

7th Workshop on Numerical Methods in Applied
Science and Engineering (NMASE 08)
Vall de Núria, 9 a 11 de enero de 2008
©LaCàN, www.lacan-upc.es

GALERKIN DISCONTINUO LOCAL APLICADO A PROBLEMAS DE ONDAS ACÚSTICAS: CONDICIONES DE FRONTERA ABSORBENTE LOCALES DE BAJO ORDEN

Cadenas R. Carlos E.^{1,2*}, Fernández M. Sonia² y Huerta C. Antonio²

1: Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias y Tecnología,
Universidad de Carabobo
e-mail: ccadenas@uc.edu.ve, web: <http://www.grupo.es>

2: Laboratori de Càlcul Numèric (LaCàN)
Matemàtica Aplicada III
Universitat Politècnica de Catalunya
e-mail: SegundoAutor,TercerAutor@universidad.es, web: <http://www.grupo.es>

Palabras clave: (Discontinuous Galerkin, Helmholtz, Absorbing Boundary Condition)

Resumen. *En este trabajo se presenta una comparación de la solución numérica de la ecuación de Helmholtz utilizando el método de elementos finitos Galerkin Discontinuo Local (LDG) con varias condiciones de contorno absorbentes locales de bajo orden. Se describe brevemente el proceso de discretización y se realizan pruebas con ejemplos clásicos presentes en la literatura.*

1 INTRODUCCIÓN

Diversos métodos numéricos han sido propuestos para resolver la ecuación de onda, la cual usualmente es necesario resolver en varias áreas de la física y de la ingeniería. En muchos casos los problemas mencionados anteriormente involucran dominios no acotados.

Entre las aplicaciones más comunes se pueden mencionar las siguientes: ondas acústicas, ondas elásticas y la interacción de las anteriores o como es el caso de la electrodinámica. En todas ellas se pueden considerar soluciones armónicas en el tiempo y así modelar dichos problemas por medio de la ecuación de Helmholtz, la cual es caracterizada por un parámetro físico al que se le denomina número de onda k . Para dominios no acotados (problemas exteriores) se debe imponer la condición de Sommerfeld en el infinito (campo lejano). Esta condición previene que las ondas se reflejen desde el infinito. Entre los métodos numéricos encontrados en la literatura para resolver problemas exteriores, se pueden mencionar los métodos de diferencias finitas (FDM), elementos finitos (FEM) clásicos, volúmenes finitos (FVM), elementos infinitos (IEM), elementos de frontera (BEM), compactos (CM), espectrales (SM), elementos finitos Galerkin discontinuo

(DG), entre otros. En este trabajo se trata un método de elementos finitos Galerkin Discontinuo. Luego de los trabajos pioneros [22] y [19] se ha venido desarrollando una ardua investigación relacionada con estos métodos y desde sus inicios ha demostrado ser muy útil en la resolución de problemas hiperbólicos. También ha sido aplicado a muchos otros problemas parabólicos así como a la ecuación escalar de reacción advección difusión [27]. Para una sencilla y clara descripción de los métodos de elementos finitos Galerkin Discontinuo véase [6] y [27]. Su utilización a problemas elípticos es más reciente que para los problemas hiperbólicos y parabólicos, entre algunos de ellos podemos mencionar [4], [5] y [1]. En éste último se hace un enfoque unificado para la mayoría de los métodos de Galerkin Discontinuo. Recientemente algunos de dichos métodos se han usado para resolver la ecuación de Helmholtz exterior sujeto a diversas condiciones de frontera. Entre estos se pueden mencionar [9], [10], [11] y [3]. En este trabajo se desarrolla una forma del método Galerkin Discontinuo Local (LDG) siguiendo en gran parte la propuesta de [23] y utilizando la definición de los flujos según [20] y [5].

A continuación se presenta un bosquejo del orden a seguir en el desarrollo de este artículo. En la sección 2 se presentan las ecuaciones que modelan el problema de dispersión de ondas acústicas en un medio infinito, se procede con la formulación del problema computacional para lo que se hace necesario colocar una frontera artificial y así truncar el dominio para tener un dominio finito (acotado). Después se hace una breve revisión de los métodos para aproximar la condición en el infinito en dicha frontera artificial considerando métodos locales de bajo orden. Luego en la sección 3 además de mencionar los métodos de Galerkin Discontinuo para problemas elípticos se desarrolla el procedimiento para obtener la discretización de la ecuación de Helmholtz por el método de elementos finitos Galerkin Discontinuo Local (LDG). En la sección 4 se describe brevemente el procedimiento para generar el sistema de ecuaciones lineales generado al utilizar el método LDG, para lo cual se hace necesario definir los flujos y establecer la condición de continuidad de los mismo. Luego en la sección 5 se presentan algunos ejemplos clásicos a efectos de comparar la solución numérica de problemas exteriores para diversos métodos encontrados en la literatura. Por último, en 6, a manera de conclusiones, recomendaciones y problemas abiertos se presenta una serie de comentarios finales.

2 PRELIMINARES

En esta sección se presentan las ecuaciones que modelan el problema de dispersión de ondas acústicas en un medio infinito. A los fines de utilizar el método de elementos finitos Galerkin discontinuo local se procede a representarlo también como un sistema de ecuaciones de primer orden para luego proceder con la formulación del problema computacional, para lo que se hace necesario colocar una frontera artificial y así truncar el dominio con la finalidad de tener un dominio finito (acotado). Después se describen los métodos para aproximar la condición en el infinito en dicha frontera artificial tomando en cuenta los métodos locales de bajo orden.

