

FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSIONES EN PROBLEMAS CON CIERRE DE GRIETA

M. DOBLARE
F. ESPIGA
L. GRACIA
y
M. ALCANTUD

*Departamento de Ingeniería Mecánica,
E.T.S.I.I., Universidad de Zaragoza,
Luciano Gracia s/n,
50015 Zaragoza.*

RESUMEN

Se presenta en este trabajo la aplicación de un programa de contacto con pequeños desplazamientos y deformaciones entre materiales ortótropos y elásticos a la determinación de factores de intensidad de tensiones en grietas con labios en contacto, parcial o totalmente. El método de análisis empleado es el método de los elementos de contorno (M.E.C.). El programa incluye elementos lineales, cuadráticos y elementos singulares para reproducir el estado tensional en bordes de grieta. Se sigue un proceso de subregionalización con cada uno de los labios de la grieta en la subregión distinta, lo que permite la singularidad derivada de nudos dobles. Las condiciones de contacto entre dos sólidos se imponen de forma explícita, lo que permite la incorporación de diferentes zonas de contacto entre los cuerpos, con diferentes coeficientes de rozamiento en cada una de ellas, de una forma simple. Los factores de intensidad de tensiones se obtienen mediante la utilización de elementos singulares con nudo a 1/4 que dan resultados suficientemente buenos a efectos ingenieriles. Finalmente se estudia la influencia de la longitud de grieta y coeficiente de rozamiento en problemas de flexión.

SUMMARY

The application of a 2-D contact program with small displacements and strains between orthotropic elastic material solids, to the computation of effective stress intensity factors in cracks with partial or complete closure is the aim of this paper. The Boundary Element Method (BEM) is the one that has been used. The computer program uses isoparametric linear, quadratic and quarter-point-traction-singular elements in order to obtain the stress distribution in the neighborhood of the crack edges. A multidomain approach is followed in order to avoid the geometrical singularity that appear when a double-node method is used. The compatibility and equilibrium conditions along the contact interface are explicitly written, which allows the inclusion of different contact zones with different friction coefficients. Finally, the effect of the length of the crack and the friction coefficient in the stress intensity factor is also studied.

Recibido: Noviembre 1988

INTRODUCCION

Las exigencias crecientes en el diseño de elementos mecánicos implican la necesidad de incorporar cada vez en forma más precisa aspectos que previamente eran tan sólo aproximados e incluso no considerados. Tal es el caso del problema de fatiga y propagación de grietas, ambos determinantes a la hora de estimar la vida útil de un elemento mecánico sometido a cargas alternantes o con fisuras iniciales de una cierta longitud.

En Mecánica de la Fractura Elástica, el parámetro más utilizado para la determinación de la vida a fatiga o del carácter estable o inestable de un proceso de carga monótono es el factor de intensidad de tensiones. Existen textos enteros dedicados a presentar valores de este parámetro en distintas situaciones³⁵ y asimismo programas específicamente desarrollados, tanto en elementos finitos³² como en elementos de contorno^{8,16} para su obtención.

Sin embargo, la mayoría de estos estudios se centran en los casos de grietas con los labios completamente abiertos y suaves, es decir con coeficientes de rozamiento nulo. Esto que puede ser relativamente cierto en problemas con modo I predominante y en metales, deja de ocurrir en problemas con modos mixtos y sobre todo en materiales anisótropos y compuestos. El uso creciente de este tipo de materiales, ya sea hormigón y sobre todo de los laminados de fibra hace que este problema tienda a ser de particular importancia, máxime si tenemos en cuenta la reducción drástica que puede suponer en el factor de intensidad de tensiones la consideración de estos factores, y con ello en la vida predicha a fatiga, e incluso la posibilidad de que no se produzca propagación de grieta en situaciones donde un mero cálculo del factor con grieta abierta indicaría lo contrario. Tal es el caso de grietas en modo II esencialmente con fricción elevada entre sus labios.

En 1980, Andersson et al³⁴ presentan la primera formulación del problema de contacto elástico mediante ecuaciones integrales singulares. En este trabajo tan sólo eran considerados elementos constantes y problemas sin fricción. En 1981, Andersson⁵ incluye la fricción en sus algoritmos. Más recientemente Garrido²¹ y París y Garrido³⁰ atacan el mismo problema pero con elementos discontinuos, y resuelven distintos problemas de gran interés con el mismo³¹. En todos los casos anteriores, sin embargo, se consideraron materiales isótropos y se obvió la inclusión de elementos singulares para la consideración de efectos en bordes de grietas.

Ya que el objetivo principal de este artículo radica en el estudio de la influencia del cierre de grieta en la modificación de los factores de intensidad de tensiones efectivos, y con ello el incremento de la vida a fatiga del material ha sido necesario incluir distintos aspectos no considerados hasta el momento en programas de contacto, como son nudos con posibilidad de tensiones de tracción en la zona de contacto o bien elementos con singularidad de tipo $-1/2$, como la que aparece en extremos de la grieta.

No ha sido hasta recientemente que se han realizado estudios de este tipo empleando el M.E.C.^{24,37}, si bien previamente se habían realizado algunos estudios con el M.E.F.³⁴ e incluso algunos otros en problemas muy simples obtienen resultados analíticos o semianalíticos⁴¹.

Inicialmente se plantea el problema elástico 2-D para materiales ortótropos

mediante el Método de los Elementos de Contorno, y la formulación y algoritmos empleados para la resolución del problema de contacto entre dos sólidos con y sin fricción ante cargas sobre el contorno mediante la utilización de un método multidominio que permite tratar el problema de cierre de grieta como un simple problema de contacto, sin más que incluir la distribución adecuada en extremos de grieta. Seguidamente se indica el método utilizado para determinar el factor de intensidad de tensiones que permite detectar de una forma muy simple los extremos singulares y modos de fractura existentes. Finalmente se incluyen varios ejemplos que permiten verificar la validez de la formulación presentada.

FORMULACION DEL M.E.C. EN ELASTICIDAD LINEAL 2-D EN PROBLEMAS MULTIDOMINIO

La ecuación de partida del M.E.C., en su formulación directa, es la conocida identidad de Somigliana¹⁰, que expresa el vector de desplazamientos $u_i(Q)$ en un punto Q de un dominio Ω como una función de los desplazamientos $u_i(P)$ y las tensiones $t_i(P)$ en los puntos del contorno de dicho dominio, y de las fuerzas por unidad de volumen X_i :

$$C_{ik} \cdot u_i(Q) = \int_{\delta\Omega} U_{ik}(Q, P) t_i(P) d\delta\Omega - \int_{\delta\Omega} T_{ik}(Q, P) u_i(P) d\delta\Omega + \int_{\Omega} U_{ik}(Q, P) X_i(P) d\Omega \quad (1)$$

donde U_{ik} es la solución fundamental de la ecuación Navier, T_{ik} son las tensiones correspondientes a dicha solución fundamental, que vienen dadas en el apéndice para el caso ortótropo, y C_{ik} viene dado por¹⁷:

$$C_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & Q \in \Omega \\ C'_{ik} & Q \in \delta\Omega \\ 0 & Q \notin \Omega \cup \delta\Omega \end{cases} \quad (2a)$$

$$C'_{ik} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 2(1-\nu)(\pi + \alpha_1 - \alpha_2) + & \text{sen}^2 \alpha_1 - \text{sen}^2 \alpha_2 \\ + \frac{1}{2}(\text{sen} 2\alpha_1 - \text{sen} 2\alpha_2) & \\ \text{sen}^2 \alpha_1 - \text{sen}^2 \alpha_2 & 2(1-\nu)(\pi + \alpha_1 - \alpha_2) - \\ & - \frac{1}{2}(\text{sen} 2\alpha_1 - \text{sen} 2\alpha_2) \end{bmatrix} \quad (2b)$$

para el caso isótropo, donde α_1 y α_2 tienen el significado de la Figura 1, δ_{ik} es la delta de Kronecker, r el radiovector que une el punto P y el Q , n la normal exterior al contorno en el punto P , G el módulo de rigidez y ν el coeficiente de Poisson [en el caso de tensión plana este valor ha de modificarse en la forma conocida $\nu^* = \frac{\nu}{(1+\nu)}$].

