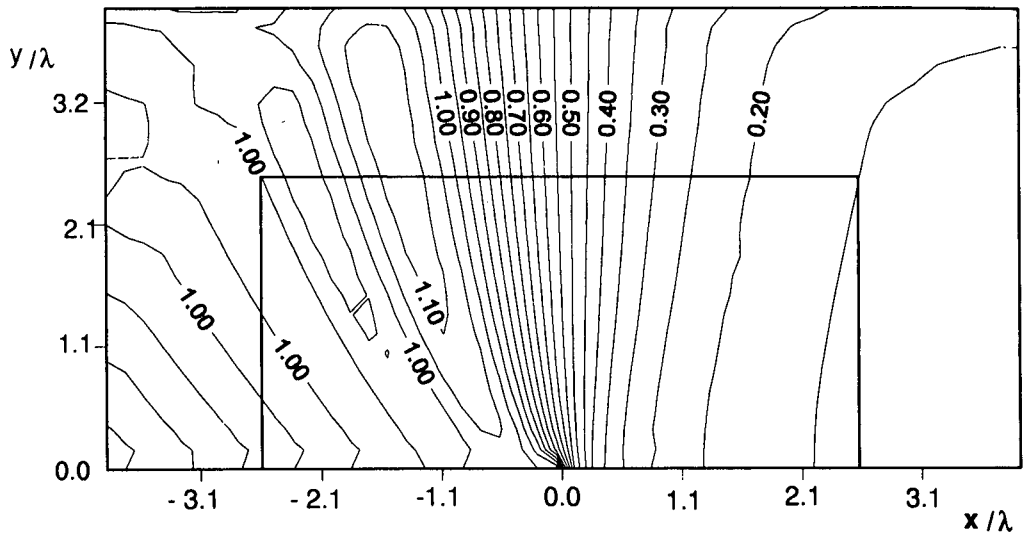


Figura 7. Solución analítica para difracción de ondas por un rompeolas semi-infinito

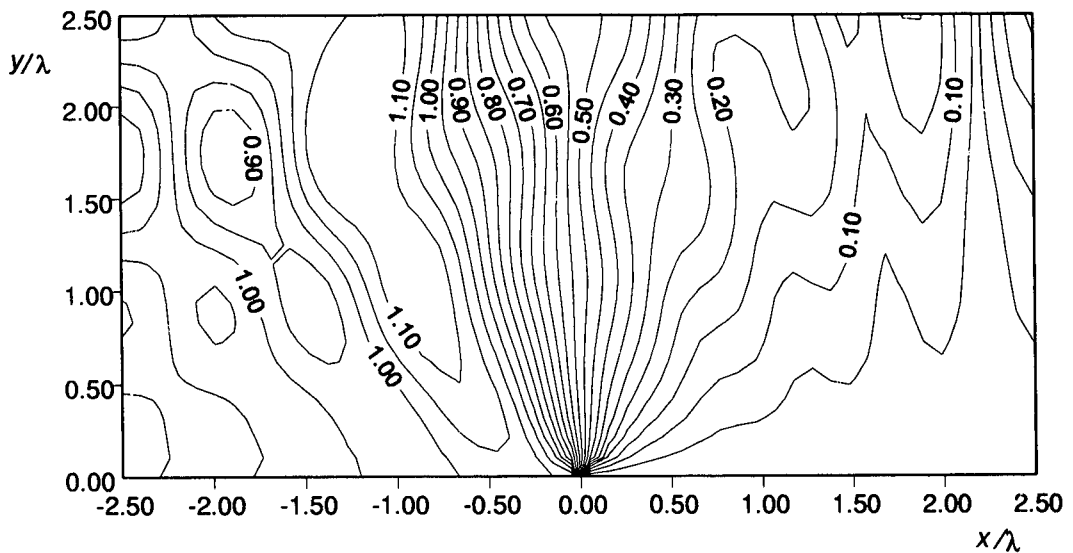


Figura 8. Difracción de ondas por un rompeolas semi-infinito. Solución numérica por diferencias finitas

Un cilindro infinito pulsando

Consideremos un cilindro circular de radio a pulsando uniformemente⁵. Este ejemplo provee un modelo para la validación del desarrollo del método propuesto sobre configuraciones bidimensionales. La frontera artificial está ubicada en $R = 2a$. El dominio computacional resultante es discretizado con 660 nodos. Nosotros examinamos el problema con condiciones de frontera tipo Dirichlet sobre la frontera física. Los resultados numéricos preservan la simetría cilíndrica de la solución exacta. En la

Figura 9 se muestra el comportamiento de la solución numérica respecto a la solución analítica.