2.1 Problema Modelo

El problema a tratar es la dispersión de ondas acústicas en dominios infinitos el cual se modela por medio de la ecuación de ondas y en nuestro caso se considera que es una onda armónica en el tiempo, lo cual hace que dicho problema se reduzca a resolver en el dominio espacial la ecuación de Helmholtz, que es una ecuación elíptica. Por ello considérese el siguiente problema de Helmholtz, el cual modela la propagación de una onda de frecuencia $w > 0$ y velocidad de propagación $c > 0$ en un medio homogéneo no acotado:

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{in } \Omega_E \\ p = p_D & \text{on } \Gamma_D \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} = p_N & \text{on } \Gamma_N \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde p es la presión de la onda acústica, $k := w/c$ es el número de onda, $\Omega_E := \mathfrak{R}^p \setminus \overline{\Omega_I}$, $p = 2, 3$ siendo Ω_I un dominio acotado en \mathfrak{R}^p con frontera continua *Lipschitz* y $p_D, p_N \in H^{1/2}$ son funciones dadas, la derivada normal $\nabla p \cdot \mathbf{n}$ define el gradiente en la dirección normal exterior unitaria a la superficie Γ_N . Observe la figura 1 donde se presenta el dominio del problema de Helmholtz exterior. La cuarta ecuación en (1) es la bien conocida *Sommerfeld radiation condition*. El problema (1) es el clásico problema de *scattering* cuya solución existe y es única. Para la obtención y discusión con más detalle de dicho problema de valor en la frontera véase ([21], [13] y [18]).

Para aplicar el método LDG al problema (1) es necesario reescribirlo como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello se considera el cambio de variables $\mathbf{u} = \nabla p = (u, v)^t$, obteniéndose

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} + k^2 p = 0 & \text{in } \Omega_E \\ \mathbf{u} - \nabla p = 0 & \text{in } \Omega_E \\ p = p_D & \text{on } \Gamma_D \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = p_N & \text{on } \Gamma_N \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

2.2 Formulación del Problema Computacional

2.2.1 Dominio Computacional

En el dominio Ω_E considérese una curva cerrada denotada por Γ_R que divide a Ω_E en un dominio acotado Ω y otro no acotado Ω_∞ (vea la figura 2). Γ_R es seleccionada tal que $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ esté completamente contenida en Ω . En este trabajo se considerará que Γ_R es una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio R .

El dominio computacional vendría dado por Ω , es cual esta delimitado por las fronteras interiores Γ_D, Γ_N y la frontera exterior Γ_R , en esta última es donde se deben imponer las

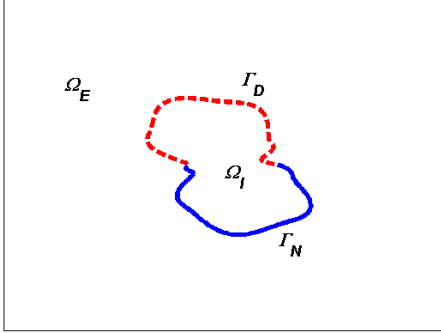


Figura 1: Dominio del problema de Helmholtz exterior

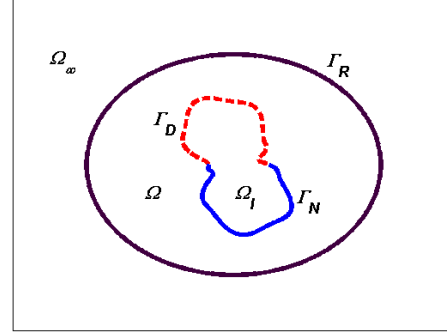


Figura 2: Dominio Computacional

condiciones de frontera aproximadas.

2.2.2 Formulación Fuerte

Sea una partición regular, τ^h , del dominio computacional Ω en subdominios Ω_i , es decir $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n_{el}} \overline{\Omega}_i$ con $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ para $i \neq j$, donde n_{el} es la cantidad de elementos Ω_i . Se define también $\widehat{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n_{el}} \Omega_i$, además de la frontera computacional y las aristas interiores como

$$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R \quad (3)$$

$$\Gamma = \bigcup_{i,j=1;i \neq j}^{n_{el}} \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j \quad (4)$$

entonces la formulación fuerte del problema de Helmholtz utilizando una condición de frontera absorbente sobre Γ_R sería

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} + k^2 p = f & \text{in } \widehat{\Omega} \\ \mathbf{u} - \nabla p = 0 & \text{in } \widehat{\Omega} \\ p = p_D & \text{on } \Gamma_D \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = p_N & \text{on } \Gamma_N \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -\mathcal{M} p & \text{on } \Gamma_R \\ \llbracket p \rrbracket = 0 & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (5)$$

donde \mathcal{M} es el operador de frontera que impone la condición de radiación Sommerfeld en la frontera artificial y $\llbracket \cdot \rrbracket$ representa al operador de salto definido en (16) y (17), de esta forma la expresión dada en la sexta ecuación de (5) es la condición de continuidad de p sobre Γ .