Bajo determinadas condiciones¹⁷, la integral de dominio de (1) puede expresarse como suma de dos integrales de contorno, con lo que es posible conocer los

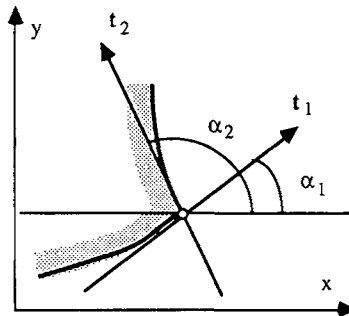


Figura 1. Significado geométrico de α_1 y α_2 .

desplazamientos de cualquier punto del dominio en función únicamente de integrales de contorno. En este trabajo no se va a contemplar la existencia de fuerzas por unidad de volumen, por lo que dicha integral desaparece, quedando expresada la ecuación (1) directamente en función de integrales de contorno.

Si se discretiza el contorno mediante Ne elementos, y se aproximan en el interior de cada uno de ellos los valores de los desplazamientos y de las tensiones en función de sus valores nodales como:

$$u_i^j = \sum_{k=1}^{Nnj} (u_i^j)_k \varphi_k \quad t_i^j = \sum_{k=1}^{Nnj} (t_i^j)_k \varphi_k \quad (3)$$

donde Nnj es el número de nudos del elemento j , y φ_k son las funciones de aproximación para elementos bidimensionales continuos, la ecuación (1) queda como

$$C_{ik} u_i(Q) = \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\delta\Omega_j} U_{ik}(Q, P) \left[\sum_{m=1}^{Nnj} (t_i^j)_m \varphi_m \right] d\delta\Omega_j - \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\delta\Omega_j} T_{ik}(Q, P) \left[\sum_{m=1}^{Nnj} (u_i^j)_m \varphi_m \right] d\delta\Omega_j \quad (4)$$

En el caso, por ejemplo, de elementos lineales (dos nudos por elemento) la ecuación (4) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{Ne} \begin{bmatrix} A_{111}^{kj} & A_{211}^{kj} & A_{112}^{kj} & A_{212}^{kj} \\ A_{121}^{kj} & A_{221}^{kj} & A_{122}^{kj} & A_{222}^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_1^j)_1 \\ (u_1^j)_2 \\ (u_2^j)_1 \\ (u_2^j)_2 \end{bmatrix} = \\ = \sum_{j=1}^{Ne} \begin{bmatrix} B_{111}^{kj} & B_{211}^{kj} & B_{112}^{kj} & B_{212}^{kj} \\ B_{121}^{kj} & B_{221}^{kj} & B_{122}^{kj} & B_{222}^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (t_1^j)_1 \\ (t_1^j)_2 \\ (t_2^j)_1 \\ (t_2^j)_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5a)$$

con

$$A_{imn}^{kj} = \int_{\delta\Omega_j} \varphi_i T_{mn}^{kj} d\delta\Omega_j \quad B_{imn}^{kj} = \int_{\delta\Omega_j} \varphi_i U_{mn}^{kj} d\delta\Omega_j \quad (5b)$$

Si se aplica esta ecuación en cada nudo y se introducen las condiciones de contorno pertinentes, se obtiene un sistema algebraico de $[2 \sum_j (Nn_j - 1)]$ ecuaciones con otras tantas incógnitas, correspondientes a valores de desplazamientos y tensiones en los nudos del contorno¹⁷. Cuando el nudo en que se aplica la ecuación no coincide con uno de los nudos adyacentes al elemento sobre el que se integra, las integrales de (5) se evalúan mediante una cuadratura de Gauss estándar. En cambio, cuando se integra desde un nudo sobre los elementos adyacentes, se producen singularidades en las integrales de (5). En este caso, las constantes B se evalúan con una cuadratura con función de peso logarítmica, mientras que las constantes A , se evalúan, junto con el término libre, imponiendo desplazamientos como sólido rígido al cuerpo en estudio¹⁷.

En cada nudo se pueden establecer dos ecuaciones, y existen seis posibles incógnitas, correspondientes a los dos desplazamientos del mismo, y a dos tensiones en el elemento anterior y otras dos en el elemento posterior. En la mayoría de los casos, éstas suelen venir expresadas en coordenadas locales, por lo que es preciso transformar el vector tensión a dichas coordenadas.

En definitiva, una vez ensamblados la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes, y aplicadas las condiciones de contorno, se obtiene un sistema algebraico de la forma:

$$Kx = f \quad (6)$$

en el que las incógnitas pueden corresponder tanto a desplazamientos como a tensiones en el contorno. La resolución de dicho sistema puede llevarse a cabo por distintos métodos, dependiendo del tamaño del mismo.

Una vez conocidos los desplazamientos y tensiones en todo el contorno, los desplazamientos en cualquier punto interior pueden obtenerse por medio de (1), y las tensiones a partir de la aplicación del operador tensión a la misma¹⁰.

Nos centramos tan sólo en la formulación del problema de contacto entre dos sólidos elásticos con interfase completamente en contacto inicialmente y con ello con la misma normal para ambos sólidos. Este es el único caso que interesa en este contexto. La condición de no penetración en dicho punto y con los significados de la Figura 2 se establece como

$$u_N \leq 0 \quad (7)$$

con u_N la proyección del desplazamiento relativo entre puntos equivalentes (igual posición después del contacto) sobre la normal.

En cuanto a las condiciones de contorno estáticas, en el caso unilateral aquí propuesto y con ley de fricción de Coulomb como la que aquí se ha considerado, se expresan como:

$$\sigma_N \leq 0 \quad \tau \leq \mu \sigma_N \quad \text{con } \mu \text{ el coeficiente de fricción} \quad (8)$$

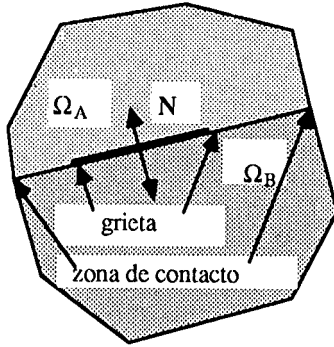


Figura 2. Grieta y zona de contacto.

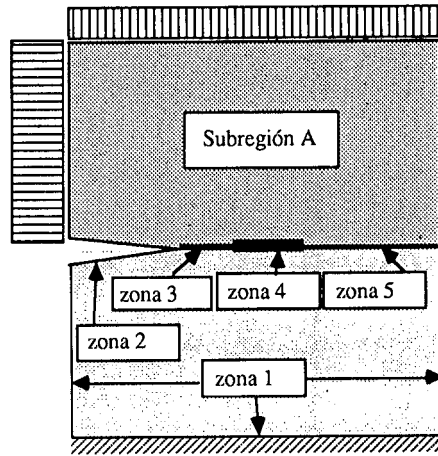


Figura 3. Tipología de zonas.

Además de ello han de cumplirse las condiciones de compatibilidad y equilibrio entre los dos sólidos, en los puntos que hayan alcanzado el contacto. Para ello se definen las siguientes zonas distintas sobre el contorno global de cada sólido (Figura 3):

- Zona fuera de contacto (zona 1). Es aquella que nunca entrará en contacto.
- Zona candidata a contactar (zona 2). Es la zona que todavía no ha contactado pero puede contactar a un nivel de carga determinado.
- Zona en deslizamiento (zona 3). $|\tau| = \mu \cdot \sigma_N$
- Zona en adherencia (zona 4). $|\tau| < \mu \cdot \sigma_N$
- Zona de soldadura (zona 5). Consiste en zona de contacto en la que se consideran soldados ambos sólidos admitiendo por tanto tensiones de tracción.

El problema de contacto entre dos sólidos, o mejor entre dos dominios de un mismo cuerpo como ocurre en este caso, consiste pues en el planteamiento de las ecuaciones del M.E.C. para cada uno de los sólidos en contacto, incluyendo en forma implícita o explícita (aquí se ha optado por esta segunda posibilidad) las condiciones de contorno (compatibilidad y equilibrio) en la zona de contacto para cada nivel de carga, y las condiciones de contorno en el resto del mismo para cada uno de los sólidos.

El programa que se ha implementado incluye elementos lineales, cuadráticos y elementos con nudo a un cuarto (singularidad $-1/2$), todos ellos con continuidad en tensiones y desplazamientos, si bien se incluye el chequeo en zona 1 de la existencia de nudos especiales (nudos con exceso o falta de incógnitas) que se tratan en forma análoga a [2]. En el caso de existencia de fricción se define el coeficiente de fricción de forma independiente para cada elemento, pudiéndose tener por tanto zonas de contacto independientes entre dos sólidos con coeficientes de fricción distintos.

Las funciones de aproximación para elementos lineales y cuadráticos son bien conocidas¹⁰, mientras que el caso del elemento singular se estudia en el epígrafe siguiente.

