

SENSIBILIDAD DE ESTADOS CRÍTICOS EN INESTABILIDAD ESTRUCTURAL VÍA PERTURBACIONES SINGULARES

ENRIQUE G. BANCHIO

y

LUIS A. GODOY

*Departamento de Estructuras
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de Correos 916, Córdoba 5000, Argentina
Fax: + 54-51-334144*

RESUMEN

En este trabajo presentamos un método directo para obtener la relación entre la carga crítica, las coordenadas críticas y el parámetro de imperfección. En la presente propuesta suponemos las expansiones para la carga crítica y las coordenadas correspondientes en términos de potencias arbitrarias del parámetro de imperfección. Luego aplicando el principio de menor degeneración, se determinan los exponentes y los coeficientes de las expansiones. La técnica desarrollada corresponde a perturbaciones singulares e incluye un esquema para identificar los exponentes posibles de las expansiones para estados críticos generales. En la teoría general de estabilidad elástica la clasificación de estados críticos se obtiene a partir del estado crítico y de la trayectoria postcrítica inicial. En este trabajo se demuestra que el mismo esquema de clasificación puede obtenerse a partir de investigar la sensibilidad del estado crítico sin necesidad de entrar en la trayectoria postcrítica.

SENSIBILITY OF CRITICAL STATES IN STRUCUTRAL INSTABILITY VIA SINGULAR PERTURBATIONS

SUMMARY

In this work, we describe a direct procedure for obtaining the relationships between the critical loads, the critical coordinates, and the amplitude of the imperfection. In the present approach we assume the expansions for the critical loads and corresponding coordinates in terms of arbitrary powers of the imperfections parameter. Then by the principle of least degeneracy, we determine the exponents and the coefficients of the expansions. The technique developed in this work employs singular perturbations and includes a methodology to identify the set of exponents for general cases of critical states. The classification of critical states in the general theory of elastic stability is obtained from the critical and the initial post-critical states. We show that the some type of classification can be obtained from a detailed investigation of the sensitivity of the critical states, without making use of the post-critical path.

Recibido: Febrero 1997

INTRODUCCIÓN

La teoría general de estabilidad para sistemas estructurales fue formulada originalmente por Koiter¹ para sistemas continuos y posteriormente extendida para sistemas discretos por varios autores. Una revisión de la teoría desarrollada se encuentra en los libros^{2,3,4,5,6}. En el análisis de estabilidad de un sistema, la sensibilidad de los estados críticos respecto a imperfecciones estructurales reviste de gran importancia debido a que una pequeña imperfección puede ocasionar una disminución drástica de la carga crítica.

Para realizar el análisis de sensibilidad, se introduce un nuevo parámetro ε que representa la amplitud de la imperfección con una distribución espacial determinada y se escribe la energía potencial total en términos de las coordenadas generalizadas, el parámetro de carga Λ y la imperfección ε . Un punto crítico está determinado por las ecuaciones de equilibrio y de estabilidad crítica^{2,3,4,5}. El análisis de sensibilidad se lleva a cabo perturbando las dos ecuaciones anteriores con el objeto de encontrar la relación entre la carga máxima y el parámetro de imperfección denotada por $\Lambda^M(\varepsilon)$. En presencia de una bifurcación, esta relación tiene pendiente infinita en $\varepsilon = 0$ y la expansión no puede llevarse a cabo mediante métodos de perturbación regular. Thompson y Hunt³ resuelven este problema perturbando con respecto a otro parámetro, por ejemplo Q_1 y una vez encontradas las series $\Lambda^M = \Lambda^M(Q_1)$, $Q_j^M = Q_j^M(Q_1)$ con $j > 1$ y $\varepsilon = \varepsilon(Q_1)$, que resultan expansiones regulares, se invierte la última para obtener $Q_1 = Q_1(\varepsilon)$ y luego se reemplaza en las dos primeras. Las expansiones resultantes quedan en términos de potencias fraccionarias de ε . Este enfoque se encuentra incorporado en las referencias que se citan arriba.

En el método directo para un grado de libertad⁷ en el cual las relaciones $\Lambda^M(\varepsilon)$ y $Q_j^M(\varepsilon)$ se obtienen sin necesidad de expansiones intermedias. En esta última propuesta los exponentes no pueden ser asumidos *a priori* y deben ser determinados como parte del problema. La extensión de la metodología⁷ a sistemas de múltiples grados de libertad no es un asunto trivial e involucra la sensibilidad de la trayectoria primaria del autovalor y del autovector del problema. En este trabajo se presenta un nuevo esquema de análisis que permite investigar la sensibilidad de estados singulares frente a un parámetro. La nueva formulación emplea perturbaciones singulares a partir del estado crítico, pero no está restringida al caso de bifurcaciones sino que permite contemplar casos generales de estados críticos.

ENERGÍA POTENCIAL

En la actualidad existen dos enfoques para evaluar trayectorias en problemas de estabilidad estructural usando elementos finitos: en el primer enfoque se hace uso de la teoría general de estabilidad estructural que emplea la energía potencial total y sus derivadas para investigar la naturaleza de la estabilidad de un estado, identificación de estados críticos y evaluación asintótica de trayectorias emergentes^{8,9,10}. El segundo enfoque es el de la mecánica computacional, en el que el seguimiento de trayectorias se lleva a cabo mediante técnicas de análisis no lineal, tales como métodos de avance

paso a paso o de continuación^{11,12}. El presente trabajo se enmarca dentro del primer enfoque.

Consideremos un sistema discretizado representado por una función de energía potencial

$$V = V(Q_i, \Lambda)$$

donde Q_i para $i = 1, \dots, n$, representan las coordenadas generalizadas que describen el comportamiento del sistema y Λ el parámetro de carga. En particular, nos interesan aquellos sistemas cuya función de energía potencial total sea lineal en el parámetro de carga; tal condición nos permite escribir a V de la siguiente manera

$$V(Q_i, \Lambda) = \mathcal{U}(Q_i) - \Lambda \mathcal{E}(Q_i)$$

donde $\mathcal{U}(Q_i)$ representa la energía interna de deformación y $\mathcal{E}(Q_i)$ los desplazamientos asociados a las cargas. Sobre estos sistemas estudiaremos la sensibilidad a dos tipos de imperfecciones. La primera, en la cual se adiciona a la energía potencial total del sistema perfecto un término de la forma

$$-\varepsilon \Lambda \mathcal{B}(Q_i) \quad (1)$$

con el nuevo parámetro ε que puede considerarse como la magnitud de la imperfección. Este caso se presenta, por ejemplo, cuando la imperfección corresponde a una carga descentrada. El otro tipo de imperfección considerado es agregando el término

$$-\varepsilon \mathcal{B}(Q_i) \quad (2)$$

que se presenta cuando hay una imperfección geométrica o una deformación inicial debido a la presencia de una pequeña carga no colineal a la carga Λ .