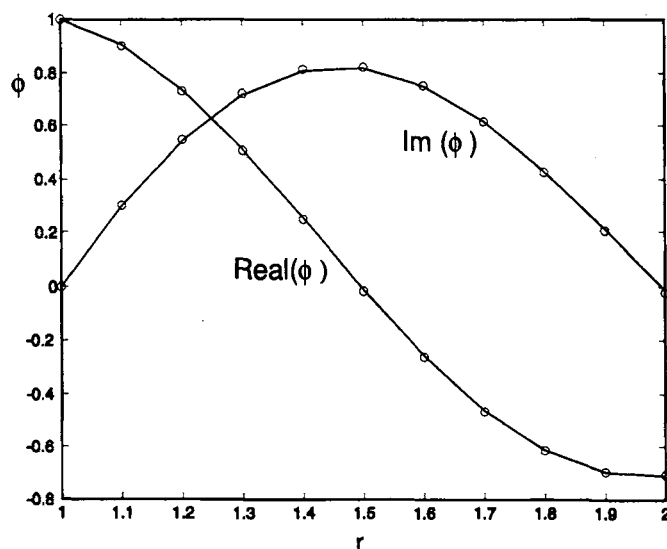


Figura 9. Cilindro de radio a uniformemente pulsado, $R = 2a$, $ka = \pi$: (-) solución analítica, (o) solución numérica

Radiación armónica circunferencialmente de un cilindro

Consideremos en tal sentido una carga distribuida $\cos(n\theta)$, sobre un cilindro de radio a , tal que la solución exacta es

$$\phi(r, \theta) = \phi_0 \cdot \frac{H_n^1(k_0 r) \cdot \cos(n\theta)}{H_n^1(k_0 a)} \quad (35)$$

El dominio computacional fue discretizado con 660 nodos. Nosotros examinamos el quinto modo circunferencial $n = 4$ y el número de onda adimensional $ka = \pi$ (la longitud de onda es igual al diámetro del cilindro). A diferencia del caso rectangular el procedimiento de cálculo empleado permite obtener la matriz DNL en el campo alejado, pero debido a que las matrices A^j , B^j y C^j dependen de los valores del radio y del elemento diferencial de arco, se calculan de forma recursiva las matrices DNL correspondientes hasta el radio de interés mediante la expresión $-(A^j F^{(j+1)} + B^j)^{-1} C^j$.

La Figura 10 muestra la comparación entre las partes imaginarias de la solución numérica y analítica para el caso $n = 4$. Se pudo apreciar que colocando la frontera del dominio de cálculo a 0,1 longitudes de ondas del contorno $R = 2a$ se obtiene una solución numérica, que se corresponde adecuadamente con la solución exacta.

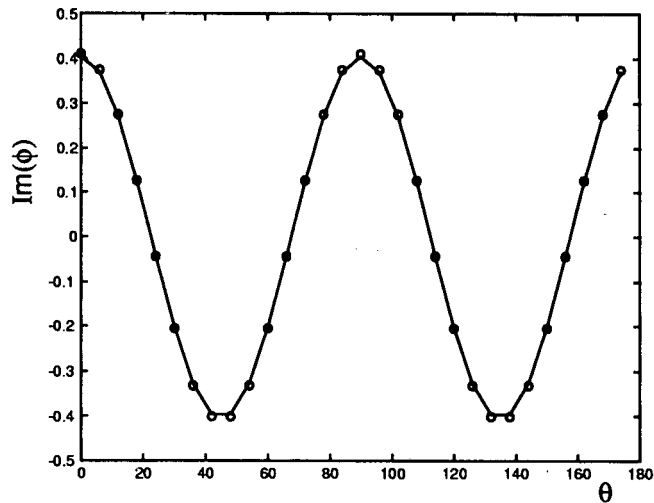


Figura 10. Radiación armónica ($n = 4$) circunferencialmente de un cilindro de radio a , $ka = \pi$ a lo largo de la frontera artificial $R = 2a$