Referente a los tipos de nudos utilizados en el programa, y dado que la mayoría de ellos pertenecen a dos elementos (nudos extremos de elemento), pueden asimismo

pertenecer a dos zonas distintas de contacto. En base a ello se definen en el programa los siguientes tipos de nudos:

Nudos tipo 11.- Son nudos que nunca entrarán en contacto y que por lo tanto se tratan en forma idéntica a un programa de elementos de contorno estándar.

Nudos tipo $1X$ ($X = 2, 3, 4, 5$).- Son nudos con el elemento a la izquierda en zona 1 y el elemento a la derecha en zona de contacto (2,3,4 ó 5).

Nudos tipo $X1$ ($X = 2, 3, 4, 5$).- Idéntico al anterior pero con el elemento a la derecha en zona 1.

Nudos tipo 22.- Nudos en zona de contacto y libre.

Nudos tipo 33.- Nudos en zona de deslizamiento.

Nudos tipo 44.- Nudos en zona de adhesión.

Nudos tipo $5X$ ó $X5$ ($X = 1, 2, 3, 4, 5$).- Nudo con un elemento en soldadura y el otro en cualquier tipo de zona.

Es de resaltar que no se han considerado los tipos 23(32), 24(42) y 34(43), ya que en realidad la aproximación utilizada en cada elemento hace en la práctica imposible que un nudo se encuentre en esta situación, ya que el punto de separación entre zonas distintas siempre se encontrará en el interior de un elemento. A pesar de ello pueden introducirse como datos, realizando el programa el cambio automático a alguno de los casos posibles. Naturalmente a un nudo de tipo ij en el sólido A le corresponde siempre un nudo tipo ji en el sólido B .

Finalmente, también es interesante indicar que los nudos situados sobre los ejes de simetría, cuando se aplica el proceso de simetría implícita, han de ser de los tipos 11, 22, 33, 44 ó 55, detectándose el error en caso contrario, salvo en el caso de elementos con fricción en los que el caso 33 se pasa a 44 automáticamente por el programa. En cuanto a los nudos extremos de elementos singulares en los que se sitúa la singularidad, sólo pueden tener condiciones 52(25), 53(35) y 54(45).

DETERMINACION DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES

Son múltiples los métodos que existen para determinar el factor de intensidad de tensiones. Una revisión de los mismos para el caso de elementos de contorno puede encontrarse en [26] ó [38]. En este trabajo se ha utilizado elementos con aproximación singular para la determinación de dicho parámetro en forma análoga a [8][26].

Este tipo de elementos no son más que elementos rectos de aproximación cuadrática degenerados en los que el nudo central se dispone a una distancia de $1/4$ de la longitud del elemento respecto al extremo singular que se dispone en el borde de la grieta. Con ello puede demostrarse ([26] por ejemplo) que esta disposición y la realización de la transformación estándar a coordenadas naturales (Figura 4) es equivalente a utilizar una aproximación de desplazamientos en el interior del elemento del tipo:

$$u_i = u_i^1 + (4u_i^2 - u_i^3 - 3u_i^1)\sqrt{\frac{r}{l}} + (2u_i^1 + 2u_i^3 - 4u_i^2)\frac{r}{l} \quad (9)$$

que incluye de forma automática la variación de tipo \sqrt{r} que se produce en el extremo de una grieta. Asimismo, si se utiliza una aproximación singular para las tensiones en la forma:

$$t_i = t_i^{-1}\phi^1\sqrt{\frac{l}{r}} + t_i^{-2}\phi^2\sqrt{\frac{l}{r}} + t_i^{-3}\phi^3\sqrt{\frac{l}{r}} \quad (10)$$

con ϕ^i las funciones de forma estándar para elementos cuadráticos y t_i^j los valores nodales de t_i divididos por los valores nodales de $\phi^i \cdot \sqrt{\frac{l}{r}}$, puede demostrarse que es equivalente a considerar una aproximación del tipo

$$t_i = K\sqrt{\frac{l}{r}} + (2t_i^2 - 3K - 3t_i^3) + (2t_i^3 - 2t_i^2 + 2K)\sqrt{\frac{r}{l}} \quad \text{con } K = \lim_{r \rightarrow 0} t_i^1\sqrt{\frac{r}{l}} \quad (11)$$

que corresponde a la variación del tipo $\frac{1}{\sqrt{r}}$, como la solución analítica en borde de grieta.

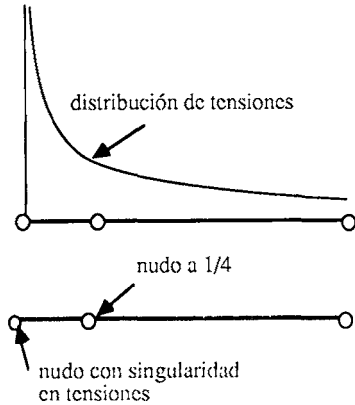


Figura 4. Elemento singular.

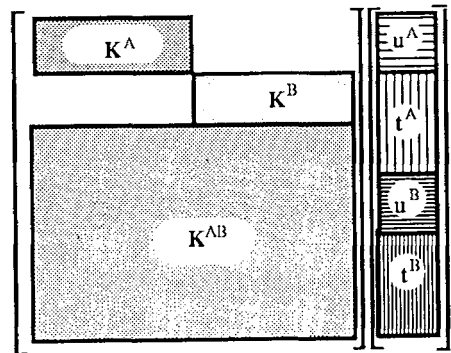


Figura 5. Estructura del sistema de ecuaciones.

Con lo anterior, es evidente que la expresión de K permite obtener los valores del factor de intensidad de tensiones en modo I para t_i la tensión normal y en modo II para t_i la tensión tangencial, sin más que multiplicar el valor de K correspondiente (valor nodal obtenido como resultado de la resolución del problema en el extremo singular) por $\sqrt{2\pi l}$. Para ello, la única consideración que ha de realizarse es que los resultados de t_i se obtengan en ejes locales (normal-tangencial) tal como se indicó que efectivamente se realiza en el programa.

Formas alternativas de obtener el factor de intensidad de tensiones incluso utilizando elementos singulares y una comparación entre las mismas puede verse asimismo en [18] y [26].

ORGANIZACION Y RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES. ALGORITMO INCREMENTAL

Dado el carácter no-lineal del problema de contacto, e independientemente del método de solución elegido: incremental, iterativo o incremental-iterativo, es necesario montar y resolver un sistema de ecuaciones lineales un número elevado de veces, de tal forma que el mayor porcentaje del tiempo de ejecución corresponde a este proceso. De ahí la importancia de una elección adecuada del algoritmo a utilizar para minimizar en lo posible este tiempo.

Respecto a la elección de las incógnitas básicas del sistema existen dos posibilidades al respecto: una primera corresponde a elegir las incógnitas estrictamente necesarias para que la sola aplicación de las ecuaciones integrales resuelva el problema, es decir tanto las condiciones de contorno, como las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio en la zona de contacto se incluyen de forma implícita, no apareciendo en el sistema final²¹. Con ello, se minimiza el número de ecuaciones, pero es necesario proceder al montaje de las constantes de integración en cada paso, ya que se alternan las incógnitas básicas del mismo en cada iteración al cambiar las condiciones de contacto en cada paso. Ello implica la necesidad de almacenamiento de las constantes correspondientes a la zona de contacto, ya que un recálculo de las mismas sería completamente ineficiente.

La segunda posibilidad estriba en la elección de un vector de incógnitas inalterable a lo largo del proceso, de forma que las únicas ecuaciones a modificar sean las condiciones en la zona de contacto, que ahora se incluyen de forma explícita. El número de ecuaciones se incrementa sensiblemente, sobre todo si el tamaño de la zona de contacto es elevado respecto al resto del contorno, pero por contra el montaje es muy simple debido a la forma de las condiciones de contacto. Al mismo tiempo, es posible desde el principio identificar el vector de incógnitas y el orden de las ecuaciones, y finalmente no es necesario mantener un almacenamiento auxiliar para las constantes de integración, ya que todas ellas se encuentran en la matriz del sistema.

En este trabajo se ha optado frente a [21] por esta segunda posibilidad. A las razones anteriores se une el hecho de que con una adecuada distribución de las incógnitas y ecuaciones, el número de éstas a resolver en cada paso puede hacerse igual en un caso que en otro, reduciéndose ostensiblemente el tiempo y la dificultad del montaje, y la reordenación posterior de las incógnitas que ahora sí, son todas conocidas de forma explícita. Asimismo, el exceso de memoria necesario tampoco es mucho, dado que no es necesario almacenar al margen las constantes de integración sobre la zona de contacto, y además el conocimiento de la situación concreta de cada incógnita permite un almacenamiento por bloques que reduce la memoria necesaria.