2.3 Métodos para imponer la condición en la frontera artificial

El uso de condiciones de fronteras artificiales es muy común para tratar problemas en dominios no acotados. El primer paso para lograr esto es introducir una frontera artificial, como se mencionó anteriormente, y así generar un dominio computacional finito. Luego sobre dicha frontera artificial se debe imponer alguna condición artificial, lo cual ha generado una ardua investigación para generar condiciones de frontera que permitan obtener resultados precisos sin la necesidad de utilizar niveles de discretización muy altos (malladas muy finas). En el contexto de problemas de ondas a dichas condiciones de fronteras artificiales también se les denominan condiciones de frontera no reflejantes (NRBC) y usualmente son clasificadas de acuerdo a la localidad del operador \mathcal{M} definido anteriormente. En esta sección se tratarán algunas de dichas condiciones artificiales, en particular las locales de bajo orden, definiendo el operador \mathcal{M} de manera tal que la condición de frontera absorbente sea de orden cero, uno, dos o tres, para un problema bidimensional cuando se considera como frontera artificial Γ_R una circunferencia centrada en el origen y radio R . Estos operadores se encuentran resumidos en ([14], [25]). Para orden cero se impone la condición de radiación de Sommerfeld en la frontera Γ_R en vez del infinito (la cual denominaremos ABC(0)), de esta manera

$$\mathcal{M} = -ik \tag{6}$$

La condición de frontera de orden uno que se estudia en este trabajo consiste en la dada por Bayliss, Guzburger y Turkel en [2] (ABC(1)), la cual viene dada por

$$\mathcal{M} = -ik + \frac{1}{2R} \tag{7}$$

esta condición coincide con la condición de frontera absorbente dada por Engquist y Majda [8].

Las condiciones de frontera de orden dos que se comparan en este trabajo vienen dadas por las ecuaciones

$$\mathcal{M} = \frac{2k^2 + \frac{3ik}{R} - \frac{3}{4R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}}{2 \left(ik - \frac{1}{2R} \right)} \tag{8}$$

$$\mathcal{M} = -ik + \frac{1}{2R} - \frac{1}{2k^2 R^2} \left(ik + \frac{1}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{9}$$

$$\mathcal{M} = -ik + \frac{1}{2R} - \frac{i}{8kR^2} \left(1 + 4 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \tag{10}$$

las cuales fueron dadas por Bayliss, Guzburger y Turkel [2], Engquist y Majda [8] y Feng [12] que serán denotadas por (ABC(2), ABC(3) y ABC(4)), respectivamente. En cuanto a la condición de frontera local de orden tres considerada en este trabajo se utiliza la de Feng [12] (ABC(5)) que viene dada por

$$\mathcal{M} = -ik + \frac{1}{2R} - \frac{1}{8k^2R^2} \left(ik + \frac{1}{R} \right) \left(1 + 4\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \right) \quad (11)$$

Es de destacar que todas las condiciones de fronteras absorbentes definidas en esta sección se pueden escribir utilizando el operador \mathcal{M} en la forma $\mathcal{M} = C_1 + C_2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$, donde C_1 y C_2 dependen de k y R .

3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GALERKIN DISCONTINUO LOCAL

Multiplicando la primera y segunda ecuación de (2) por las funciones de prueba τ y v respectivamente, e integrando sobre un elemento Ω_e de Ω , luego de utilizar el teorema de Green obtenemos la siguiente formulación débil

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{u} \cdot \tau d\Omega + \int_{\Omega_e} p \nabla \cdot \tau d\Omega = \int_{\partial\Omega_e} p \tau \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad (12)$$

$$- \int_{\Omega_e} \mathbf{u} \cdot \nabla v d\Omega + k^2 \int_{\Omega_e} p v d\Omega + \int_{\partial\Omega_e} v \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0, \quad (13)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal unitario a Ω_e .

Primero se introduce el espacio de elementos finitos asociado a la partición $\tau^h = \{K\}$, dado por

$$\begin{aligned} V_h &:= \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P(K) \quad \forall K \in \tau_h\}, \\ \Sigma_h &:= \{\tau \in [L^2(\Omega)]^2 : \tau|_K \in \Sigma(K) \quad \forall K \in \tau_h\}, \end{aligned}$$

donde $P(K) = P_p(K)$ es el espacio de polinomios de grado a lo sumo $p \geq 1$ en K y $\Sigma(K) = [P_p(K)]^2$.

Luego en (12) y (13) se aproximan p y \mathbf{u} por las funciones p_h y \mathbf{u}_h respectivamente, obteniéndose

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{u}_h \cdot \tau d\Omega + \int_{\Omega_e} p_h \nabla \cdot \tau d\Omega = \int_{\partial\Omega_e} \widehat{p}_h \tau \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad (14)$$

$$- \int_{\Omega_e} \mathbf{u}_h \cdot \nabla v d\Omega + k^2 \int_{\Omega_e} p_h v d\Omega + \int_{\partial\Omega_e} v \widehat{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0, \quad (15)$$

donde $\widehat{\mathbf{u}}_h$ y \widehat{p}_h son aproximaciones a $\mathbf{u} = \nabla p$ y p respectivamente, en la frontera de Ω_e y a los mismos se les denominan flujos de \mathbf{u}_h y p_h respectivamente.

Método	$\widehat{\mathbf{u}}_h$	\widehat{p}_h
LDG	$\{\mathbf{u}_h\} - C_{11} \llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket - \mathbf{C}_{12} \llbracket \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket$	$\{p_h\} + \mathbf{C}_{12} \cdot \llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket$
DG	$\{\mathbf{u}_h\} - C_{11} \llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket - \mathbf{C}_{12} \llbracket \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket$	$\{p_h\} + \mathbf{C}_{12} \cdot \llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket - C_{22} \llbracket \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket$
Brezzi y otros	$\{\mathbf{u}_h\} - \alpha^r (\llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket)$	$\{p_h\}$
IP	$\{\nabla p_h\} - C_{11} \llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket$	$\{p_h\}$
Bassi-Rebay	$\{\nabla p_h\} - \alpha^r (\llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket)$	$\{p_h\}$
NIPG	$\{\nabla p_h\} - C_{11} \llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket$	$\{p_h\} + \mathbf{n}_j \cdot \llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket$

Tabla 1: Definiciones de diferentes Flujos Numéricos

4 ASPECTOS DE LA IMPLEMENTACIÓN

En esta sección, brevemente, se presentan las matrices que permiten construir el sistema de ecuaciones lineales que se debe resolver para obtener la solución aproximada al problema exterior de dispersión de ondas acústicas en 2D por el método de elementos finitos Galerkin Discontinuo Local. Para ello se necesitan definir los flujos y establecer la condición de continuidad de los mismos.

