FÓRMULAS DE CUADRATURA INVARIANTES DE GRADOS 6 Y 7 PARA EL SIMPLEX 4-DIMENSIONAL

EDUARDO SAINZ DE LA MAZA
y
JOSÉ IGNACIO MAEZTU

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Universidad del País Vasco
Apartado 644, 48080 Bilbao
Tel: + 34-4-464 7700 Fax: + 34-4-464 8500
E-mail: eduardo@picasso.lc.ehu.es

RESUMEN

Para un simplex 4-dimensional T_4 se conocen fórmulas de cuadratura invariantes de grado de precisión hasta $d = 5$ como se muestra en[1]. En este trabajo presentamos dos nuevas fórmulas de cuadratura invariantes de grado de precisión $d = 6$ con 41 y 45 nodos respectivamente y una nueva fórmula de cuadratura invariante de grado $d = 7$ con 56 nodos. Estas fórmulas han sido obtenidas usando la teoría de consistencia desarrollada en[3] y las estructuras consistentes dadas en[2].

INVARIANT QUADRATURE RULES OF DEGREES 6 AND 7 FOR THE 4-DIMENSIONAL SIMPLEX

SUMMARY

Invariant quadrature rules for the 4-dimensional simplex T_4 are known for degrees of precission up to $d = 5$ as shown in[1]. In this paper we present two new invariant quadrature rules of degree of precission $d = 6$ with 41 and 45 nodes respectively and a new invariant quadrature rule of degree $d = 7$ with 56 nodes. These rules have been obtained using the consistency theory developed in[3] and the consistent structures given in[2].

INTRODUCCIÓN

Sea T_4 un simplex en el espacio euclídeo n-dimensional $\mathcal{R}^n$. Por sencillez suponemos que el simplex está centrado en el origen de coordenadas.

En[3] se dan condiciones de consistencia y estructuras consistentes para fórmulas de cuadratura invariantes para T_n. Más aún, extensos listados con estructuras casi-óptimas para dimensiones $n = 2, \ldots, 8$ pueden encontrarse en[2]. Por otro lado, en[1,5] se da un

Recibido: Noviembre 1996

 ISSN 0213–1315

NUEVAS FÓRMULAS DE CUADRATURA

Para el grado de precisión $d = 6$ la estructura óptima consistente es (1,2,1,1,0,0,0), lo que corresponde a una fórmula con 41 nodos. Hemos encontrado esta fórmula optimal que damos en la Tabla II. Nótese que los enteros entre paréntesis indican potencias de 10. Desafortunadamente, esta fórmula tiene un coeficiente negativo y nodos exteriores.

Peso	Coordenadas baricéntricas	Clase
0,5759229606500854846023933(-1)	$\lambda_0, \ldots, \lambda_4 = 0,2$	$\mathcal{C}_0$
0,2418931506423313081816267(-1)	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0,6965945921895460823287865(-1)$ $\lambda_4 = 0,7213621631241815670684854$	$\mathcal{C}_1$
-0,1564511870874370126531841	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0,2633995870188410139266809$ $\lambda_4 = -0,5359834807536405570672364(-1)$	$\mathcal{C}_1$
0,6124535037550939801905072(-2)	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 = 0,1204595375063863178766974(-1)$ $\lambda_3, \lambda_4 = 0,4819310609718416821306859$	$\mathcal{C}_2$
0,7712358568377507313479085(-1)	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 = 0,2108086438595810119361566$ $\lambda_3 = 0,3949416470964636587120560$ $\lambda_4 = -0,2736757770883865668948771(-1)$	$\mathcal{C}_3$

Tabla II. Fórmula óptima de grado $d = 6$ con 41 nodos

Podemos obtener fórmulas de grado $d = 6$ con 45 nodos usando la primera estructura casi-óptima (0,3,1,1,0,0,0) dada en[2]. De hecho hay una familia uniparamétrica de fórmulas con tal estructura. Las condiciones de consistencia (8) para esta estructura son $11 \geq 10$, $11 \geq 9$, $5 \geq 4$, $9 \geq 4$, $3 \geq 1$, $0 \geq 0$, $3 \geq 0$, $0 \geq 0$ y $0 \geq 0$. La desigualdad $5 \geq 4$ para la tercera desigualdad de (8) muestra que existe un subsistema con 4 ecuaciones y 5 incógnitas. El resto da un sistema con 6 ecuaciones y 6 incógnitas. Esta técnica se describe con más detalle en[3] y también ha sido usada por los autores en[4]. En particular, hemos obtenido una de esas fórmulas de cuadratura que tiene 40 nodos interiores y 5 nodos en la frontera de T_4. Esto tiene especial interés cuando las fórmulas se usan en dos simplex adyacentes. Damos esta fórmula en la Tabla III.