Como conclusión puede decirse que ambos procedimientos son prácticamente equivalentes en cuanto a tiempo de ejecución y memoria necesaria, si bien el aquí adoptado es más simple de programar en lo que se refiere al montaje y algo más complejo en lo que se refiere a resolución.

El primer paso a realizar (si así se desea), independientemente del proceso elegido, suele ser la condensación de las incógnitas correspondientes a los nudos fuera de la zona de contacto. Para ello se aplica un proceso estándar de elementos de contorno para cada uno de los dos sólidos, de forma independiente, teniéndose para cada uno de ellos:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{LL}^S \cdot \mathbf{x}_L^S + \mathbf{K}_{LC}^S \cdot \mathbf{x}_C^S &= \mathbf{V}_L^S \\ \mathbf{K}_{CL}^S \cdot \mathbf{x}_L^S + \mathbf{K}_{CC}^S \cdot \mathbf{x}_C^S &= \mathbf{V}_C^S \end{aligned} \right\} \rightarrow \left[\mathbf{K}_{CC}^S - \mathbf{K}_{CL}^S \cdot (\mathbf{K}_{LL}^S)^{-1} \cdot \mathbf{K}_{LC}^S \right] \cdot \mathbf{x}_C^S = \mathbf{V}_C^S - \mathbf{K}_{CL}^S (\mathbf{K}_{LL}^S)^{-1} \mathbf{V}_L^S \quad (12)$$

o bien

$$\bar{\mathbf{K}}^S \cdot \mathbf{x}_C^S = \bar{\mathbf{V}}^S \quad (13)$$

Cada una de las matrices \mathbf{K}^S es una matriz $2n \times 6n$ con n el número de nudos de la zona de contacto. Efectivamente, existen dos ecuaciones integrales sobre cada sólido, para cada nudo como punto de colocación, y en cada nudo de la zona de contacto se consideran 6 incógnitas (2 desplazamientos y 2 tensiones en cada elemento anterior y posterior al mismo) que denominaremos $u_1, u_2, \sigma_{\text{ant}}, \tau_{\text{ant}}, \sigma_{\text{pos}}, \tau_{\text{pos}}$.

Finalmente, a las ecuaciones anteriores es necesario añadir 8 ecuaciones por cada nudo de contacto que corresponden a las condiciones de contacto (matriz \mathbf{K}^{AB}), y que dependen del tipo de nudo. Así, por ejemplo, para un nudo 44 serían las siguientes:

$$u_1^A = u_1^B \quad u_2^A = u_2^B \quad \sigma_{\text{ant}}^A = \sigma_{\text{pos}}^B \quad \tau_{\text{ant}}^A = \tau_{\text{pos}}^B \quad \sigma_{\text{pos}}^A = \sigma_{\text{ant}}^B \quad \tau_{\text{pos}}^A = \tau_{\text{ant}}^B \quad (14)$$

La estructura adoptada para la matriz puede verse en la Figura 5, siendo las matrices $\mathbf{K}^A, \mathbf{K}^B$ y \mathbf{K}^{AB} las únicas almacenadas.

En cuanto al proceso de resolución se utiliza un proceso de eliminación de Gauss pero con pretriangulación de las matrices \mathbf{K}^A y \mathbf{K}^B , que son las que se mantienen inalterables a lo largo de todo el proceso, con pivotamiento sobre las filas. Con ello, en cada paso incremental, será necesario tan sólo resolver un sistema de $6n \times 6n$ ecuaciones ($4n \times 4n$ en la alternativa primera de montaje cuando se considera continuidad obligatoria de las tensiones) muy simples, con múltiples ceros en ellas.

La resolución de un problema de contacto con rozamiento exige el conocimiento de la historia completa del proceso, dado el carácter irreversible del mismo. Ello implica la necesidad de seguir un proceso incremental para la solución. En cambio, en un problema de contacto sin fricción, con zona de contacto desconocida, puede seguirse un procedimiento iterativo para la determinación de la misma, y con ella la distribución de las tensiones de contacto. Finalmente, en un problema de contacto sin fricción con zona de contacto conocida "a priori" un solo proceso de carga permite conocer la distribución tensional en la misma.

El único procedimiento general es por tanto un proceso incremental, y es el aquí utilizado.

La siguiente elección estriba en la conveniencia de establecer el valor del incremento de carga por parte del usuario, con un procedimiento iterativo adicional en cada incremento para determinar la nueva zona de contacto, o los cambios deslizamiento-adherencia producidos, o bien plantear un proceso incremental nudo-nudo, con zona de contacto conocida por tanto, dejando el proceso iterativo exclusivamente para los pasos de deslizamiento a adherencia o viceversa, es decir para problemas con fricción. Este

último es mucho más simple, descarga al usuario de todo tipo de elección en el proceso incremental, y la única servidumbre estriba en necesidad de establecer discretizaciones congruentes en las zonas candidatas al contacto de ambos sólidos. Este inconveniente no es tal en casos de pequeños desplazamientos, ya que las geometrías de ambos sólidos en las respectivas zonas candidatas han de diferir muy poco. Se ha optado en definitiva por este proceso al igual que en [34] por su simplicidad y generalidad.

En definitiva, dada una determinada situación de la zona de contacto, dividida en las zonas correspondientes, se procede a aplicar un nuevo incremento de carga, durante el cual se considera proceso de carga proporcional, de tal forma que genéricamente puede escribirse:

$$\Delta Q_n = f_n \cdot (Q - Q_{n-1}) \quad (15)$$

con Q la carga total a aplicar al final del proceso, Q_{n-1} la carga aplicada hasta ese momento y f_n el factor de escala a determinar, que corresponde al mínimo factor de escala que modifica las condiciones de algún nudo de la discretización, es decir

$$f_n = \min_{\alpha} f_n^{\alpha} \quad (16)$$

con f_n^{α} el factor de escalado necesario para modificar cada condición de contacto α . Una vez determinado f_n se tendrá que la distribución de desplazamientos y tensiones vendrá dada por

$$\Delta u^k = f_n \cdot \bar{u}_k \quad \Delta t^k = f_n \cdot \bar{t}_k \quad (17)$$

con u^k y t^k los desplazamientos y tensiones de cada nudo k obtenidos al aplicar, con las condiciones de contorno de la iteración $n - 1$, la carga $Q - Q_{n-1}$.

Los posibles cambios que contempla el programa son los siguientes:

- a) Formación de un par de contacto. Cambio de un nudo libre (12,21 ó 22) a zona de contacto (deslizamiento 13,31 ó 33; o adhesión 14,41 ó 44). Se produce al no cumplirse la condición de no-penetración y con posterioridad se chequea la condición de deslizamiento o adherencia.
- b) Pérdida de contacto. Cambio de un nudo deslizante (33,13, ó 31) a libre (12,21, ó 22). Se produce al detectarse tensiones normales de tracción en ese nudo.
- c) Pérdida de adherencia. Cambio de un nudo en adherencia (14,41, ó 44) a deslizante (13,31, ó 33). Se produce al detectarse tensiones tangenciales superiores a las de rozamiento.

Obsérvese que no se considera el paso directo de adherencia a libre ya que esta situación es prácticamente imposible sin pasar previamente por deslizamiento. Asimismo, los nudos 5X y X5 (en soldadura) no se chequean, viniendo modificada su situación (la X) por la modificación de los nudos adyacentes.

Finalmente se ha incluido la posibilidad de paso de nudo 5 a nudo 1, es decir pérdida de soldadura, con objeto de realizar análisis de propagación de grietas elemento a elemento como condiciones de contacto. En general, sin embargo, será necesario modificar la malla por lo que las constantes de integración se modifican, siendo necesario

recalcular la matriz en estos casos. El criterio introducido para este cambio ha sido el criterio de la tensión circunferencial máxima³⁶.

Además de las anteriores situaciones, que permiten obtener el factor de escala, es necesario establecer un chequeo de incompatibilidades con objeto de modificar determinadas situaciones supuestas "a priori" y posteriormente no satisfechas dentro de una carga determinada. Es el caso típico de la situación inicial establecida por el usuario, si bien también puede presentarse a lo largo del proceso.