El sistema imperfecto queda representado por una función de energía potencial total

$$V = V(Q_i, \Lambda, \varepsilon)$$

Denotamos con $V(Q_i, \Lambda, 0)$ la energía potencial correspondiente al sistema perfecto. Para realizar el análisis aproximamos convenientemente la energía potencial del sistema V por una serie de Taylor alrededor de un punto de equilibrio estable e

$$V(Q_i, \lambda, \varepsilon) = \hat{V}_0 + \hat{V}_i Q_i + \frac{1}{2!} \hat{V}_{ij} Q_i Q_j + \frac{1}{3!} \hat{V}_{ijk} Q_i Q_j Q_k + \frac{1}{4!} \hat{V}_{ijkl} Q_i Q_j Q_k Q_l + \dots \quad (3)$$

donde, debido a los sistemas considerados, los coeficientes $\hat{V}_{ij} = \frac{\partial V}{\partial Q_i \partial Q_j} |_e$ son funciones a lo más lineales de los parámetros de carga Λ y de imperfección ε .

SENSIBILIDAD EN TÉRMINOS DE PERTURBACIONES SINGULARES

A partir de la teoría general de estabilidad elástica, planteamos la condición de equilibrio

$$V_i = 0 \quad (4)$$

donde los subíndices denotan derivadas parciales respecto a las coordenadas generalizadas Q_i para $i = 1, \dots, n$.

La condición de punto crítico distinto está caracterizada por la existencia de una única dirección crítica asociada a la nulidad de un único coeficiente de estabilidad. Es decir, un punto crítico $c = (q_{ic}, \lambda_c)$ satisface

$$V_{ij}^c x_{jc} = 0 \quad (5)$$

donde x_{jc} es la dirección crítica y V_{ij} es la matriz de rigidez tangente de características simétricas. Esta última ecuación puede verse como un problema de valores propios en términos del autovalor λ_c y el vector propio x_{jc} .

A partir de las ecuaciones (4)-(5) tomando $\varepsilon = 0$ determinamos los valores críticos del sistema perfecto λ_c y q_{ic} junto con la dirección crítica denotada por x_{ic} que normalizamos de manera tal que $x_{1c} = 1$.

Supongamos que a lo largo de una trayectoria primaria o fundamental, que satisface la ecuación (4), se ha identificado el estado crítico λ_c , q_{ic} y x_{ic} con $\varepsilon = 0$. Si se introduce en el sistema un valor $\varepsilon \neq 0$, tanto la trayectoria primaria como el estado crítico habrán cambiado, e inclusive la propia naturaleza del estado crítico (no sólo su valor numérico) pueden modificarse. En el enfoque de la mecánica computacional se procedería a efectuar nuevos cálculos de las trayectorias para cada nuevo valor de ε . Sobre cada trayectoria de equilibrio no lineal con $\varepsilon \neq 0$ será posible identificar un nuevo estado crítico, que llamaremos Λ^M , Q_j^M , y X_j^M .

Pero la información más importante del sistema no está dada por el conjunto de las trayectorias no lineales, sino por el conjunto de estados críticos que el sistema tiene en función del nuevo parámetro de control ε . Para determinar las relaciones entre la carga máxima y el parámetro de imperfección, denotada por $\Lambda^M(\varepsilon)$, y entre las coordenadas correspondientes y la imperfección que representamos por $Q_j^M(\varepsilon)$, supondremos que tales relaciones admiten los siguientes desarrollos

$$\begin{aligned} \Lambda^M &= \lambda_c + \lambda_1 \varepsilon^{\alpha_1} \\ Q_j^M &= q_{jc} + q_{j1} \varepsilon^{\beta_1} \\ X_j^M &= x_{jc} + x_{j1} \varepsilon^{\gamma_1} \end{aligned} \quad (6)$$

con los exponentes α_1 , β_1 , γ_1 racionales positivos y los coeficientes λ_1 , q_{j1} y x_{j1} reales para $j = 1, \dots, n$. En esta formulación los coeficientes de los desarrollos no representan necesariamente derivadas de V como en los desarrollos empleados para casos de perturbación regular.

CRITERIOS DE BÚSQUEDA DE LOS EXPONENTES DE LAS SERIES

Considerando ε distinto de cero, introducimos los desarrollos (6) en la ecuación de equilibrio (4) y luego de reagrupar por potencias de ε obtenemos la ecuación de equilibrio perturbada

$$\underbrace{V_i^c}_{=0} + \dot{V}_i^c \varepsilon^1 + \lambda_1 V_i^c \varepsilon^{\alpha_1} + V_{ij}^c q_{j1} \varepsilon^{\beta_1} + \lambda_1 V_{ij}^c q_{j1} \varepsilon^{\alpha_1 + \beta_1} + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{2\beta_1} + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{\alpha_1 + 2\beta_1} + \frac{1}{3!} V_{ijkl}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{3\beta_1} + \frac{1}{3!} \lambda_1 V_{ijkl}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\alpha_1 + 3\beta_1} + \dot{V}_{ij}^c q_{j1} \varepsilon^{1 + \beta_1} + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1 + 2\beta_1} + \frac{1}{3!} \dot{V}_{ijkl}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1 + 3\beta_1} + \lambda_1 \dot{V}_i^c \varepsilon^{1 + \alpha_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ij}^c q_{j1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + \beta_1} + \frac{1}{2!} \lambda_1 \dot{V}_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + 2\beta_1} + \frac{1}{3!} \lambda_1 \dot{V}_{ijkl}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + 3\beta_1} = 0 \tag{7}$$

donde $(\dot{})' = \partial(\dot{}) / \partial \Lambda$, $(\dot{}) = \partial(\dot{}) / \partial \varepsilon$, $(\dot{})' = \partial(\dot{}) / \partial \varepsilon \partial \Lambda$ y $()^c$ denota evaluación en el punto crítico $c = (q_{ic}, \lambda_c, 0)$. Observamos que el primer término es nulo debido a que corresponde a la ecuación de equilibrio del sistema perfecto evaluada en el punto crítico c . La ecuación de equilibrio (7) corresponde a una imperfección del tipo carga descentrada, como la que se mostró en la ecuación (1), en la cual el parámetro de imperfección ε aparece multiplicando al parámetro de carga Λ . Sin embargo, esta ecuación también nos permite formular el análisis para el segundo tipo de imperfección, mostrado en la ecuación (2), ya que la única diferencia es que en este último caso, los términos que involucren derivadas de V con respecto a la carga Λ y al parámetro de imperfección ε denotados por $(\dot{})'$ serán nulos.