COMPARACIÓN ENTRE LA DNL Y LAS CONDICIONES LOCALES DE PRIMERO Y SEGUNDO ORDEN

Consideremos las condiciones absorbentes locales de primer y segundo orden y de manera semejante al apartado anterior, obtenemos las correspondientes matrices globales F que relacionan los vectores $(\phi^+)^{j+1}$ y $(\phi^+)^j$.

Condición local de primer orden

La condición absorbente local de primer orden

$$\frac{d\phi}{dx} = ik\phi \quad (36)$$

se puede expresar usando un esquema de bajo orden mediante la relación

$$(\phi^+)_i^{j+1} = (1 + ikh_x)(\phi^+)_i^j \quad (37)$$

obteniéndose una matriz $F = (\text{diag}(1 + ikh_x), (1 + ikh_x), \dots, (1 + ikh_x))$ diagonal.

Condición local de segundo orden. Fórmula de Radder (1979)

La fórmula de Radder⁶ representa la primera ecuación parabólica de ondas para problemas de refracción-difracción y se expresa por

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial x} = \left(ik - (1/2k) \frac{\partial k}{\partial x} + (i/2k) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi^+ \quad (38)$$

Para un número de onda k constante, en forma discreta adopta la forma matricial $F = \text{tridiag}([(1 + i\delta), \beta], [\beta, (1 + i\delta), \beta], \dots, [\beta, (1 + i\delta)])$, donde $\delta = (kh_x) - \frac{(kh_x)}{(kh_y)^2}$, $\beta = -\frac{(kh_x)}{2(kh_y)^2}$

Aproximación de Booiij (1981)

Booiij⁷ usando el método de los pseudooperadores obtuvo la aproximación parabólica

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial x} = \left(ik - (1/2k) \frac{\partial k}{\partial x} + (i/2k) \left(3/2 - \frac{3i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (i/2k) \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi^+ \quad (39)$$

asociada a la ecuación de Berkhoff¹, la cual para un número de onda constante k se puede transformar a la relación $F_1(\phi^+)^{(j+1)} = F_2(\phi^+)^{(j)}$, donde $F_1 = \text{tridiag}([\alpha, \beta], [\beta, \alpha, \beta], \dots, [\beta, \alpha])$ y $F_2 = \text{tridiag}([\gamma, \delta], [\delta, \gamma, \delta], \dots, [\delta, \gamma])$, donde

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{0,5}{(kh_y)^2} \\ \beta &= \frac{0,25}{(kh_y)^2} \\ \delta &= 1 + (ikh_x) - \frac{1,5i(kh_x)}{(kh_y)^2} - \frac{0,5}{(kh_y)^2} \\ \gamma &= \frac{0,75i(kh_x)}{(kh_y)^2} + \frac{0,25}{(kh_y)^2} \end{aligned} \quad (40)$$

Se puede notar que, en cierta base, el orden de absorción está relacionado con el formato de la matriz F , o sea, mientras aumentamos el orden de la absorción aumentan el ancho de banda de la matriz F , hasta obtenerse una matriz llena mediante condiciones absorbentes no locales. Para el cálculo de los errores de amplitud y fase (para los modos progresivos) respecto a la distancia nodal, en la frontera absorbente del dominio de cálculo (Figura 1) consideremos un tren de ondas incidente con periodo $T = 8$ s y amplitud $A_0 = 1,0$ m sobre una batimetría horizontal $h = 15$ m, en un dominio rectangular de 1000 m de longitud.

Empleando inicialmente la condición de primer orden para ondas que inciden normalmente obtenemos para resoluciones de 10 y 20 elementos por longitud de onda los errores de amplitud 0,26134 y 0,07133, respectivamente, lo cual asevera que la condición de primer orden no es completamente absorbente en el medio discreto, aún para ondas incidiendo normalmente.