Las condiciones de incompatibilidad que pueden producirse son las siguientes:

- Aparición de tracciones en zonas de adherencia o deslizamiento. Se pasa el nudo correspondiente a libre.
- Incompatibilidad de condición de deslizamiento (la dirección del desplazamiento tangencial y la tensión tangencial han de ser contrarios). Se pasa el nudo a adherencia.
- Tensión tangencial superior a la de fricción. Se pasa el nudo a deslizamiento.

RESULTADOS

El primer ejemplo corresponde al caso resuelto por Woo et al⁴¹, mediante un procedimiento de variable compleja, de una placa cuadrada sometida a flexión pura correspondiente a un momento flector igual a $2/3$ y una longitud de grieta variable (Figura 6a). Debido a esta carga se produce un cierre parcial de la grieta en el lado de compresión y una apertura de la misma en la de tracción.

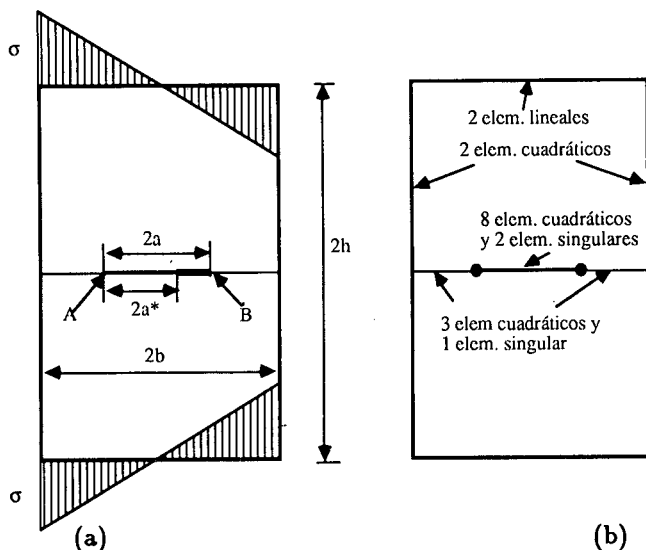


Figura 6. Grieta central sometida a tracción pura.

En la Tabla I se incluyen los resultados obtenidos para la discretización presentada en la Figura 6b que consta de 22 elementos cuadráticos, 2 elementos lineales y 4

a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
l	0.025	0.05	0.05	0.05	0.05	0.1	0.1
$F(\text{obt})$	0.05	0.101	0.151	0.203	0.258	0.324	0.402
$F(\text{Woo})$	0.05	0.1001	0.1508	0.2031	0.2580	0.322	0.4002
Dif(%)	0.04	0.85	0.21	0.1	0.31	0.39	0.3
$a^*(\text{obt})$	0.0675	0.1375	0.20625	0.27	0.3482	0.41789	0.4875
$a^*(\text{Woo})$	0.0668	0.1344	0.2036	0.2749	0.3488	0.4255	0.5052
Dif(%)	0.69	1.53	0.86	1.2	0.11	1.21	2.39
$F^*(\text{obt})$	0.066	0.1302	0.20145	0.27506	0.3465	0.4366	0.5418
$F^*(\text{Woo})$	0.0663	0.1344	0.2038	0.276	0.3529	0.4379	0.5403
Dif(%)	0.3	2.14	0.77	0.23	1.22	0.2	0.18

Tabla I.

elementos singulares para cada cuerpo. Se incluyen en ella los valores de la longitud de grieta inicial a^* , los F.I.T.s adimensionalizados sin considerar el efecto del cierre de grieta y considerando el cierre de la misma en el extremo A .

$$F = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}} \quad F^* = \frac{K_I^*}{\sigma\sqrt{\pi a^*}}$$

Naturalmente, al calcular sin considerar el efecto del cierre de grieta el F.I.T. en el extremo B aparece un valor negativo indicativo de que se están produciendo compresiones. Si se sigue el proceso de contacto y se va cerrando la grieta aparecen entonces tensiones de compresión finitas en el extremo B , lo que unido a la distribución singular de tensiones que asume el elemento singular da lugar a un valor nulo del F.I.T. que corresponde al real.

El valor incluido en la tabla para la longitud de contacto efectiva corresponde al punto medio del elemento en el que se produce el cambio de condiciones de compresión a tracción.

Finalmente es de destacar en dicha tabla la buena concordancia con los resultados de Woo con diferencias en todos los casos inferiores al 3%.

El segundo caso corresponde a uno similar al estudiado por Ballarini et al⁶ pero con condiciones diferentes. Corresponde a una laja cuadrada de lado 2 sometida a tensión tangencial uniforme de valor unidad en la mitad superior y fija en la base (Figura 7). Ello implica un momento sobre la base que da lugar a una situación de compresión en el extremo B de la grieta y el cierre parcial de la misma y una situación de tracción, con apertura por tanto en el extremo A . La discretización se ha realizado con 23 elementos cuadráticos en cada uno de los subdominios y dos elementos singulares de longitud $l = 0.05$ situados en los extremos A y B de la grieta en las zonas de soldadura. El total de nudos es pues de 50 para cada dominio.

Se han obtenido los factores de intensidad de tensiones (F.I.T.) en los extremos A y B en la forma indicada anteriormente. De nuevo, las tensiones en el extremo B son negativas pero finitas al no haber singularidad, por lo que al incluir una aproximación singular del tipo (11) es claro que el valor de K_I en ese extremo ha de resultar nulo, como

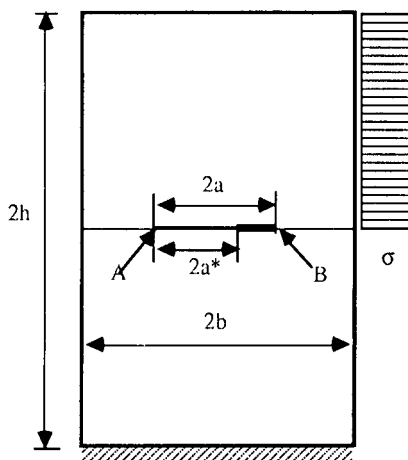


Figura 7. Grieta central sometida a cortadura.

de hecho ocurre. En cuanto a K_{II} en dicho extremo si la zona adyacente se encuentra en deslizamiento, lo que depende esencialmente del coeficiente de fricción y de la magnitud de la carga, aparecerá de nuevo una distribución singular de tensiones tangenciales apareciendo un F.I.T. distinto de cero en modo II. El valor de K_{II} dependerá de forma determinante del coeficiente de rozamiento. En el caso contrario de encontrarse en adherencia, el F.I.T. en modo II del extremo B será nulo, apareciendo la singularidad en el extremo de la zona en adherencia, lógicamente, siendo necesario redefinir la malla e incluir elementos singulares en esta zona si se pretende calcular el mismo. En el presente ejemplo, el valor de la carga es suficiente para que siempre se encuentre el extremo B en deslizamiento por lo que dicha modificación no es necesaria.

En la Tabla II se estudia la influencia del coeficiente de rozamiento en los factores de intensidad de tensiones para una grieta de longitud inicial dada e igual a 0.4. En el caso de no considerar el cierre de grieta los F.I.T. adimensionalizados obtenidos son los siguientes

$$F_I^A = \frac{K_I^A}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 0.1889 \quad F_I^B = -0.30944$$

$$F_{II}^A = 0.6575 \quad F_{II}^B = 0.4893$$

donde ahora aparecen valores negativos en el factor F_I^B debido a que no se ha seguido el proceso de contacto hasta alcanzar el valor no nulo predicho.

Se observa en primer lugar de dicha tabla que la longitud efectiva de grieta no depende prácticamente del coeficiente de rozamiento permaneciendo en cualquier caso igual a 0.2766. Asimismo el valor de F_I^B permanece invariable y prácticamente nulo (0.35×10^{-3}), mientras que los valores de F_I^A y F_{II}^A no se modifican sustancialmente lo que está de acuerdo con el hecho de que permanece constante la longitud efectiva, y son algo inferiores al producto de F_I^A y F_{II}^A para el caso en que no se considera el cierre por $\sqrt{a^*/a}$ respectivamente. Finalmente, y como era de esperar, el valor de F_{II}^B varía ostensiblemente con el coeficiente de rozamiento disminuyendo con el incremento del mismo.