En el análisis de sensibilidad, los exponentes de primer orden en los desarrollos (6), juegan un papel preponderante, ya que estos reflejan el grado de perceptibilidad del sistema frente a una imperfección. Cuando un solo exponente es requerido, se puede aplicar alguna técnica de búsqueda¹³. Sin embargo, en el presente trabajo tenemos que encontrar tres exponentes incógnitas, lo que requiere de técnicas más complejas.

Con el objeto de determinar los posibles exponentes α_1 , β_1 , y γ_1 que nos permitan obtener los coeficientes λ_1 , q_{j1} y x_{j1} correspondientes a los desarrollos (6), consideraremos un potencial aproximado por una serie de Taylor de cuarto orden y supondremos que todos los términos de la ecuación de equilibrio (7) son distintos de cero. Por lo tanto, el conjunto de exponentes presentes en la ecuación (7) es

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1; \beta_1; \alpha_1 + \beta_1; 2\beta_1; \alpha_1 + 2\beta_1; 3\beta_1; \alpha_1 + 3\beta_1; 1; 1 + \alpha_1; 1 + \beta_1; \\ 1 + \alpha_1 + \beta_1; 1 + 2\beta_1; 1 + \alpha_1 + 2\beta_1; 1 + 3\beta_1; 1 + \alpha_1 + 3\beta_1; \end{array} \right\} \tag{8}$$

A partir del teorema fundamental de la teoría de perturbación¹⁴, la presencia del único término constante \dot{V}_i^c considerado distinto de cero, asociado a ε^1 condiciona la elección de los exponentes α_1 y β_1 de manera tal que al menos dos términos resulten asociados al exponente 1 si pretendemos que la ecuación se satisfaga con un error

menor que $O(\varepsilon^1)$ para ε suficientemente pequeño. Sin embargo, si consideramos el caso $\alpha_1 = \beta_1 = 1/4$, observamos que los términos asociados al exponente 1 resultan $\frac{1}{3!} \lambda_1 V_{ijkl}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1}$ y \dot{V}_i^c que están asociados a los exponentes $\alpha_1 + 3\beta_1$ y 1 respectivamente. Si bien hay dos términos asociados a ε^1 no podremos resolver la ecuación de equilibrio (7) con un error menor que $O(\varepsilon^1)$ pues falta el término correspondiente al exponente $4\beta_1$ que no aparece debido a que partimos de una aproximación que es de cuarto orden. Una manera de resolver este problema, reteniendo únicamente los α_1 y β_1 correspondientes a sensibilidades para las cuales dispongamos de la información necesaria a partir de un potencial de un orden determinado, es elegir los exponentes que maximicen la cantidad de términos asociada al exponente 1.

Una manera de determinar los exponentes que satisfacen esta última condición consiste en asociar a cada exponente del conjunto (8) con un plano definido paramétricamente y luego determinar los puntos $(\alpha_1, \beta_1, 1)$ con α_1 y β_1 mayores que cero donde se produzcan la mayor cantidad de intersecciones. Teniendo en cuenta que $\varepsilon \ll 1$ para el cálculo de la sensibilidad de primer orden, podemos reducir el conjunto de exponentes (8) desechando los términos cuyos exponentes sean mayores que 1 para α_1 y β_1 positivos. De esta manera obtenemos el conjunto reducido de exponentes

$$\{1; \alpha_1; \beta_1; \alpha_1 + \beta_1; 2\beta_1; \alpha_1 + 2\beta_1; 3\beta_1; \alpha_1 + 3\beta_1\} \quad (9)$$

con los consiguientes planos asociados a cada elemento del conjunto anterior

$$\begin{aligned} P_1 &= (\alpha_1; \beta_1; \alpha_1) & P_2 &= (\alpha_1; \beta_1; \beta_1) & P_3 &= (\alpha_1; \beta_1; \alpha_1 + \beta_1) \\ P_4 &= (\alpha_1; \beta_1; 2\beta_1) & P_5 &= (\alpha_1; \beta_1; \alpha_1 + 2\beta_1) & P_6 &= (\alpha_1; \beta_1; 3\beta_1) \\ P_7 &= (\alpha_1; \beta_1; \alpha_1 + 3\beta_1) & P_8 &= (\alpha_1; \beta_1; 1) & & \text{para } \alpha_1 \text{ y } \beta_1 > 0 \end{aligned}$$

A partir del gráfico representado en la Figura 1, haciendo un corte a la altura $z = 1$ observamos que la cantidad máxima de planos que se intersecan en un mismo punto es de tres y corresponden a los siguientes valores de α_1 y β_1

$$\left\{ (1, 1), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\} \quad (10)$$

También se pueden obtener los exponentes a través de las curvas de nivel de la función que asigna a cada par (α_1, β_1) la cantidad de planos del conjunto (9) que pasan por el punto $(\alpha_1, \beta_1, 1)$ (Figura 1).

Para cada par (α_1, β_1) del conjunto (10) obtenido a partir de la ecuación de equilibrio, debemos determinar el exponente γ_1 a través de la ecuación de estabilidad.

A continuación, introducimos los desarrollos (6) en la ecuación (5) para obtener la ecuación de estabilidad perturbada

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{V_{ij}^c x_{jc} + \dot{V}_{ij}^c x_{jc} \varepsilon^1}_{=0} + \lambda_1 V_{ij}^c x_{jc} \varepsilon^{\alpha_1} + V_{ij}^c x_{j1} \varepsilon^{\gamma_1} + \lambda_1 V_{ij}^c x_{j1} \varepsilon^{\alpha_1 + \gamma_1} + V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{\beta_1} \\
 & + \lambda_1 V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{\alpha_1 + \beta_1} + V_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{\beta_1 + \gamma_1} + \lambda_1 V_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \\
 & + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{2\beta_1} + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijkl}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\alpha_1 + 2\beta_1} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{2\beta_1 + \gamma_1} \\
 & + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\alpha_1 + 2\beta_1 + \gamma_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ij}^c x_{jc} \varepsilon^{1 + \alpha_1} + \dot{V}_{ij}^c x_{j1} \varepsilon^{1 + \gamma_1} \\
 & + \lambda_1 \dot{V}_{ij}^c x_{j1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + \gamma_1} + \dot{V}_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{1 + \beta_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + \beta_1} \\
 & + \dot{V}_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1 + \beta_1 + \gamma_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijkl}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1 + 2\beta_1} \\
 & + \frac{1}{2!} \lambda_1 \dot{V}_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + 2\beta_1} + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1 + 2\beta_1 + \gamma_1} \\
 & d + \lambda_1 \dot{V}_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + 2\beta_1 + \gamma_1} = 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

donde el primer término es nulo pues corresponde a la ecuación de estabilidad del sistema perfecto evaluada en el punto crítico.