Mediante dicho ejemplo investiguemos el comportamiento de la condición DNL respecto a la condición de segundo orden de Booiij para diferentes modos transversales k_y , cuyos errores de amplitud y de fase para discretizaciones prefijadas con 10 y 20 elementos por longitud de onda en la dirección transversal son calculados. Mediante las Figuras 11 y 12 se aprecia que independientemente de la discretización la matriz DNL introduce errores de menor orden que la condición de segundo orden de Booiij⁷. Es de notar el buen comportamiento de la matriz DNL para ángulos mayores que 70 grados, como era de esperar.

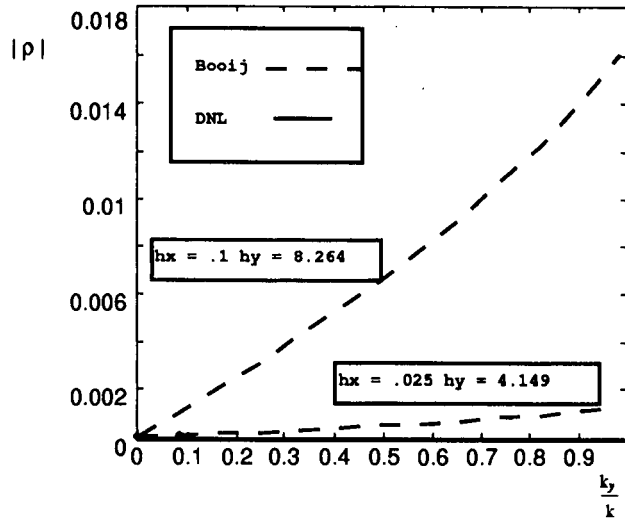


Figura 11. Errores de amplitudes de los modos progresivos empleando las condiciones de frontera no-local DNL y de segundo orden de Booi j

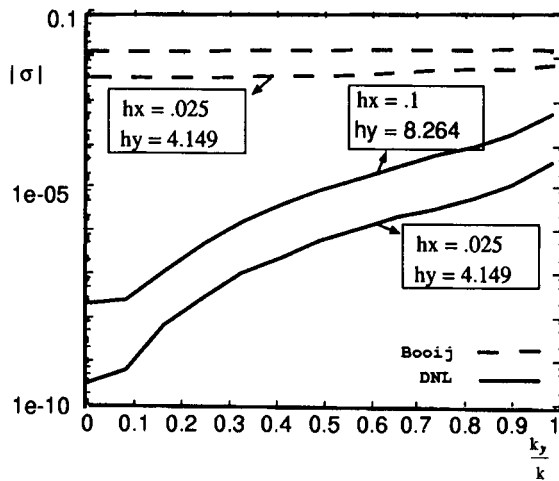


Figura 12. Errores de fases de los modos progresivos empleando las condiciones de frontera no-local DNL y de segundo orden de Booi j

CONCLUSIONES

El método DNL ha sido propuesto para incorporar la condición de radiación en el infinito de forma exacta. Mediante la condición DNL se obtiene una condición de frontera perfectamente absorbente hasta los N nodos transversales definidos por el número de nodos sobre la frontera absorbente (Figura 1), la cual origina una matriz

cíclica y llena que acopla todos los nodos de dicho contorno. La condición DNL origina errores del mismo orden de la DtN para problemas de radiación de ondas armónicas circunferencialmente. El procedimiento DNL es verificado mediante casos pruebas con soluciones analíticas y aproximadas, encontrándose una buena correspondencia entre las soluciones numéricas y las soluciones patrones, respectivamente. A diferencia de las condiciones de frontera parabólicas de orden finito, la condición DNL origina errores de fase para los modos progresivos de varios órdenes menores. Este hecho se hizo notar apreciablemente con la condición de frontera local de primer orden para incidencia normal. En este trabajo se muestra la convergencia de la condición DNL a la condición completamente absorbente del continuo, cuando hacemos tender hacia cero la distancia nodal.