La Tabla III, por el contrario muestra la dependencia de los F.I.T.s respecto de

μ	0.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.
a^*	0.2766	0.2766	0.2766	0.2766	0.2766	0.2766	0.2766	0.2766	0.2766	0.2766	0.2766
F_I^A	0.2467	0.2468	0.2469	0.2470	0.2472	0.2473	0.2474	0.2475	0.2476	0.2477	0.2478
F_{II}^A	0.7909	0.7891	0.7873	0.7856	0.7838	0.7821	0.7803	0.7786	0.7768	0.7751	0.7734
F_{II}^B	0.8450	0.8266	0.8082	0.7897	0.7714	0.7530	0.7346	0.7162	0.6980	0.6796	0.6613

Tabla II. Longitud de grieta $a = 0.4$.

la longitud inicial de la grieta para un coeficiente de rozamiento dado e igual a 0.6. Ahora evidentemente se modifican todos los valores, incluyendo la longitud de la grieta efectiva que puede considerarse como representativa de las condiciones geométricas del problema y de la carga especificada e independiente del coeficiente del rozamiento por lo que estos valores pueden extenderse a cualquier valor de éste. Es de resaltar que la longitud de grieta que da lugar a un F.I.T. igual al correspondiente a longitud 0.4 sin considerar el cierre de grieta es de 0.65 aproximadamente, es decir un 60% superior a la inicialmente considerada, de ahí la importancia de considerar este fenómeno en los casos de carga que den lugar al mismo.

a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
a^*	0.0805	0.1516	0.2203	0.2766	0.3484	0.4406	0.5187
F_I^A	0.0717	0.1291	0.1922	0.2474	0.3053	0.3632	0.4353
F_{II}^A	0.7012	0.7330	0.7648	0.7803	0.7989	0.8186	0.8752
F_{II}^B	0.6983	0.7156	0.7245	0.7346	0.7405	0.7503	0.7974

Tabla III Coeficiente de rozamiento $\mu = 0.6$.

El tercer y último ejemplo se refiere a un problema de flexión simple con las mismas dimensiones y discretización que en el ejemplo 1 y con valores de $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$ y $\tau = 0.25$. De nuevo se han introducido pues elementos singulares tanto en el borde de compresión (B) como en el de tracción (A), con lo que el F.I.T. en B será nulo después del proceso de contacto. El valor de K_{II}^B depende, sin embargo, del estado de contacto (adherencia o deslizamiento) en las proximidades del mismo, y por lo tanto del coeficiente de rozamiento entre los labios de la grieta.

En las tablas siguientes se muestra la variación de los F.I.T. efectivos adimensionalizados, definidos como

$$F_I^A = \frac{K_I^A}{\sigma \sqrt{\pi a^*}} \quad \text{con } \sigma = 1.5$$

y análogamente para el extremo B y el F.I.T. en modo II. Se indican asimismo los valores de la longitud efectiva de grieta y de la longitud d de adherencia que, cuando no es nula implica un valor nulo del coeficiente F_{II}^B , tal como se ha indicado.

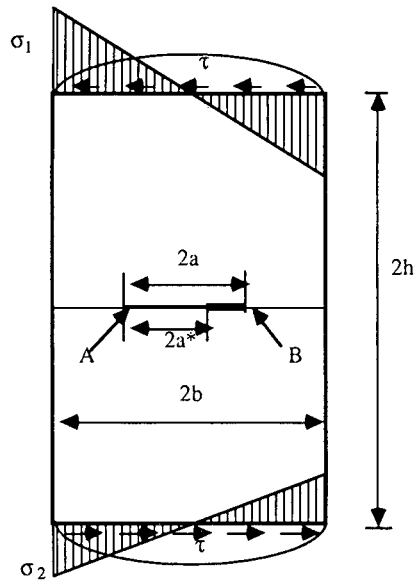


Figura 8. Grieta central sometida a flexión simple.

μ	0.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.
d	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
F_I^A	0.2299	0.2299	0.2299	0.2299	0.2299	0.2299	0.2299	0.2299	0.2299	0.2299	0.2299
F_{II}^A	0.2071	0.2052	0.2033	0.2014	0.1995	0.1976	0.1957	0.1938	0.1919	0.1900	0.1881
F_{II}^B	0.2071	0.1862	0.1653	0.1444	0.1235	0.1026	0.0817	0.0608	0.0399	0.0190	~ 0.

Tabla IVa. Longitud de grieta $a = 0.2$, $a^* = 0.1328$.

μ	0.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.
d	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0375	0.0375	0.0656
F_I^A	0.3423	0.3423	0.3423	0.3423	0.3424	0.3424	0.3424	0.3424	0.3424	0.3424	0.3424
F_{II}^A	0.2065	0.2035	0.2005	0.1975	0.1945	0.1915	0.1885	0.1855	0.1831	0.1809	0.1773
F_{II}^B	0.2065	0.1761	0.1455	0.1151	0.0845	0.0539	0.0233	~ 0.	~ 0.	~ 0.	~ 0.

Tabla IVb. Longitud de grieta $a = 0.3$, $a^* = 0.2047$.

μ	0.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.
d	—	—	—	—	—	—	0.0375	0.0719	0.0719	0.1156	0.1156
F_I^A	0.4617	0.4617	0.4618	0.4618	0.4618	0.4618	0.4619	0.4619	0.4619	0.4619	0.4619
F_{II}^A	0.2088	0.2045	0.2001	0.1958	0.1915	0.1872	0.1833	0.1803	0.1779	0.1765	0.1753
F_{II}^B	0.2088	0.1685	0.1282	0.0879	0.0494	0.0073	~ 0.	~ 0.	~ 0.	~ 0.	~ 0.

Tabla IVc. Longitud de grieta $a = 0.4$, $a^* = 0.2766$.

μ	0.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.
d	—	—	—	—	—	0.0375	0.0725	0.1175	0.1175	0.1625	0.1625
F_I^A	0.5895	0.5895	0.5895	0.5895	0.5896	0.5896	0.5896	0.5896	0.5896	0.5897	0.5897
F_{II}^A	0.2127	0.2067	0.2008	0.1949	0.1889	0.1836	0.1797	0.1774	0.1752	0.1737	0.1721
F_{II}^B	0.2127	0.1623	0.1118	0.0613	0.0107	~ 0.	~ 0.	~ 0.	~ 0.	~ 0.	~ 0.

Tabla IVd. Longitud de grieta $a = 0.5$, $a^* = 0.3512$.

μ	0.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.
d	—	—	—	—	0.075	0.13	0.19	0.19	0.25	0.25	0.25
F_I^A	0.7532	0.7532	0.7533	0.7534	0.7534	0.7534	0.7535	0.7535	0.7535	0.7535	0.7535
F_{II}^A	0.2255	0.2174	0.2092	0.2011	0.1934	0.1877	0.1841	0.1818	0.1799	0.1782	0.1770
F_{II}^B	0.2255	0.1616	0.0977	0.0338	~ 0.	~ 0.	~ 0.	~ 0.	~ 0.	~ 0.	~ 0.

Tabla IVe. Longitud de grieta $a = 0.6$, $a^* = 0.4125$.

μ	0.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.
d	—	—	—	—	0.075	0.13	0.19	0.19	0.25	0.25	0.25
F_I^A	0.9336	0.9336	0.9336	0.9337	0.9337	0.9337	0.9338	0.9338	0.9338	0.9339	0.9339
F_{II}^A	0.2414	0.2301	0.2188	0.2076	0.1986	0.1929	0.1896	0.1870	0.1849	0.1834	0.1818
F_{II}^B	0.2414	0.1627	0.0841	0.0054	0.0026	~ 0.	~ 0.	~ 0.	~ 0.	~ 0.	~ 0.

Tabla IVf. Longitud de grieta $a = 0.7$, $a^* = 0.485$.

En la Figura 9 se muestra la variación del valor del F.I.T. adimensionalizado en modo II para el extremo B en función de la longitud de grieta y del coeficiente de rozamiento entre labios de la misma, observándose una relación prácticamente lineal con este último. Finalmente, en la Figura 10 se ha incluido el valor del coeficiente de rozamiento que da lugar a la adherencia (modo II nulo en B) para cada longitud de grieta, apreciándose que para relaciones a/b superiores a 0.6 prácticamente se alcanza la adherencia con coeficientes superiores a 0.35 independientemente de la longitud de grieta.