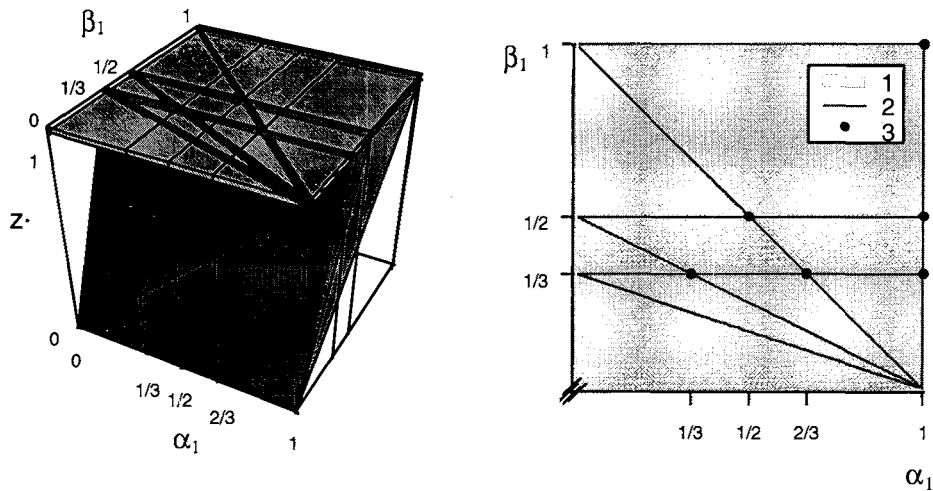


Figura 1. Gráfico de los planos asociados a los exponentes y curvas de nivel de la función que asigna a cada par (α_1, β_1) la cantidad de planos que se intersecan en $(\alpha_1, \beta_1, 1)$

Los términos $\dot{V}_{ij}^c x_{jc}$ y $\lambda_1 V_{ij}^c x_{jc}$ asociados a las exponentes 1 y α_1 condicionan la elección de γ_1 de forma tal, que al tomar el término principal, es decir, el asociado al menor exponente, nos provea una ecuación para x_{j1} . Por lo tanto, γ_1 deberá

maximizar la cantidad de términos asociados al menor exponente entre 1 y α_1 . Para cada par (α_1, β_1) del conjunto (10) obtenemos los valores de γ_1 con las correspondientes cantidades de términos asociados que se muestran en la Tabla I.

α_1	β_1	γ_1	Exponente	Cantidad de términos
1	1	1	1	4
1	1/2	1/2	1	4
1	1/3	1/3	1	3
1/2	1/2	1/2	1/2	3
1/3	1/3	1/3	1/3	3
2/3	1/3	1/3	2/3	3

Tabla I. Exponentes obtenidos a partir de la ecuación de estabilidad

En la Tabla I observamos que para $\alpha_1 = 1$ la cantidad máxima de términos es 4 por lo tanto, el caso $\alpha_1 = 1, \beta_1 = \gamma_1 = 1/3$ que tiene sólo tres debe ser descartado pues el término correspondiente al exponente $3\beta_1$ no está presente en la ecuación de estabilidad debido a que partimos de un potencial aproximado por una serie de Taylor de cuarto orden. Por otro lado, para α_1 menor que 1, el máximo es de tres términos asociados a los respectivos exponentes. Luego, los casos de sensibilidad a analizar son solamente los de la Tabla II.

α_1	β_1	γ_1
1	1	1
1	1/2	1/2
1/2	1/2	1/2
1/3	1/3	1/3
2/3	1/3	1/3

Tabla II. Exponentes correspondientes a las posibles sensibilidades determinadas a partir del potencial de cuarto orden

CRITERIOS DE BÚSQUEDA DE LOS COEFICIENTES DE LAS SERIES

Una vez que se han identificado los exponentes de las series, es necesario pasar a los coeficientes de las mismas. Para ello usamos las ecuaciones de perturbación de la ecuación de equilibrio y de estabilidad, pero esas no son suficientes para completar nuestro análisis. Es necesario agregar dos ecuaciones escalares más, que son las ecuaciones de contracción de equilibrio y contracción de estabilidad.

Mediante el mecanismo de contracción³, en el cual se multiplica la i -ésima ecuación por la i -ésima coordenada del vector correspondiente a la dirección crítica x_{ic} , a partir de la ecuación de equilibrio (7), obtenemos la ecuación de equilibrio contraída

$$\begin{aligned}
 & \dot{V}_i^c x_{ic} \varepsilon^1 + \lambda_1 V_i^{tc} x_{ic} \varepsilon^{\alpha_1} + \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} q_{j1}}_{=0} \varepsilon^{\beta_1} + \lambda_1 V_{ij}^{tc} x_{ic} q_{j1} \varepsilon^{\alpha_1 + \beta_1} \\
 & + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{2\beta_1} + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijk}^{tc} x_{ic} q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{\alpha_1 + 2\beta_1} + \frac{1}{3!} V_{ijkl}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{3\beta_1} \\
 & + \frac{1}{3!} \lambda_1 V_{ijkl}^{tc} x_{ic} q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\alpha_1 + 3\beta_1} + \dot{V}_{ij}^c x_{ic} q_{j1} \varepsilon^{1 + \beta_1} + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijk}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1 + 2\beta_1} \quad (12) \\
 & + \frac{1}{3!} \dot{V}_{ijkl}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1 + 3\beta_1} + \lambda_1 \dot{V}_i^{tc} x_{ic} \varepsilon^{1 + \alpha_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ij}^{tc} x_{ic} q_{j1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + \beta_1} \\
 & + \frac{1}{2!} \lambda_1 \dot{V}_{ijk}^{tc} x_{ic} q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + 2\beta_1} + \frac{1}{3!} \lambda_1 \dot{V}_{ijkl}^{tc} x_{ic} q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + 3\beta_1} = 0
 \end{aligned}$$

donde el término correspondiente a ε^{β_1} es nulo por la condición de estabilidad crítica del sistema perfecto. Análogamente, con el mismo procedimiento a partir de la ecuación de estabilidad (11) obtenemos la ecuación de estabilidad contraída