Las ventajas del procedimiento DNL radican en que las operaciones se realizan en el medio discreto, a diferencia de las condiciones teóricas aproximadas de tipo locales y parabólicas, y de la condición no local tipo DtN donde se requiere el conocimiento de un sistema base de funciones del operador a resolver, lo cual se dificulta con el aumento de la anisotropía del medio. Finalmente el proceso de cálculo de la DNL se basa en el uso de los procedimientos de cálculo para la determinación de los autovalores. Este proceso, aún en el caso de geometrías circunferenciales no incrementa significativamente el costo computacional.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, Argentina) mediante el proyecto BID 802/OC-AR PID N° 26 y de la Universidad del Litoral (Argentina).

REFERENCIAS

1. J.C.W. Berkhoff, "Mathematical Models for Simple Harmonic Linear Water Waves. Wave Diffraction and Refraction", Delft Hydraulic Laboratory, Publicación N° 163, (1976).
2. J.C.W. Berkhoff, N. Booy, A.C. Radder, "Verification of Numerical Wave Propagation Models for Simple Harmonic Linear Water Waves", *Coastal Engineering*, Vol. **6**, 3, pp. 255-279, (1982).
3. R.P. Bonet, N. Nigro y M.A. Storti, "Solución de la ecuación de Berkhoff con condiciones de radiación aproximadas", *MECOM96*, Vol. **XVI**, pp. 245-254, Argentina, Setiembre, (1982).
4. H.S. Chen y J.R. Houston, "Calculation of Water Level Oscillation in Coastal Harbors. Instructional Rep., *CERC'87-2*, Coastal Engng. Research Center, WES, Vicksburg, (1987).
5. H.S. Chen, "Infinite Elements for Water Wave Radiation and Scattering, *Int. J. Num. Meth. in Fluids.*, Vol. **11**, pp. 555-569, (1990).
6. R.A. Dalrymple y P.A. Martin, "Perfect Boundary Conditions for Parabolic Water-Wave Models", *Proceedings R. Soc. Lond. A437*, pp. 41-54, (1992).
7. J.M. Grassa, "Modelos parabólicos de propagación del oleaje", *CEPYC. CEDEX*, Madrid, (1991).

8. I. Harari y J.R.T. Hughes, "Galerkin Least-Square Finite Element Methods for the Reduced Wave Equation with Non-Reflecting Boundary Conditions in Unbounded Domains", *Computer Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **98**, pp. 411-454, North Holland, (1992).
9. M. Israeli y Orszag, "Approximation of Radiation Boundary Conditions", *Journal of Comp. Physics*, Vol. **41**, pp. 115-135, (1981).
10. J.T. Kirby, "A Note on Parabolic Radiation Boundary Conditions for Elliptic Wave Calculations", *Coastal Engng.*, Vol. **13**, pp. 211-218, (1989).
11. J.K. Kostense, K.L. Meijer, M.W. Dingemans, A.E. Mynett y P. Van den Bosch, "Wave Energy Dissipation in Arbitrary Shaped Harbours of Variable Depth", *Proceedings 20th Int. Conf. Coastal Engng.*, pp. 2002-2016, (1986).
12. C.C. Mei, "*The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*", Wiley, New York, (1983).
13. V.G. Panchang, B. Cushman-Roisin, y B.R. Pearce, "Combined Refraction-Diffraction of Short Waves for Large Domains", *Coastal Engng.*, Vol. **12**, pp. 133-156, (1988).
14. V.G. Panchang, B.R. Pearce, W. Ge y B. Cushman-Roisin, "Solution to the Mild-Slope Wave Problem by Iteration", *Appl. Ocean Res.*, Vol. **13**, pp. 187-199, (1991).
15. R. Smith y T. Sprinks, "Scattering of Surface Waves by a Conical Island", *J. Fluids Mech.*, Vol. **72**, pp. 373-384, (1975).
16. T.K. Tsay y P.L.F. Liu, "A Finite Element Model for Wave Refraction and Diffraction", *Appl. Ocean Res.*, Vol. **5**, pp. 30-37, (1983).
17. B. Xu y V.G. Panchang, "Outgoing Boundary Conditions for Finite-Difference Elliptic Water-Wave Models", *Proceedings R. Soc. Lond. A441*, pp. 575-558, (1993).
18. B. Xu, V.G. Panchang, Z. Demirbibeck, "Exterior Reflections in Elliptic Harbor Models", *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, pp. 118-125, Mayo, (1996).