Como último caso se ha considerado el mismo problema de flexión simple pero para un material ortótropo con las siguientes características

$$E_x = 25000 \quad E_y = 1750 \quad G = 770 \quad \nu = 0.27$$

y el caso de longitud inicial de grieta $a = 0.3$ y coeficientes de rozamiento $\mu = 0$ y $\mu = 0.4$. Los resultados se muestran en la Tabla V, observándose que prácticamente no se aprecian los efectos de la ortotropía en los F.I.T.s para el caso de coeficiente de rozamiento nulo, mientras que para el coeficiente de rozamiento mayor hay una mayor diferencia, especialmente en el correspondiente al modo II, pero tampoco apreciable, a

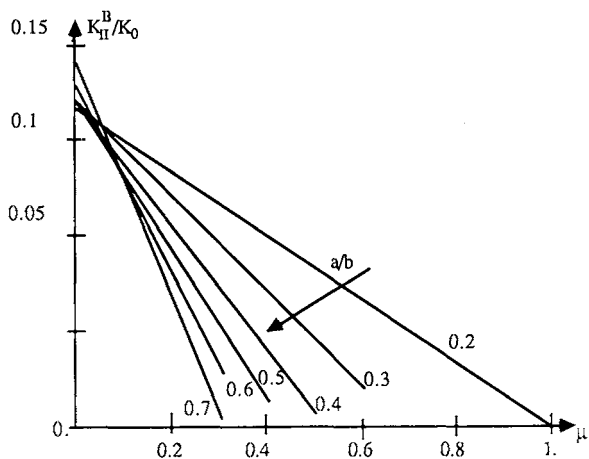


Figura 9. Factor de intensidad de tensiones K_{II}^B .

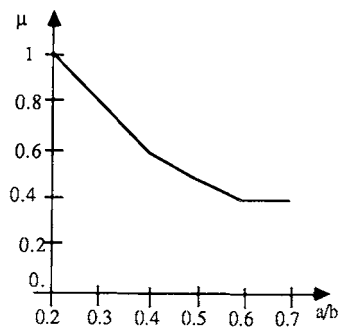


Figura 10. Coeficiente de rozamiento y comienzo de adherencia.

μ	0.(is.)	0.(or.)	0.4(is.)	0.4(or.)
F_I^A	0.3423	0.3451	0.3424	0.3451
F_{II}^A	0.2065	0.2035	0.1945	0.1942
F_{II}^B	0.2065	0.2035	0.0845	0.0822

Tabla V. Flexión simple de material ortótropo. Longitud de grieta $a = 0.3$. Longitud reducida $a^* = 0.2047$.

pesar de la divergencia tan importante de los módulos de elasticidad utilizados.

CONCLUSIONES

Se ha presentado la formulación completa del problema de contacto con pequeñas deformaciones y desplazamientos entre medios ortótropos mediante el M.E.C., y se ha demostrado las posibilidades del mismo, con grandes ventajas frente a otros medios de dominio, especialmente en lo que se refiere al estudio del problema de cierre de grietas.

La inclusión de elementos singulares permite de una forma simple determinar los F.I.T.s incluso en los casos con rozamiento y en zonas sometidas a compresión, resultando el valor nulo en este caso, como era esperable.

Se corrobora la necesidad de incorporar los efectos de cierre de grieta a la hora de determinar los F.I.T.s efectivos en los casos en que ésta ocurra, y la importancia decisiva del coeficiente de rozamiento en los factores en modo II. En cambio, el coeficiente de rozamiento prácticamente no afecta a la longitud de grieta efectiva y los F.I.T.s en modo I.

No se ha apreciado influencia importante de propiedades no isotrópicas en los valores de los F.I.T.s al menos cuando los ejes de ortotropía están alineados con la grieta y la carga respectivamente, si bien el correspondiente al modo II se altera en mayor proporción.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por la Diputación General de Aragón, a través del C.O.N.A.I. dentro del Proyecto de Investigación ITE/85-12 y asimismo por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (C.I.C.Y.T.) dentro del Proyecto coordinado PB85-0353-CO2-02.

APENDICE

Si se escriben las relaciones tensiones-deformaciones para un material ortótropo en la forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} \quad (A1)$$

donde los elementos B_{ij} vienen dados en función de las constantes elásticas²⁶, la solución fundamental viene dada en función de los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\sqrt{B_{11}B_{22}} - B_{12} - c} \\ b &= \sqrt{\sqrt{B_{11}B_{22}} + B_{12} + c} \\ c &= \frac{1}{2G_{12}} \end{aligned} \quad (A2)$$

y de las siguientes variables que dependen además de la geometría:

$$\begin{aligned} l &= \frac{\sqrt{2}x_r y_r}{\sqrt{B_{11}}x_r^2 + \sqrt{B_{22}}y_r^2} \\ l_1 &= \frac{bx_r^2}{B_{22}y_r^2 + (B_{12} + c)x_r^2} \\ l_2 &= \frac{by_r^2}{B_{11}x_r^2 + (B_{12} + c)y_r^2} \\ m &= B_{11}x_r^4 + 2(B_{12} + c)x_r^2 y_r^2 + B_{22}y_r^4 \end{aligned} \quad (A3)$$

Dependiendo del valor del parámetro a , la solución fundamental en desplazamientos resulta:

a) a real

$$\begin{aligned} U^{11} &= -K_{11} \ln \frac{m}{B_{22}} - C_{11}^r \arctan(al_1) \\ U^{12} &= U^{21} = K_{12}^r \ln \left[\frac{1 + al}{1 - al} \right] \\ U^{22} &= -K_{22} \ln \frac{m}{B_{11}} - C_{22}^r \arctan(al_2) \end{aligned} \quad (A4)$$

b) a cero

$$\begin{aligned} U^{11} &= -K_{11} \ln \frac{m}{B_{22}} + C_{11}^0 l_1 \\ U^{12} &= U^{21} = K_{12}^0 l \\ U^{22} &= -K_{22} \ln \frac{m}{B_{11}} + C_{22}^0 l_2 \end{aligned} \quad (A5)$$

c) a imaginario

$$\begin{aligned} U^{11} &= -K_{11} \ln \frac{m}{B_{22}} - C_{11}^i \ln \left[\frac{1 + ial_1}{1 - ial_1} \right] \\ U^{12} &= U^{21} = K_{12}^i \arctan(ial) \\ U^{22} &= -K_{22} \ln \frac{m}{B_{11}} - C_{22}^i \ln \left[\frac{1 + ial_2}{1 - ial_2} \right] \end{aligned} \quad (A6)$$

con:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{[(b^2 - c)c + (a^2 + c)b^2]}{8\sqrt{2\pi}b\sqrt{B_{22}}} & K_{22} &= \frac{[(b^2 - c)c + (a^2 + c)b^2]}{8\sqrt{2\pi}b\sqrt{B_{11}}} \\ C_{11}^r &= \frac{[(b^2 - c)a^2 - (a^2 + c)c]}{4\sqrt{2\pi}a\sqrt{B_{22}}} & K_{12}^r &= \frac{a^2b^2 + c^2}{8\pi ab} \\ C_{22}^r &= \frac{[(b^2 - c)a^2 - (a^2 + c)c]}{4\sqrt{2\pi}a\sqrt{B_{11}}} & C_{11}^0 &= \frac{c^2}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{B_{22}}} \\ K_{12}^0 &= \frac{c^2}{4\pi b} & C_{22}^0 &= \frac{c^2}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{B_{11}}} \\ C_{11}^i &= \frac{[(b^2 - c)a^2 - (a^2 + c)c]}{8\sqrt{2\pi}ia\sqrt{B_{22}}} & K_{12}^i &= \frac{a^2b^2 + c^2}{4\pi iab} \\ C_{22}^i &= \frac{[(b^2 - c)a^2 - (a^2 + c)c]}{8\sqrt{2\pi}ia\sqrt{B_{11}}} \end{aligned}$$

Para las tensiones, se tiene en todos los casos:

$$\begin{aligned} T^{11} &= -\frac{A_1 y_r^2 + B_1 x_r^2}{m}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \\ T^{12} &= \frac{C_1 x_r^2 + D_1 y_r^2}{m} y_r n_x - \frac{A_2 x_r^2 + B_2 y_r^2}{m} x_r n_y \\ T^{21} &= -\frac{A_1 y_r^2 + B_1 x_r^2}{m} y_r n_x + \frac{C_2 x_r^2 + D_2 y_r^2}{m} x_r n_y \\ T^{22} &= -\frac{A_2 x_r^2 + B_2 y_r^2}{m}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (A7)$$

con:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\sqrt{B_{22}}(b^2 - c)}{2\sqrt{2\pi b}} & A_2 &= \frac{\sqrt{B_{11}}(b^2 - c)}{2\sqrt{2\pi b}} \\
 B_1 &= \frac{\sqrt{B_{11}}(b^2 + c)}{2\sqrt{2\pi b}} & B_2 &= \frac{\sqrt{B_{22}}(b^2 + c)}{2\sqrt{2\pi b}} \\
 C_1 &= \frac{(b^2 + c)\sqrt{B_{11}B_{22}} - 2(a^2 + c)b^2}{2\sqrt{2\pi b}\sqrt{B_{11}}} \\
 C_2 &= \frac{(b^2 - c)B_{11}}{2\sqrt{2\pi b}\sqrt{B_{22}}} \\
 D_1 &= \frac{(b^2 - c)B_{22}}{2\sqrt{2\pi b}\sqrt{B_{11}}} \\
 D_2 &= \frac{(b^2 + c)\sqrt{B_{11}B_{22}} - 2(a^2 + c)b^2}{2\sqrt{2\pi b}\sqrt{B_{22}}}
 \end{aligned}$$