$$\begin{aligned}
 & \dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{jc} \varepsilon^1 + \lambda_1 V_{ij}^{tc} x_{ic} x_{jc} \varepsilon^{\alpha_1} + \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} x_{j1}}_{=0} \varepsilon^{\gamma_1} + \lambda_1 V_{ij}^{tc} x_{ic} x_{j1} \varepsilon^{\alpha_1 + \gamma_1} \\
 & + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{\beta_1} + \lambda_1 V_{ijk}^{tc} x_{ic} x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{\alpha_1 + \beta_1} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{\beta_1 + \gamma_1} \\
 & + \lambda_1 V_{ijk}^{tc} x_{ic} x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{2\beta_1} \\
 & + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijkl}^{tc} x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\alpha_1 + 2\beta_1} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{2\beta_1 + \gamma_1} \\
 & + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijkl}^{tc} x_{ic} x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{\alpha_1 + 2\beta_1 + \gamma_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{jc} \varepsilon^{1 + \alpha_1} + \dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{j1} \varepsilon^{1 + \gamma_1} \quad (13) \\
 & + \lambda_1 \dot{V}_{ij}^{tc} x_{ic} x_{j1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + \gamma_1} + \dot{V}_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{1 + \beta_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ijk}^{tc} x_{ic} x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + \beta_1} \\
 & + \dot{V}_{ijk}^c x_{ic} x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1 + \beta_1 + \gamma_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ijk}^{tc} x_{ic} x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \\
 & + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1 + 2\beta_1} + \frac{1}{2!} \lambda_1 \dot{V}_{ijkl}^{tc} x_{ic} x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + 2\beta_1} \\
 & + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijkl}^c x_{ic} x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1 + 2\beta_1 + \gamma_1} + \lambda_1 \dot{V}_{ijkl}^{tc} x_{ic} x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1 + \alpha_1 + 2\beta_1 + \gamma_1} = 0
 \end{aligned}$$

Notemos que tanto la ecuación de equilibrio contraída como la de estabilidad contraída son ecuaciones escalares.

A continuación, trabajando con las ecuaciones de equilibrio (7), de estabilidad (11), equilibrio contraída (12) y estabilidad contraída (13) obtendremos los coeficientes para cada uno de los casos expuestos en la Tabla II.

CARACTERIZACIÓN DE ESTADOS CRÍTICOS EN BASE A SU SENSIBILIDAD

Procedemos a investigar las posible expansiones singulares a partir de un estado crítico. Como hay varios conjuntos de exponentes a ser investigados, los trataremos a cada uno por separado.

Caso I: $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$ y $\gamma_1 = 1$

Ecuación de equilibrio

Reemplazando $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ en la ecuación de equilibrio (7) y reagrupando por potencias de ε , obtenemos la siguiente expresión

$$\left[\dot{V}_i^c + \lambda_1 V_i'^c + V_{ij}^c q_{j1} \right] \varepsilon + \left[\lambda_1 \dot{V}_i^c + \lambda_1 V_{ij}'^c q_{j1} + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} + \dot{V}_{ij}^c q_{j1} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) = 0$$

El término principal da lugar a una ecuación para q_{j1}

$$V_{ij}^c q_{j1} = - \left(\dot{V}_i^c + \lambda_1 V_i'^c \right)$$

Esta última ecuación nos permite escribir a q_{j1} de la siguiente manera

$$q_{j1} = k_1 x_{jc} + y_{j1} \tag{14}$$

donde y_{j1} es solución del sistema

$$V_{ij}^c y_{j1} = - \left(\dot{V}_i^c + \lambda_1 V_i'^c \right) \quad \text{con } y_{11} = 0 \tag{15}$$

Ecuación de estabilidad

En la ecuación de estabilidad (11), introducimos los exponentes $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1$. Luego de reagrupar por potencias de ε obtenemos la siguiente expresión

$$\left[\dot{V}_{ij}^c x_{jc} + \lambda_1 V_{ij}'^c x_{jc} + V_{ij}^c x_{j1} + V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0$$

Tomando el término principal escribimos la siguiente ecuación para x_{j1} .

$$V_{ij}^c x_{j1} = - \left(\dot{V}_{ij}^c x_{jc} + \lambda_1 V_{ij}'^c x_{jc} + V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \right) \tag{16}$$

con $x_{11} = 0$, pues normalizamos x_{ic} de manera tal que $x_{1c} = 1$.

Ecuación de equilibrio contraída

La ecuación de equilibrio contraída (12) para $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ da lugar a la siguiente ecuación

$$\left[\dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 V_i'^c x_{ic} + \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} q_{j1}}_{=0} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0$$

La ecuación resultante de tomar el término principal es

$$\dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 V_i'^c x_{ic} = 0 \tag{17}$$

que nos permite obtener λ_1 distinto de cero siempre que

$$\dot{V}_i^c x_{ic} \neq 0 \tag{18}$$

$$V_i'^c x_{ic} \neq 0 \tag{19}$$

Con estas condiciones, si λ_1 satisface (17) entonces la ecuación (15) tiene solución, pues el miembro derecho resulta ortogonal a x_{ic} .

Ecuación de estabilidad contraída

La ecuación de estabilidad contraída (13) para los exponentes considerados da lugar a la ecuación

$$\left[\dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + \lambda_1 V_{ij}'^c x_{ic} x_{jc} + \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} x_{j1}}_{=0} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0$$

Reteniendo el término principal y reemplazando q_{j1} por la ecuación (14) obtenemos la siguiente ecuación escalar

$$\dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + \lambda_1 V_{ij}'^c x_{ic} x_{jc} + k_1 V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} y_{k1} = 0 \tag{20}$$

Para obtener k_1 distinto de cero a partir de esta última ecuación necesitamos

$$V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} \neq 0 \tag{21}$$

junto con la condición

$$\dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + \lambda_1 V_{ij}'^c x_{ic} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} y_{k1} \neq 0 \tag{22}$$

Entonces, calculando λ_1 a partir de (17) nos permite obtener y_{j1} resolviendo (15). Luego, por medio de (20) calculamos k_1 . Finalmente, obtenemos q_{j1} a partir de (14) y

x_{j1} resolviendo (16). Como y_{j1} , λ_1 y k_1 satisfacen (20), la ecuación (16) tiene solución. Las condiciones (18)-(21) corresponden a la caracterización de un punto límite^{2,3} y la condición (22) garantiza q_{j1} distinto de cero.