4.1 Definición de los Flujos

Varios flujos numéricos han sido reportados en la literatura, por ejemplo véase [5] y [1]. Recientemente en [1] se ha presentado una revisión crítica y analizado su adecuación para la solución de problemas de conducción de calor en estado estacionario. La Tabla 4 lista los flujos numéricos que son considerados consistentes y estables para la solución de dicho problema, en donde el operador de salto $\llbracket \cdot \rrbracket$ al igual que el operador de promedio $\{\cdot\}$ involucran el producto de una función por un vector normal. Estos operadores son definidos en las aristas interiores Γ_{int} usando los valores a la derecha e izquierda de la arista los cuales denotaremos por los superíndices + y - respectivamente, y a lo largo de la frontera exterior se hace por medio de los valores en $\partial\Omega$, es decir

$$\llbracket \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \rrbracket = \begin{cases} \mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}^- & \text{on } \Gamma \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (16)$$

$$\llbracket p \mathbf{n} \rrbracket = \begin{cases} p^+ \mathbf{n}^+ + p^- \mathbf{n}^- & \text{on } \Gamma \\ p \mathbf{n} & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (17)$$

$$\{\odot\} = \begin{cases} \kappa^+ \odot^+ + \kappa^- \odot^- & \text{on } \Gamma \\ \odot & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (18)$$

Considérese inicialmente las expresiones para definir los flujos \widehat{p}_h y $\widehat{\mathbf{u}}_h$ en cada arista según el método DG de la Tabla 4

$$\widehat{p}_h = \{p_h\} + \mathbf{C}_{12} \cdot \llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket - C_{22} \llbracket \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \quad (19)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_h = \{\mathbf{u}_h\} - C_{11} \llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket - \mathbf{C}_{12} \llbracket \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket \quad (20)$$

	$\mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^+$	\widehat{p}_h	$\mathbf{u}_h^- \cdot \mathbf{n}^+$	$\widehat{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n}$
Dirichlet	$-\frac{1}{2}$	$p_h^- = p_D$	—	$\mathbf{u}_h^+ \cdot \mathbf{n}^+ - C_{11}(p_h^+ - p_D)$
Neumann	$\frac{1}{2}$	p_h^+	u_N	u_N
Robin	$\frac{1}{2}$	p_h^+	$-\mathcal{M}p_h^+$	$-\mathcal{M}p_h^+$

Tabla 2: Flujos en la frontera, explicación en el texto

Como se mencionó anteriormenete, en este trabajo se trata el caso particular Local (LDG), en el que se debe considerar $C_{22} = 0$, con lo que

$$\widehat{p}_h = \{p_h\} + \mathbf{C}_{12} \cdot \llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket, \quad (21)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_h = \{\mathbf{u}_h\} - C_{11} \llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket - \mathbf{C}_{12} \llbracket \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket \quad (22)$$

Al utilizar dichos flujos en la frontera del dominio computacional, es necesario tomar en cuenta algunas consideraciones sobre la relación de las variables \mathbf{u}_h y p_h . Estas relaciones se presentan en la Tabla 2 donde se diferencian los casos con las condiciones de frontera tipo Dirichet, Neumann y Robin, de acuerdo a (2). Para ello, primero se deben tomar en cuenta las expresiones de los saltos y promedios, definidos en (16), (17) y (18), se tiene que (21) y (22) se expresan de la siguiente manera

$$\widehat{p}_h = \left(\frac{1}{2} + \mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^+ \right) p_h^+ + \left(\frac{1}{2} - \mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^+ \right) p_h^- \quad (23)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{1}{2} - \mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^+ \right) (\mathbf{u}_h^+ \cdot \mathbf{n}^+) + \left(\frac{1}{2} + \mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^+ \right) (\mathbf{u}_h^- \cdot \mathbf{n}^+) - C_{11} (p_h^+ - p_h^-) \quad (24)$$

Luego se sustituyen los valores de $\mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^+$, de acuerdo a la Tabla 2, en (23) para obtener \widehat{p}_h en la frontera. Para calcular los valores tabulados de $\widehat{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n}$ se procede de manera similar con la ecuación (24) considerando también un salto nulo para p_h en los casos de utilizar condición de frontera tipo Neumann o Robin.

4.2 Continuidad de los Flujos

Al tomar en cuenta, a efectos de implementación, la continuidad del flujo \widehat{p}_h en la arista i de un elemento e hay que considerar el efecto sobre el elemento vecino $L(e, i)$, adyacente a dicha arista i . Así considerando el flujo en la arista i para ambos elementos, de (23) se tiene que

$$\widehat{p}_h^e = \left(\frac{1}{2} + \mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^e \right) p_h^e + \left(\frac{1}{2} - \mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^e \right) p_h^{L(e,i)} \quad (25)$$

$$\widehat{p}_h^{L(e,i)} = \left(\frac{1}{2} + \mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^{L(e,i)} \right) p_h^{L(e,i)} + \left(\frac{1}{2} - \mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^{L(e,i)} \right) p_h^e \quad (26)$$

Si se define que $C_{12}^e = \mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^e$ donde \mathbf{n}^e es la normal exterior al elemento e y como $\mathbf{n}^e = -\mathbf{n}^{L(e,i)}$ se tiene que $C_{12}^e = -\mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^{L(e,i)} = -C_{12}^{L(e,i)}$. Lo cual dá la condición a cumplir para satisfacer la continuidad de los flujos.