Finalmente, para el grado $d = 7$, la estructura óptima consistente es (0,3,2,1,0,0,0,), lo que correspondería a una fórmula con 55 nodos. No hemos encontrado ninguna fórmula con tal estructura y probablemente no exista. Sin embargo, hemos encontrado fórmulas con 56 nodos usando la estructura casi-óptima (1,3,2,1,0,0,0). Las condiciones de consistencia (8) para esta estructura son $14 \geq 13$, $13 \geq 12$, $7 \geq 6$, $9 \geq 7$, $3 \geq 2$, $0 \geq 0$, $3 \geq 0$, $0 \geq 0$ y $0 \geq 0$. Esto significa que el sistema de las ecuaciones de los momentos tiene 13 ecuaciones y 14 incógnitas. Por otra parte, estas desigualdades también muestran que podemos partir el sistema de los momentos en un sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas, otro con 4 ecuaciones y 4 incógnitas, otro con 6 ecuaciones y 6 incógnitas y finalmente una sola ecuación con una incógnita. Usando esta técnica hemos obtenido una fórmula con esta estructura que tiene 36 nodos interiores y 20 nodos en la frontera de T_4. Se da esta fórmula en la Tabla IV.

Peso	Coordenadas baricéntricas	Clase
0,4545502782112900229278918(-1)	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0,2360783339734728331786424$ $\lambda_4 = 0,5568666410610866728543053(-1)$	$\mathcal{C}_1$
-0,1021891697650104331919739(-1)	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0,1324571396311820829817951$ $\lambda_4 = 0,4701714414752716680728196$	$\mathcal{C}_1$
0,8097019657894579242153432(-3)	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$ $\lambda_4 = 1$	$\mathcal{C}_1$
0,3076393098231243153398894(-1)	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 = 0,3014854626053615210966631$ $\lambda_3, \lambda_4 = 0,4777181062871129449328432(-1)$	$\mathcal{C}_2$
0,2560658130623943000855375(-1)	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 = 0,5923155115712545969082435(-1)$ $\lambda_3 = 0,2429917194561704788817380$ $\lambda_4 = 0,5793136144867734338348465$	$\mathcal{C}_3$

Tabla III. Fórmula de grado $d = 6$ con 45 nodos

Peso	Coordenadas baricéntricas	Clase
0,5221166377331072189056668(-1)	$\lambda_0, \ldots, \lambda_4 = 0,2$	$\mathcal{C}_0$
-0,2389338884343214247887587	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0,8308617723205113525688987(-1)$ $\lambda_4 = 0,6676552910717954589724405$	$\mathcal{C}_1$
0,3292235750732045990300201(-1)	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0,2421682579294347307526949$ $\lambda_4 = 0,3132696828226107698922055(-1)$	$\mathcal{C}_1$
0,2469215982884802772510147	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0,9078492806247543159442689(-1)$ $\lambda_4 = 0,6368602877500982736222924$	$\mathcal{C}_1$
0,2104226570753433132604386(-1)	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 = 0,5383135601298325226469609(-1)$ $\lambda_3, \lambda_4 = 0,4192529594462777397287003$	$\mathcal{C}_2$
0,2339206386159315216712715(-1)	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 = 0,3070502189145610001639419$ $\lambda_3, \lambda_4 = 0,3942467641367606078220821(-1)$	$\mathcal{C}_2$
0,1494473518640089406757166(-1)	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 = 0,9090912336716022209982903(-1)$ $\lambda_3 = 0,7272726201450351994724265$ $\lambda_4 = 0$	$\mathcal{C}_3$

Tabla IV. Fórmula de grado $d = 7$ con 56 nodos

REFERENCIAS

1. R. Cools y P. Rabinowitz, "Monomial Cubature Rules since Stroud: A Compilation", *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. **48**, pp. 309–326, (1993).
2. J.I. Maeztu y E. Sainz de la Maza, "Quasi-Optimal Consistent Structures of Invariant Quadrature Rules for the n-Simplex", Tech. Report NA 94-7, Universidad del País Vasco, Dept. de Mat. Apl. y Est., Bilbao, (1994).
3. J.I. Maeztu y E. Sainz de la Maza, "Consistent Structures of Invariant Quadrature Rules for the n-Simplex", *Math. Comp.*, Vol. **64**, pp. 1171–1192, (1995).
4. E. Sainz de la Maza y J.I. Maeztu, "An Invariant Quadrature Rule of Degree 11 for the Tetrahedron", *C. R. Acad. Sci.*, Vol. 321, pp. 1263–1267,París, (1995).
5. A.H. Stroud, "*Approximate Calculation of Multiple Integrals*", Prentice-Hall, New Jersey, (1971).