Caso II: $\alpha_1 = 1/2$, $\beta_1 = 1/2$ y $\gamma_1 = 1/2$

Ecuación de equilibrio

Reemplazando $\alpha_1 = \beta_1 = 1/2$ en la ecuación de equilibrio (7) y luego de reagrupar por potencias de ε obtenemos la siguiente ecuación

$$\left[\lambda_1 V_i'^c + V_{ij}^c q_{j1} \right] \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \left[\dot{V}_i^c + \lambda_1 V_{ij}^{lc} q_{j1} + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) = 0 \quad (23)$$

A partir del término principal, resulta la ecuación

$$V_{ij}^c q_{j1} = -\lambda_1 V_i'^c$$

Esta ecuación nos permite escribir a q_{j1} como

$$q_{j1} = k_1 x_{jc} + \lambda_1 y_{j1} \quad (24)$$

donde y_{j1} es solución de

$$V_{ij}^c y_{j1} = -V_i'^c \quad \text{con } y_{11} = 0 \quad (25)$$

y x_{jc} es la dirección crítica. Como V_{ij}^c tiene rango $(n-1)$, para poder resolver la ecuación anterior necesitamos que $V_i'^c$ sea ortogonal a x_{ic} . Es decir

$$V_i'^c x_{ic} = 0 \quad (26)$$

Ecuación de estabilidad

La ecuación de estabilidad (11) para los valores de $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1/2$ resulta

$$\left[\lambda_1 V_{ij}^{lc} x_{jc} + V_{ij}^c x_{j1} + V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \right] \varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon) = 0 \quad (27)$$

El término principal da lugar a una ecuación para x_{j1}

$$V_{ij}^c x_{j1} = - \left(\lambda_1 V_{ij}^{lc} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \right) \quad \text{con } x_{11} = 0 \quad (28)$$

Ecuación de equilibrio contraída

Introducimos los exponentes α_1 y β_1 considerados en la ecuación de equilibrio contraída (12) y agrupamos por potencias de ε para obtener la siguiente expresión

$$\left[\lambda_1 \underbrace{V_i'^c x_{ic}}_{=0} + \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} q_{j1}}_{=0} \right] \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \left[\dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} q_{j1} + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) = 0$$

donde el primer término es nulo por la consideración (26) y por la ecuación de estabilidad crítica del sistema perfecto. Por lo tanto el término principal de la ecuación de equilibrio contraída es el asociado a ε^1 y da lugar a la ecuación escalar

$$\dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} q_{j1} + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} = 0 \quad (29)$$

Reemplazando q_{j1} por (24) en la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_i^c x_{ic} + k_1 \lambda_1 \left(V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} y_{k1} \right) + \frac{k_1^2}{2} V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} \\ + \lambda_1^2 \left(V_{ij}^c x_{ic} y_{j1} + \frac{1}{2} V_{ijk}^c x_{ic} y_{j1} y_{k1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Ecuación de estabilidad contraída

La ecuación de estabilidad contraída (13) considerando α_1 , β_1 y γ_1 , resulta

$$\left[\lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} \right] \varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon) = 0$$

cuyo término principal genera la siguiente ecuación

$$\lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} = 0$$

si esta ecuación se satisface, significa que el miembro derecho de (28) es ortogonal a la dirección crítica x_{ic} por lo tanto permitirá resolver (28) para x_{j1} . Reemplazando q_{j1} por (24) en la ecuación anterior tenemos

$$\lambda_1 \left(V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} y_{k1} \right) + k_1 V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} = 0 \quad (31)$$

Para obtener k_1 y λ_1 distintos de cero a partir de las ecuaciones (30) y (31) necesitamos

$$\dot{V}_i^c x_{ic} \neq 0 \quad (32)$$

$$V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} \neq 0 \quad (33)$$

$$V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} y_{k1} \neq 0 \quad (34)$$

$$V_{ij}^c x_{ic} y_{j1} + \frac{1}{2} V_{ijk}^c x_{ic} y_{j1} y_{k1} \neq 0 \quad (35)$$

Entonces, a partir de (30) y (31) se obtienen k_1 y λ_1 . A continuación, junto con y_{j1} obtenido en (25), calculamos q_{j1} por medio de (24) y por último, resolvemos (28) para x_{j1} . Las condiciones (26), (32) y (33) caracterizan al punto crítico como de bifurcación asimétrica^{2,3} y las condiciones (34) y (35) aseguran que los coeficientes de primer orden de los desarrollos sean distintos de cero. Podemos observar que en el caso que $V_i'^c \equiv 0$ las últimas dos condiciones se reducen a $V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} \neq 0$.

Caso III: $\alpha_1 = 2/3$, $\beta_1 = 1/3$ y $\gamma_1 = 1/3$

Ecuación de equilibrio

Reemplazando $\alpha_1 = 2/3$ y $\beta_1 = 1/3$ en la ecuación de equilibrio (7) y luego de reagrupar por potencias de ε obtenemos la siguiente expresión

$$\left[V_{ij}^c q_{j1} \right] \varepsilon^{\frac{1}{3}} + \left[\lambda_1 V_i'^c + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \right] \varepsilon^{\frac{2}{3}} + O(\varepsilon) = 0 \quad (36)$$

Reteniendo el término principal obtenemos la ecuación

$$V_{ij}^c q_{j1} = 0 \quad (37)$$

que nos permite expresar a q_{j1} como

$$q_{j1} = k_1 x_{jc} \quad (38)$$

con x_{jc} la dirección crítica.

Ecuación de estabilidad

La ecuación de estabilidad (5) para los valores de $\alpha_1 = 2/3$, $\beta_1 = \gamma_1 = 1/3$ resulta

$$\left[V_{ij}^c x_{j1} + V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \right] \varepsilon^{\frac{1}{3}} + \left[\lambda_1 V_{ij}^c x_{jc} + V_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} \right] \varepsilon^{\frac{2}{3}} + O(\varepsilon) = 0$$

Tomando el término principal, obtenemos la siguiente ecuación para x_{j1}

$$V_{ij}^c x_{j1} = -V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \quad \text{con } x_{11} = 0$$

Reemplazando q_{j1} por (38) y teniendo en cuenta que k_1 debe ser distinto de cero, tomamos $z_{j1} = \frac{1}{k_1} x_{j1}$ y escribimos la ecuación anterior de la siguiente manera

$$V_{ij}^c z_{j1} = -V_{ijk}^c x_{jc} x_{kc} \quad \text{con } z_{11} = 0 \quad (39)$$

que nos permite calcular z_{j1} siempre que el miembro derecho sea ortogonal a la dirección crítica x_{ic} . Por lo tanto necesitamos

$$V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} = 0 \quad (40)$$

y la expresión para x_{j1} queda

$$x_{j1} = k_1 z_{j1} \quad (41)$$

Ecuación de equilibrio contraída

Introducimos α_1 y β_1 en la ecuación de equilibrio contraída (12) y reemplazando q_{j1} por (38)

$$\begin{aligned} & \left[k_1 \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} x_{jc}}_{=0} \right] \varepsilon^{\frac{1}{3}} + \left[\lambda_1 \underbrace{V_i'^c x_{ic}}_{=0} + \frac{k_1^2}{2!} \underbrace{V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc}}_{=0} \right] \varepsilon^{\frac{2}{3}} \\ & + \left[\dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 k_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + \frac{k_1^3}{3!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{4}{3}}) = 0 \end{aligned} \tag{42}$$

donde el primer término es nulo por la ecuación de estabilidad crítica del sistema perfecto. Analizando el término siguiente, teniendo en cuenta la condición (40) resulta una ecuación en la cual considerando λ_1 distinto de cero, necesitamos

$$V_i'^c x_{ic} = 0 \tag{43}$$

de lo contrario obtendríamos una ecuación inconsistente. Luego, el término principal de la ecuación de equilibrio contraída resulta el asociado al exponente 1.