Una manera sencilla de implementar la condición de continuidad de los flujos es seleccionar un valor de C_{12} para el elemento que cuya numeración es menor y $-C_{12}$ para el mayor.

Al analizar la continuidad de $\widehat{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n}$ se obtiene el mismo resultado

4.3 Sistema Discreto

Para continuar con la generación del sistema de ecuaciones lineales que permita resolver el problema exterior que estamos tratando en este trabajo se procederá a sustituir en (14) y (15) los valores de los flujos \widehat{p}_h y $\widehat{\mathbf{u}}_h$ por los valores dados en las ecuaciones (21) y (22) respectivamente. Además se debe considerar la descomposición de la frontera en función de sus aristas, bien sea aristas interiores Γ_{int} o aristas que coinciden con la frontera, que pueden tener relacionadas condiciones tipo Dirichlet Γ_D , Neumann Γ_N o Robin Γ_R ; por lo que en dicho caso también se deben tomar en cuenta los valores de los flujos en la frontera dados en la tabla 2. Haciendo esto se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega + \int_{\Omega_e} p_h \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega - \sum_{i=1}^{N_{aint}} \int_{\Gamma_{int}} (\{p_h\} + \mathbf{C}_{12} \cdot \llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ & - \sum_{i=1}^{N_N} \int_{\Gamma_N} p_h^+ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \sum_{i=1}^{N_R} \int_{\Gamma_R} p_h^+ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \sum_{i=1}^{N_D} \int_{\Gamma_D} p_D \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad (27) \\ & - \int_{\Omega_e} \mathbf{u}_h \cdot \nabla v d\Omega + k^2 \int_{\Omega_e} p_h v d\Omega + \sum_{i=1}^{N_{aint}} \int_{\Gamma_{int}} v (\{\mathbf{u}_h\} - C_{11} \llbracket p_h \mathbf{n} \rrbracket - \mathbf{C}_{12} \llbracket \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ & + \sum_{i=1}^{N_D} \int_{\Gamma_D} v (\mathbf{u}_h^+ \cdot \mathbf{n} - C_{11} p_h^+) d\Gamma - \sum_{i=1}^{N_R} \int_{\Gamma_R} v \mathcal{M} p_h^+ d\Gamma \\ & = - \sum_{i=1}^{N_N} \int_{\Gamma_N} v \mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \sum_{i=1}^{N_D} \int_{\Gamma_D} v C_{11} p_D d\Gamma, \quad (28) \end{aligned}$$

Ahora se definen las funciones discretas

$$\begin{aligned} \bar{p} &= [p_1, p_2, \dots, p_l, \dots, p_{N_n}]^t, \\ \bar{\Phi} &= [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l, \dots, \phi_{N_n}]^t, \\ \bar{\mathbf{u}}_k &= [u_{k,1}, u_{k,2}, \dots, u_{k,l}, \dots, u_{k,N_n}]^t, \quad l = 1, 2, \dots, N_n; \quad k = x, y \end{aligned}$$

para luego expresar a p_h y \mathbf{u}_h como combinación lineal de los elementos que pertenecen a la base de los espacios de funciones escalares y vectoriales definidas anteriormente, con lo que se tiene que

$$p_h = \bar{\Phi}^t \bar{p} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{h,x} \\ \mathbf{u}_{h,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}^t & O^t \\ O^t & \bar{\Phi}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_x \\ \bar{\mathbf{u}}_y \end{bmatrix}$$

Al sustituir las funciones de prueba $v_l = \phi_l$ y $\tau_l = \tau_{l,k}$ donde $l = 1, 2, \dots, N_n$ con $\tau_{l,k} = \phi_l \mathbf{e}_k$.

Con estas definiciones y asumiendo que no hay condiciones de frontera de tipo Dirichlet ya se puede escribir una ecuación para calcular $\bar{\mathbf{u}}_k$ para cada elemento e en función de \bar{p}

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e \bar{\mathbf{u}}_{k,e} + \left(\mathbf{C}_{k,e}^t - \sum_{i=1}^{N_{aint}} \left(\frac{1}{2} + C_{12} \right) n_{k,e,i} \mathbf{M}_{e,i} - \sum_{i=1}^{N_N} n_{k,e,i} \mathbf{M}_{e,i} - \sum_{i=1}^{N_R} n_{k,e,i} \mathbf{M}_{e,i} \right) \bar{p}_e \\ - \left(\sum_{i=1}^{N_{aint}} \left(\frac{1}{2} - C_{12} \right) n_{k,e,i} \mathbf{M}_{L(e,i),i} \bar{p}_{L(e,i)} \right) = 0, \quad k = x, y \end{aligned} \quad (29)$$

donde $e = 1, 2, \dots, Ne$ es el índice que se refiere al elemento e -ésimo, $k = x, y$ es la componente a que se hace referencia y $L(e, i)$ es el número de elemento adyacente al elemento e en la arista i .