REFERENCIAS

1. O. Aksogan, "Partial Closure of a Griffith Crack under General Loading", *Int. J. of Fract.*, Vol. 11, pp. 659-670, (1975).
2. E. Alarcón, A. Martín y F. Paris, "Boundary Elements in Potential and Elastic Theory", *Computers and Structures*, Vol. 10, pp. 351-362, (1979).
3. R.S. Alwars y S. Thiagarajan, "Effect of Crack Closure on Crack Initiation Parameters", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 24, pp. 553-537, (1986).
4. T. Anderson, B. Fredriksson y B.G. Allan Person, "The Boundary Element Method applied to two-dimensional contact problems", *New Dev. in B.E.M.*, (Ed. C.A. Brebbia), CML Publ., (1980).
5. T. Andersson, "The second generation Boundary Element Contact Program", in *B.E.M. IV*, Ed. C.A. Brebbia, Springer Verlag, (1982).
6. R. Ballarini y M.E. Plesha, "The Effects of Crack Surface Friction and Roughness on Crack Tip Stress Fields", *Int. J. of Fract.*, Vol. 34, pp. 195-207, (1987).
7. P.K. Banerjee y R. Butterfield, "*Boundary Element Methods in Engineering Science*", McGraw Hill, (1981).
8. G.E. Blandford, A.R. Ingraffea y J.A. Liggett, "Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computation using the Boundary Element Method", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 17, pp. 387-404, (1981).
9. O.L. Bowie y C.E. Freese, "On the "overlapping" problem in crack analysis", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 8, pp. 373-379, (1976).
10. C.A. Brebbia, "*The Boundary Element Method for Engineers*", Penetech Press, (1978).
11. C.A. Brebbia y J.C.F. Telles, "*Boundary Element Techniques-Theory and Applications*", Springer Verlag, (1984).
12. E.E. Burniston y W.Q. Gurley, "The Effect of Partial Closure on the Stress Intensity Factor of a Griffith Crack", *Int. J. Fract. Mech.*, Vol. 9, pp. 9-19, (1973).

13. N. Chandrakaran, W.E. Haisler y R.E. Goforth, "A Finite Element Solution Method for Contact Problems with Friction", *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol. 24, pp. 477-495, (1987).
14. W.H. Chen y J.P. Jeh, "Finite Element Analysis of Finite Deformation Contact Problems with Friction", *Comp. and Struct.*, Vol. 29, pp. 423-436, (1988).
15. M. Comminou y J. Dundurs, "On the Frictional Contact in Crack Analysis", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 12, pp. 117-123, (1979).
16. T.A. Cruse, "Two-Dimensional B.I.E.", *Fract. Mech. Analysis. Appl. Math. Modelling*, Vol. 2, pp. 287-293, (1978).
17. M. Doblare, "Computational Aspects of the B.E.M.", in *Topics in B.E. Research III*, pp. 51-131, (Ed. C.A. Brebbia), Springer Verlag, (1987).
18. M. Doblare, F. Espiga, L. Gracia y M. Alcantud, "Computation of Contact Traction between Orthotropic Materials by using B.E.M." (por publicar).
19. B. Fredriksson, "Finite Element Solution of Surface Nonlinearities in Structural Mechanics with Special Emphasis to Contact and Fracture Mechanics Problems", *Computers and Structures*, Vol. 6, pp. 281-190, (1976).
20. F.J. Gallego, "Study of the Contact Problem Between Two-Dimensional Solids. Application to the Modelling of the Contact in Rail-Wheel Systems" (en español), *Ph. D. Thesis*, Univ. of Zaragoza (España), (1987).
21. J.A. Garrido, "The Contact Problem in Elasticity by using integral equation methods" (en español), *Ph. D. Thesis*, Univ. de Sevilla (España).
22. G.M.L. Gladwell, "Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity", Sijthoff Noordhoff, (1980).
23. G. Karami, "Multi-Domain B.E. Modelling of Crack Closure Problems", *Proc. of B.E.M. X Int. Congress*, (ed. C.A. Brebbia), Vol. 3, pp. 185-194, (1988).
24. G.A. Karami y R.T. Fenner, "Analysis of Mixed Mode Fracture and Crack Closure using the Boundary Integral Equation Method", *Int. J. of Fract.*, Vol. 30, pp. 13-29, (1986).
25. S.G. Lekhnitskii, "Theory of Elasticity of an Anisotropic Body", Holden Day, (1963).
26. J. Martinez y J. Dominguez, "On the Use of Quarter-Point Boundary Elements for Stress Intensity Factor Computation", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 20, pp. 1941-1950, (1984).
27. D.A. Mendelsohn y K.H. Whang, "Localized Asymmetric Crack Closure with Stick-Slip in the Contact", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 29, pp. 365-384, (1988).
28. J.T. Oden y N. Kikuchi, "N. Finite Element Special Problems in Solid Mechanics", *Finite Element*, Vol. 5, Prentice Hall, (1984).
29. P.D. Panagiotopoulos, "Boundary Integral Equation Methods for the Signorini-Fichera Problems", *B.E.M. VII*, (Ed. C.A. Brebbia), Springer Verlag, (1985).
30. F. Paris y J.A. Garrido, "On the Use of Discontinuous Elements in Two-Dimensional Contact Problems", *B.E. VII*, (Ed. C.A. Brebbia), Springer Verlag, (1985).
31. F. Paris y J.A. Garrido, "Friction Multicontact Problems with B.E.M.", *Proc. B.E. X*, (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 3, pp. 305-319, Springer Verlag, (1988).
32. P.C. Paris y H. Tada, "The Stress Intensity Factors for Cyclic Reversed Bending of a Single Edge Cracked Strip including Crack Surface Interference", *Int. J. of Fract.*, Vol. 11, pp. 1070-1072, (1975).
33. H. Pina, "Numerical Integration", *Topics in B.E. Research*, Vol. III, pp. 36-50, (Ed. C.A. Brebbia), Springer Verlag, (1987).
34. H.R. Riggs y G.H. Powell, "Rough Crack Model for Analysis of Concrete", *J. Eng. Mech. Div. (A.S.C.E.)*, Vol. 112, pp. 448-464, (1986).

35. D.P. Rooke y D.J. Cartwright, "Compendium of Stress Intensity Factors", HMSO, (1973).
36. V.E. Saouma, M.L. Ayari y D.A. Leavell, "Mixed Model Crack Propagation in Homogeneous Anisotropic Solids", *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 27, pp. 171-184, (1978).
37. A.P.S. Selvadurai y M.C. Au, "Cracks with Frictional Surfaces: A Boundary Element Approach", *B.E.M. X*, Vol. 3, Stress Analysis, Ed. C.A. Brebbia, Springer Verlag, (1988).
38. R.N.L. Smith, "From Rags to Riches?— Developments in the B.E.M. for the Solution of Elastic Fracture Problems", in *B.E.M. X*, pp. 155-176, Ed. C.A. Brebbia, Springer Verlag, (1988).
39. M.D. Snyder y T.A. Cruse, "Boundary Integral Equation Analysis of Cracked Anisotropic Plates", *Int. J. of Fract.*, Vol. 11, pp. 315-328, (1975).
40. B.R. Torstenfelt, "Contact Problems with Friction in General Purpose Finite Element Programs", *Comp. and Struct.*, Vol. 16, pp. 487-493, (1983).
41. C.W. Woo, Y.K. Cheung, Y.Z. Chen y Y.H. Wang, "A Simple Model for the Contact Problem of a Finite Cracked Plate in Bending", *Eng. Fract.Mech.*, Vol. 29, pp. 227-231, (1988).