En este caso, la ecuación obtenida resulta incompleta si no consideramos los aportes de segundo orden debido a que λ_2 y q_{j2} estarán asociado a las potencias 1 y 2/3 respectivamente. Sin embargo, podemos resolver este problema escribiendo el aporte de segundo orden en términos de los coeficientes de primer orden resultando el término de la forma

$$V_{ijk}^c x_{ic} y_{j1} q_{k1} \tag{44}$$

con y_{j1} es solución del sistema

$$V_{ij}^c y_{j1} = -\lambda_1 V_i'^c - \frac{1}{2} V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \quad \text{con } y_{11} = 0 \tag{45}$$

Esto nos permite escribir a y_{j1} como

$$y_{j1} = \lambda_1 u_{j1} + k_1^2 v_{j1} \tag{46}$$

donde u_{j1} y v_{j1} satisfacen

$$\begin{aligned} V_{ij}^c u_{j1} &= -V_i'^c & \text{con } u_{11} &= 0 \\ V_{ij}^c v_{j1} &= -\frac{1}{2} V_{ijk}^c x_{jc} x_{kc} & \text{con } v_{11} &= 0 \end{aligned}$$

La justificación del término (44) está desarrollada en el apéndice. Reemplazando q_{j1} por (38) y y_{j1} por (45) en la ecuación obtenida a partir del término principal de (42) más el término (44) nos da la siguiente ecuación

$$k_1^3 \left(\frac{1}{3!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} + V_{ijk}^c x_{ic} v_{j1} x_{kc} \right) + \lambda_1 k_1 \left(V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{ic} u_{j1} x_{kc} \right) + \dot{V}_i^c x_{ic} = 0 \tag{47}$$

Ecuación de estabilidad contraída

En la ecuación de estabilidad contraída reemplazando q_{j1} por (38), resulta

$$\left[\underbrace{V_{ij}^c x_{ic} x_{j1}}_{=0} + k_1 \underbrace{V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc}}_{=0} \right] \varepsilon^{\frac{1}{3}} + \left[\lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + k_1 V_{ijk}^c x_{ic} x_{j1} x_{kc} \right. \\ \left. + \frac{k_1^2}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \right] \varepsilon^{\frac{2}{3}} + O(\varepsilon) = 0 \quad (48)$$

donde el primer término es nulo por la ecuación de estabilidad crítica del sistema perfecto y la condición (40). Entonces, tomamos el término siguiente al cual le agregamos el término correspondiente a los aportes de segundo orden (ver apéndice)

$$V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} y_{k1}$$

con y_{k1} definido en (45) resulta la siguiente ecuación

$$\lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + k_1^2 V_{ijk}^c x_{ic} z_{j1} x_{kc} + \frac{k_1^2}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} y_{k1} = 0 \quad (49)$$

Reemplazando y_{j1} por (46) despejamos λ_1

$$k_1^2 \left(V_{ijk}^c x_{ic} z_{j1} x_{kc} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} v_{k1} \right) \\ + \lambda_1 \left(V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} u_{k1} \right) = 0 \quad (50)$$

Para obtener k_1 y λ_1 a partir de (47) y (50) es necesario satisfacer las condiciones

$$\dot{V}_i^c x_{ic} \neq 0 \quad (51)$$

$$3V_{ijk}^c x_{ic} z_{j1} x_{kc} + V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \neq 0 \quad (52)$$

$$V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} u_{k1} \neq 0 \quad (53)$$

$$V_{ijk}^c x_{ic} z_{j1} x_{kc} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} v_{k1} \neq 0 \quad (54)$$

finalmente q_{j1} de (38) y x_{j1} por medio de (41). Las condiciones (40), (43) y (51) caracterizan a una bifurcación simétrica^{2,3} y las condiciones (52)-(54) son necesarias para que los coeficientes λ_1 y q_{j1} sean distintos de cero. Si bien las derivadas terceras pueden ser distintas de cero, frecuentemente debido a simetrías del sistema, las derivadas terceras resultan idénticamente nulas y en estos casos los términos agregados provenientes de las ecuaciones de segundo orden son nulos y las últimas tres condiciones se reducen a $V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \neq 0$.

Los restantes casos se analizan en forma similar resultando el caso $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = \gamma_1 = 1/2$ correspondiente a un punto límite y el $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1/3$ a un punto de trifurcación. Finalmente, habiendo determinado las condiciones para cada uno de los casos; debido a propiedades particulares del potencial, las condiciones necesarias de los casos analizados se simplifican considerablemente. En la Tabla III presentamos un resumen que si bien no incluye todos los casos, permite determinar los más frecuentes.

Punto crítico	Punto límite	Punto límite	Bif. asim.	Bif. sim.	Trif.
α_1	1	1	1/2	2/3	1/3
β_1	1	1/2	1/2	1/3	1/3
γ_1	1	1/2	1/2	1/3	1/3
$V_i^c x_{ic}$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
$V_i^{lc} x_{ic}$	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
$V_{ij}^c x_{ic} x_{jc}$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$
$V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc}$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$
$V_{ijk}^{lc} x_{ic} x_{jc} x_{kc}$					$\neq 0$
$V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc}$		$\neq 0$		$\neq 0$	$\neq 0$

Tabla III

CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un método de cálculo para evaluar la sensibilidad de problemas de ingeniería caracterizados por problemas de valores propios. En particular, se han estudiado problemas de estabilidad estructural, donde el problema de valores propios representa un estado crítico de la estructura, en el que su estabilidad cambia. La sensibilidad se ha investigado con respecto a un segundo parámetro de control ε (típicamente una imperfección) lo que en términos generales conduce a un problema singular para $\varepsilon = 0$. En método propuesto emplea una técnica de perturbaciones singulares; esta es una técnica analítica aproximada en la que las variables que definen el estado crítico se expanden en función de una serie de ε con exponentes fraccionarios inicialmente desconocidos.

El aspecto central discutido en este trabajo es la obtención de los exponentes de las series, que inicialmente son desconocidos. Una posibilidad sería barrer numéricamente todas las posibilidades y emplear un procedimiento de prueba y error para identificar aquellos que producen la solución menos degenerada⁷. Este procedimiento resultaría extremadamente costoso en sistemas de múltiples grados de libertad.