Se puede observar que en la ecuación (29) se puede obtener en forma explícita (dependiendo de los valores de \bar{p}_e y $\bar{p}_{L(e,i)}$) el valor de $\bar{\mathbf{u}}_{k,e}$. Este hecho es lo que define al método como Local, en el caso que el parámetro C_{22} involucrado en la definición de flujo \hat{p}_h no sea cero esto no es posible ya que también dependería de $\bar{\mathbf{u}}_{k,L(e,i)}$.

Ahora se procede a hacer lo mismo con la ecuación (28) obteniéndose

$$\begin{aligned} \sum_{k=x,y} \left(\mathbf{C}_{k,e}^t - \sum_{i=1}^{N_{aint}} \left(\frac{1}{2} - C_{12} \right) n_{k,e,i} \mathbf{M}_{e,i} \right) \bar{\mathbf{u}}_{k,e} - \left(k^2 \mathbf{M}_e - C_{11} \left(\sum_{i=1}^{N_{aint}} \mathbf{M}_{e,i} \right) - \mathbf{R}_e \right) \bar{p}_e \\ - \sum_{k=x,y} \left(\sum_{i=1}^{N_{aint}} \left(\frac{1}{2} + C_{12} \right) n_{k,e,i} \mathbf{M}_{L(e,i),i} \bar{\mathbf{u}}_{k,L(e,i)} \right) - C_{11} \left(\sum_{i=1}^{N_{aint}} \mathbf{M}_{L(e,i),i} \bar{p}_{L(e,i)} \right) = -\mathbf{N}_e \end{aligned} \quad (30)$$

Con las ecuaciones 29 y 30 se tiene un sistema disperso que no es simétrico. Debido a que en la ecuación 29 se puede expresar $\bar{\mathbf{u}}_{k,e}$, $k = x, y$ en forma explícita, bastaría con sustituir dicha expresión para obtener un sistema dependiente sólo de la variable primaria \bar{p}_e .

5 RESULTADOS COMPUTACIONALES

En esta sección se presentan un ejemplo clásico que permiten estudiar el comportamiento del método de elementos finitos Galerkin Discontinuo Local con diversas condiciones de frontera absorbente locales de bajo orden.

5.1 Ejemplo: Cilindro Circular Rígido

Este problema modelo ([24], [15], [10], [11], [26]) puede enunciarse de la siguiente manera: Dada una onda plana (cuya presión "incidente" es $p_{inc} = e^{ikt \cdot \mathbf{x}}$, con $\mathbf{t} = [1, 0]$) que viaja a lo largo del eje x de izquierda a derecha en una dirección perpendicular al eje de un cilindro circular recto infinito de radio R_1 y con pared rígida, calcular la presión reflejada p_{sc} por dicho cilindro, la cual puede ser representada por medio de una condición de frontera tipo Neumann expresada en terminos de la onda incidente $\nabla p_{sc} \cdot \mathbf{n} = -\nabla p_{inc} \cdot \mathbf{n}$, véase [21]. Debido a la simetría del problema el mismo se puede modelar en 2D, utilizando una condición de frontera absorbente en la frontera artificial Γ_R ubicada en $r = R_2$ según la Figura 3. Este problema ha sido seleccionado ya que la solución exacta es conocida y viene dada por

$$p(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m i^m \frac{J'_m(kR_1)}{H'_m(kR_1)} H_m(kr) \cos m\theta \quad (31)$$

donde J_m es la función de Bessel cilíndrica de primer tipo de orden m , H_m es la función de Hankel cilíndrica de primer tipo de orden m , con $a_0 = 1$ y $a_m = 2$, $m > 0$.

A efectos de realizar las pruebas numéricas se han utilizado varias malla obtenidas utilizando el generador de mallas denominado *EZ4U*. Una muestra de las mallas utilizada se presenta en la Figura 3, en donde se puede observar el dominio computacional mallado utilizando elementos curvos para los elementos que contienen una arista en la frontera del objeto tanto como en la frontera artificial. En las Figuras 5 y 6 se puede observar la solución exacta para el ejemplo que se esta tratando, para lo que se a considerado $R_1 = 1$, $R_2 = 3$ para los valores de $k = 1$ y $k = 5$, respectivamente.

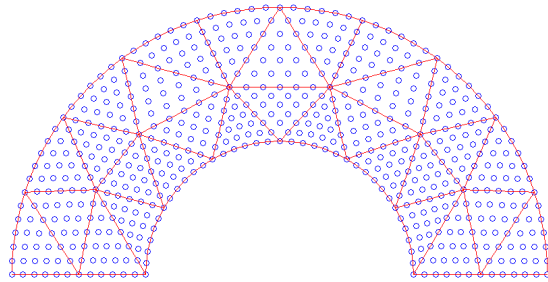
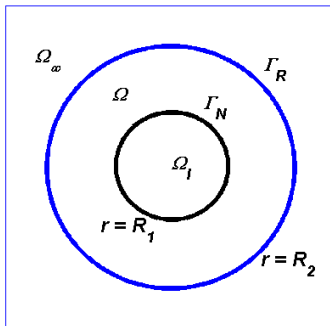


Figura 3: Dominio del problema de Helmholtz exterior para el ejemplo 2

Figura 4: Malla del dominio computacional para el ejemplo 2. $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, 30 elementos, $p = 6$