En lugar de ello, se ha identificado el conjunto de exponentes posibles para un potencial del cuarto orden. Finalmente, se han representado esas posibilidades en un espacio dado por los exponentes, que generan planos. Las intersecciones de esos planos

marcan valores de los exponentes que generan ecuaciones con dos o más términos en el esquema de perturbaciones.

Los exponentes de las expansiones de sensibilidad que se determinan por esta vía son mucho más que un simple esquema de cálculo. En este trabajo, se muestra que a partir del empleo de esos exponentes y de la subsiguiente evaluación de coeficientes de la serie es posible obtener una clasificación de estados críticos a partir de su sensibilidad. Esta clasificación contiene los estados que se identifican tradicionalmente en la teoría de estabilidad elástica (puntos límites y bifurcaciones) e incluye además trifurcaciones. La clasificación coincide también con la que genera la teoría de catástrofes¹⁵.

La metodología propuesta se ha limitado a sensibilidad de primer orden, y en este sentido es consistente con la teoría de catástrofes. Es posible extender el cálculo para encontrar sensibilidades de orden superior para cada tipo de estado crítico que se ha discutido, pero eso escapa los límites de esta presentación. Tampoco se han considerado estados críticos coincidentes, en los cuales se produce interacción de modos de pandeo.

El esquema de cálculo de sensibilidad y las clasificaciones que se derivan de ella se han presentado en contexto de estabilidad de estructuras pero pueden ser de interés en otras áreas de la mecánica aplicada.

APÉNDICE

Agregando un término a los desarrollos (6) con $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 2/3$ y $\gamma_1 = 2/3$ a partir de la ecuación de equilibrio obtenemos

$$V_{ij}^c q_{j2} = - \left(\lambda_1 V_i'^c + \frac{1}{2} V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \right)$$

que nos permite escribir a q_{j2} como

$$q_{j2} = k_2 x_{jc} + y_{j1} \quad (55)$$

donde y_{j1} es solución de

$$V_{ij}^c y_{j1} = - \left(\lambda_1 V_i'^c + \frac{1}{2} V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \right) \quad \text{con } y_{11} = 0 \quad (56)$$

A partir de la ecuación de equilibrio contraída

$$\left[\underbrace{\lambda_1 V_i'^c x_{ic} + \frac{1}{2} V_{ijk}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1}}_{=0} + \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} q_{j2}}_{=0} \right] \varepsilon^{\frac{2}{3}} + \left[\dot{V}_i^c x_{ic} + \frac{1}{3!} V_{ijkl}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} q_{l1} \right. \\ \left. + \lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} q_{j1} + \lambda_2 V_i'^c x_{ic} + V_{ijk}^c x_{ic} q_{j2} q_{k1} \right] \varepsilon^1 + O(\varepsilon^{\frac{4}{3}}) = 0$$

se tiene que el término asociado a $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ es nulo por las condiciones (40)-(43) y la ecuación de estabilidad crítica del sistema perfecto. Analizando el término asociado a ε^1 reemplazando q_{j1} por (38) y q_{j2} por (55) obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 k_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + \frac{k_1^3}{3!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} + k_1 V_{ijk}^c x_{ic} y_{j1} x_{kc} \\ + k_1 k_2 \underbrace{V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc}}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{V_i^c x_{ic}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

donde los dos últimos términos son nulos por las condiciones (40) y (43). Por lo tanto, si comparamos la ecuación anterior con la obtenida a partir del término asociado a ε^1 en la ecuación de equilibrio contraída de primer orden (42) vemos que el único aporte es $k_1 V_{ijk}^c x_{ic} y_{j1} x_{kc}$ que fue el término considerado en (44) y que dio lugar a la ecuación (47).

Por otro lado, al plantear la ecuación de estabilidad contraída obtenemos

$$\left[\lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{j1} q_{k1} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} q_{k2} \right. \\ \left. + \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} x_{j2}}_{=0} \right] \varepsilon^{\frac{2}{3}} + O(\varepsilon^1) = 0$$

donde, reemplazando q_{j2} por (55) y comparando con la ecuación obtenida a partir de la ecuación de estabilidad contraída de primer orden (48) observamos que el único término que se agrega es $V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} y_{k1}$ que fue el que se incorporó para obtener la ecuación (50).

REFERENCIAS

1. W.T. Koiter, "On the Stability of Elastic Equilibrium", Thesis doctoral, en danés, Delft, H.J. Paris, Amsterdam, (1945).
2. J.G.A. Croll y A.C. Walker, "Elements of Structural Stability", McMillan, London, (1972).
3. J.M.T. Thompson y G.W. Hunt, "A General Theory of Elastic Stability", Wiley, London, (1973).
4. A.H. Huseyin, "Non-Linear Theory of Elastic Stability", Noordhoff, Leyden, The Netherlands, (1975).
5. M.S. El Naschie, "Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach", McGraw-Hill, London, (1990).
6. L.A. Godoy, "Theory of Elastic Stability: Analysis and Sensitivity", McGraw-Hill, New York, (1997).
7. L.A. Godoy y D.T. Mook, "Higher-Order Sensitivity to Imperfections in Bifurcation Buckling Analysis", *Int. J. Solids Structures*, Vol. **33**, (4), pp. 511-520, (1995).
8. R. Gallagher, "Perturbation Procedures in Nonlinear Finite Element Structural Analysis, In: Computational Mechanics", *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **461**, pp. 75-90, Springer-Verlag, (1975).
9. P. Wriggers y J.C. Simo, "A General Procedure for the Direct Computation of Turing and Bifurcation Points", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. **30**, pp. 155-17, (1990).

10. F.G. Flores y L.A. Godoy, "Elastic Post-Buckling Analysis Via Finite Element and Perturbation Techniques, Part 1: Formulation", *Int. J. Num. Meth. in Engng*, Vol. **33**, pp. 1775-1794, (1992).
11. E. Riks, "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **15**, pp. 529-551, (1979).
12. E. Oñate y T.M. William, "A Critical Displacement Approach for Predicting Structural Instability", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, Vol. **134**, pp. 135-161, (1996).
13. A.B. Kritskii, "Construction of Branching Solutions in a Study of the Stability of Thin-Walled Structures", *International Applied Mechanics*, Vol. **32**, 5, pp. 58-68, (1996).
14. J.G. Simmonds y J.E. Mann, "A First Look at Perturbation Theory", Robert E. Krieger Publishing Co., Florida, (1986).
15. T. Poston y I. Stewart, "Catastrophe Theory", Pitman, New York, (1976).