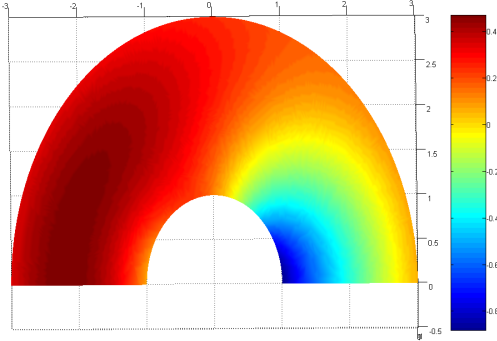


Figura 5: Solución Exacta para el ejemplo 2 con $k = 1$, $R_1 = 1$ y $R_2 = 3$

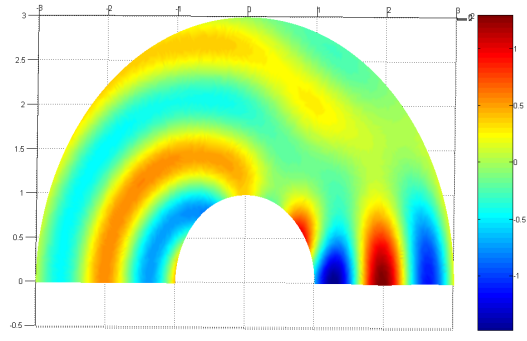


Figura 6: Solución Exacta para el ejemplo 2 con $k = 5$, $R_1 = 1$ y $R_2 = 3$

5.2 Discusión de Resultados

En esta sección se discuten los resultados tabulados en la tablas 3-8, en donde se presentan los errores relativos calculados utilizando la norma L_2 definida en (32).

$$Error = \frac{\|p - p_h\|}{\|p\|} = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} (p - p_h)^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} p^2 d\Omega}} \quad (32)$$

En la Tabla 3 se puede observar que no hay diferencia significativa en los errores relativos calculados cuando se utiliza funciones de forma del tipo polinomial de grado d mayor o igual que tres; esto también es válido para los valores presentados en las Tablas 4-7. También se puede observar en la Tabla 3 que para $k = 5$ se obtienen mejores resultados para los parámetros $R_1 = 1$ (fijo) y $R_2 = 2$ o 3 , todo ello analizado para una malla suficientemente gruesa (30 elementos). En las Tablas 4-7 no se observan diferencias significativas al utilizar condiciones de frontera absorbente de orden mayor o igual a uno. En la Tabla 8 se observa que para $k = 10$ se obtienen mejores resultados que para otros valores, lo cual es consecuente con la existencia de valores de k locales donde se obtienen menor error relativo.

6 COMENTARIO FINAL

En este trabajo se concluye, debido al comportamiento del método LDG para mallas gruesas cuando se usan valores de R_2 no tan lejanos al objeto y funciones de forma polinomiales de grado mayor a tres, es necesario el estudio de condiciones de frontera absorbente de orden superior o alguna otra estrategia para incorporar condiciones de frontera no reflejantes como lo son los métodos Dirichlet to Neumann y Perfectly Matched Layer.

d	$k = 1, R_2 = 2$	$k = 1, R_2 = 3$	$k = 5, R_2 = 2$	$k = 5, R_2 = 3$
2	0.1357	0.0292	0.0921	0.1014
3	0.1273	0.0272	0.0619	0.0234
4	0.1382	0.0274	0.0584	0.0210
5	0.1365	0.0273	0.0578	0.0216
6	0.1464	0.0276	0.0578	0.0216

Tabla 3: Error Relativo de p respecto a dos valores de k y de R_2 utilizando la condición de frontera absorbente de Feng de orden 3 (ABC(5)) y 30 elementos.

d	ABC(0)	ABC(1)	ABC(2)	ABC(3)	ABC(4)
2	0.2070	0.0979	0.1275	0.1089	0.1298
3	0.2069	0.0973	0.1208	0.1015	0.1222
4	0.2059	0.0958	0.1289	0.1110	0.1313
5	0.2061	0.0960	0.1277	0.1096	0.1299
6	0.2059	0.0957	0.1352	0.1187	0.1376

Tabla 4: Error Relativo de p para diferentes grados de polinomios y condiciones de frontera absorbente con $k = 1, R_2 = 2$ y 30 elementos.

d	ABC(0)	ABC(1)	ABC(2)	ABC(3)	ABC(4)
2	0.1131	0.0923	0.0921	0.0920	0.0920
3	0.0724	0.0624	0.0619	0.0614	0.0619
4	0.0673	0.0588	0.0584	0.0579	0.0584
5	0.0677	0.0581	0.0578	0.0573	0.0578
6	0.0664	0.0580	0.0579	0.0573	0.0578

Tabla 5: Error Relativo de p para diferentes grados de polinomios y condiciones de frontera absorbente con $k = 5, R_2 = 2$ y 30 elementos.

d	ABC(0)	ABC(1)	ABC(2)	ABC(3)	ABC(4)
2	0.1416	0.0261	0.0290	0.0267	0.0313
3	0.1419	0.0242	0.0269	0.0246	0.0288
4	0.1411	0.0237	0.0270	0.0245	0.0297
5	0.1412	0.0238	0.0270	0.0245	0.0247

Tabla 6: Error Relativo de p para diferentes grados de polinomios y condiciones de frontera absorbente con $k = 1, R_2 = 3$ y 119 elementos.

d	ABC(0)	ABC(1)	ABC(2)	ABC(3)	ABC(4)
2	0.0984	0.1014	0.1015	0.1014	0.1015
3	0.0281	0.0232	0.0235	0.0232	0.0235
4	0.0273	0.0208	0.0210	0.0207	0.0210
5	0.0277	0.0213	0.0216	0.0213	0.0216

Tabla 7: Error Relativo de p para diferentes grados de polinomios y condiciones de frontera absorbente con $k = 5$, $R_2 = 3$ y 119 elementos.

ABC	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
0	0.2059	0.1628	0.0965	0.0806	0.0667	0.0552	0.0488	0.0479	0.0434	0.0403
3	0.0980	0.1060	0.0786	0.0648	0.0581	0.0527	0.0451	0.0407	0.0352	0.0322
ABC	$k = 11$	$k = 12$	$k = 13$	$k = 14$	$k = 15$	$k = 16$	$k = 17$	$k = 18$	$k = 20$	$k = 40$
0	0.0426	0.0479	0.0527	0.0536	0.0544	0.0896	0.0633	0.0589	0.0731	0.7687
3	0.0342	0.0407	0.0463	0.0478	0.0509	0.0591	0.0622	0.0585	0.0748	0.7691

Tabla 8: Error Relativo de p para diferentes valores de k con condiciones de frontera absorbente ABC(0) ABC(3) para $d = 2$, $R_2 = 2$ y 1092 elementos.

REFERENCIAS

- [1] D. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, D. Marini, Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems *SIAM J. Numer. Anal.*, **39**, No 5, 1749-1779 (2002)
- [2] A. Bayliss, M. Guzburger and E. Turkel, Solution of elliptic equation in exterior regions, *SIAM J. Appl. Math.*, **42**, 430-451 (1982)
- [3] Gustavo Benitez Alvarez, Abimael Fernando Dourado Loula, Eduardo Gomes Dutra Do Carmo y Fernando Alves Rochinha, A discontinuous finite element formulation for Helmholtz equation, *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **195**, No. 33-36, 4018-4035, (2006)
- [4] F. Brezzi, G. Manzini, D. Marini, P. Pietra and A. Russo, Discontinuous Galerkin Approximations for Elliptic Problems, *Numer. Methods Partial Differential Eq.*, **16**, 365-378 (2000)
- [5] Paul Castillo, Bernardo Cockburn, Ilaria Perugia and Dominik Schotzau, An a priori error analysis of the local discontinuous galerkin method for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **38**, No 5, 1676-1706 (2000)
- [6] Bernardo Cockburn, Discontinuous Galerkin methods, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **83**, No 11, 731-754 (2003)

- [7] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu, The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **83**, No 11, 731-754 (2003)
- [8] B. Engquist y A. Majda, Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Math. Comput.*, **31**, 629-651 (1977)
- [9] Charbel Farhat, Isaac Harari and Ulrich Hetmaniuk, A discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime, *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **192**, 1389-1419 (2003)
- [10] Charbel Farhat, Paul Wiedemann-Goiran and Radek Tezaur, A discontinuous Galerkin method with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of short wave exterior Helmholtz problems on unstructured meshes, *Wave Motion*, **39**, 307-317 (2004)
- [11] Charbel Farhat, Radek Tezaur and Paul Wiedemann-Goiran, Higher-order extensions of a discontinuous Galerkin method for mid-frequency Helmholtz problems, *Int. J. Num. Meth. Engrng.*, **61**, 1938-1956 (2004)
- [12] K. Feng, Finite Element Method and Natural Boundary Reduction *Proc. of International Congress of Mathematics, Warsaw*, 1439-1453 (1983)
- [13] Dan Givoli, *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*, Elsevier, (1992).
- [14] Dan Givoli and Joseph B. Keller, A Finite Element Method for Large Domains, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **76**, 41-66,(1989)
- [15] Isaac Harari, Finite element formulations for exterior problems: Application to Hybrid methods, Non-reflecting Boundary Conditions, and Infinite Elements, *Int. J. Num. Meth. Engrng.*, **40**, 2791-2805 (1997)
- [16] Isaac Harari, A survey of finite element methods for time-harmonics acoustics, *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **195**, 1594-1607,(2006)
- [17] I. Harari, R. Tezaur and C. Farhat, A Study of Higher-order Discontinuous Galerkin and Quadratic Least-Squares Stabilized Finite Element Computations for Acoustic, *J. of Computational Acoustics*, **14**, No. 1, 1-19 (2006)
- [18] Frank Ihlenburg, *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, Springer (1998).
- [19] P. Lesaint and P. A. Raviart, On a finite element method for solving the neutron transport equation, *Mathematical aspects of finite elements in Partial Differential equations*, De Boor C (ed.), Academic Press: New York, (1974)

- [20] B. Q. Li, *Discontinuous finite element in Fluid Dynamics and Heat Transfer*, Serie in Computational Fluid and Solid Mechanics, Springer, (2006).
- [21] Allan D. Pierce, *Acoustic. An Introduction to its Physical Principles and Applications*. Acoustical Society of America pp. 678 (1994)
- [22] Reed, W. H. and Hill, T. R., Triangular mesh methods for the neutron transport equation, *Technical Report LA-UR-73-479. Los Alamos Scientific Laboratory*, (1973)
- [23] S. J. Sherwin, R. M. Kirby, J. Peiró, R. L. Taylor and O. C. Zienkiewicz, On 2D discontinuous Galerkin Methods, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **65**, 752-784 (2006)
- [24] James R. Stewart and Thomas J. R. Hughes, *h*-Adaptive finite element computation of time-harmonic exterior acoustic problems in two dimensions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **146**, 65-89 (1997)
- [25] Joseph J. Shriram and Ivo Babuska, A comparison of approximate boundary conditions and infinite element methods for exterior Helmholtz problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **164**, 121-139 (1998)
- [26] Theofanis Strouboulis, Ivo Babuska and Realino Huidobro, The generalized finite element method for Helmholtz equation: Theory, computation, and open Problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **195**, 4711-4731 (2006)
- [27] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, S. J. Sherwin and J. Peiró, On discontinuous Galerkin methods, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **58**, 1119-1148 (2003)