

TRATAMIENTO DE ELEMENTOS RECTOS Y CURVOS DE SECCION VARIABLE POR METODOS MATRICIALES

G. BRAVO

y

A. MARTIN

*E.S.I.I. de Sevilla,
Avda. Reina Mercedes s/n.
41012 Sevilla, España.*

RESUMEN

En este trabajo se presenta la formulación necesaria para el tratamiento de elementos de directriz recta o circunferencial con características geométricas e inerciales variables según la directriz, así como de las cargas equivalentes, dentro del ámbito del Análisis Matricial de Estructuras.

SUMMARY

In this work, the necessary formulation to analyse space frameworks with straight or circular curved members of variable cross section is presented. Equivalent concentrated forces are also determined. Matrix methods have been used.

INTRODUCCION

El diseño de estructuras es una de las ramas fundamentales de la ingeniería. Entre los tipos estructurales que esta rama estudia, uno de los más importantes es, sin duda, el constituido por las estructuras de barras.

El análisis de estas estructuras es bien conocido, ya que las ideas en que se basa se establecieron a finales del siglo XIX.

La aparición de los ordenadores potenció el desarrollo de los llamados métodos matriciales de análisis^{1,2}. Estos métodos adaptan las ideas clásicas al funcionamiento del ordenador, y por esta razón su uso está tan difundido en nuestros días.

Entre las estructuras de barras, las más utilizadas en edificación son las estructuras porticadas planas, compuestas por barras rectas, prismáticas y de sección constante. Sin embargo, en las construcciones industriales, es muy frecuente encontrar estructuras con características que se apartan de las anteriormente indicadas. Entre éstas características, las más importantes son:

Recibido: Agosto 1987

- La espacialidad de las mismas, determinada por la forma geométrica y las acciones actuantes.
- Aparición de elementos curvos. Arcos circulares, parabólicos, etc.
- Elementos de sección variable, con los que se pretende buscar una adecuación resistente y en definitiva un diseño óptimo.

Para analizar las estructuras de barras se utilizan programas de ordenador que implementan, fundamentalmente, de entre los métodos matriciales, el método directo de la rigidez. Los paquetes estándar para este cometido están concebidos, generalmente, para las estructuras usuales en edificación, modeladas mediante pórticos ortogonales planos. Cuando el problema es más complejo, es preciso acudir a programas de elementos finitos³, en los que las estructuras de barras son un caso particular.

Normalmente, los elementos curvos en una estructura se sustituyen por una serie de elementos rectos. Las desventajas de este cambio son el gran incremento en el número de grados de libertad de la estructura y la aproximación que trae consigo en el análisis. La primera de estas desventajas acarrea un incremento en el tiempo de ejecución, que como se sabe no es lineal sino cuadrático. Además, y esto es más importante hoy en día que el tiempo de C.P.U., se incrementa la información que hay que suministrar al ordenador y el tiempo que hay que dedicar a prepararla. Por otra parte, podría haber problemas con la capacidad de memoria limitada de los ordenadores, aunque ésto se puede decir que no constituye ya un inconveniente.

En segundo lugar, la pérdida de exactitud que supone tratar las estructuras con elementos curvos y/o con sección variable mediante su fraccionamiento en elementos rectos de sección constante, obliga a realizar, en algunos casos, varios análisis con distintas discretizaciones al objeto de acotar el error cometido.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, resulta de gran interés desarrollar aplicaciones informáticas que permitan el análisis de estructuras formadas por barras con características especiales^{5,7}, como las que se presentan en las construcciones industriales.

La gama de elementos diferentes que se pueden presentar en las estructuras que nos ocupan es amplísima. En este trabajo se han considerado dos tipos. Barras prismáticas de directriz recta y sección variable y barras de directriz circunferencial y sección variable. Los elementos curvos que aparecen en las estructuras industriales no siempre tienen radio de curvatura constante, pero éste varía con suavidad en la mayor parte de los casos. Esto posibilita una buena aproximación de los mismos mediante tramos circulares.

Para cada uno de estos tipos de barra se desarrolla la correspondiente matriz de rigidez y se detalla la transformación de coordenadas, considerando siempre que se trata de elementos espaciales.

También se han considerado los tipos de acciones más frecuentes que pueden encontrarse actuando sobre los elementos.

ELEMENTOS DE DIRECTRIZ RECTA Y SECCION CONSTANTE O VARIABLE

Los elementos considerados serán piezas prismáticas, cuya sección transversal puede variar con la coordenada sobre la directriz.

Sistema de ejes locales. Criterios y Signos.

En la Figura 1 se representa la dirección y sentido del sistema de ejes propio del elemento.

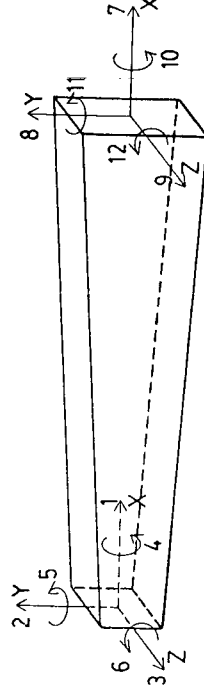


Figura 1.

Los ejes de este sistema cumplen las siguientes especificaciones:

- EJE OX:** Coincide con la directriz del elemento. Sentido positivo el que apunta del nudo origen al extremo.
- EJE OY:** El obtenido al girar 90° en sentido antihorario al eje OX, cuando se ve al elemento de modo que el nudo origen queda a la izquierda del observador.
- EJE OZ:** Perpendicular a los anteriores y formando un triedro a derechas con los mismos.

Matriz de Rigidez del elemento.

Esta matriz relaciona los movimientos de los nudos extremos de una barra con las fuerzas aplicadas a los mismos en la forma:

$$P = K\delta$$

En la que:

δ es el vector de movimientos y se expresa por:

$$\delta^T = \{u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, u_{4i}, u_{5i}, u_{6i}, u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, u_{4j}, u_{5j}, u_{6j}\}$$

R es el vector de fuerzas o esfuerzos definido por la expresión:

$$R^T = \{F_{1i}, F_{2i}, F_{3i}, F_{4i}, F_{5i}, F_{6i}, F_{1j}, F_{2j}, F_{3j}, F_{4j}, F_{5j}, F_{6j}\}$$

El subíndice numérico hace referencia al grado de libertad al que corresponde el movimiento o acción considerada, véase Figura 1. Los subíndices i, j se refieren al nudo origen y extremo respectivamente.

La determinación de los coeficientes de rigidez que constituyen la matriz, se realiza usando la definición de los mismos. Un elemento de la matriz de rigidez K_{ij} representa la fuerza que aparece en la coordenada i -ésima, cuando se comunica un movimiento unidad en la coordenada j -ésima manteniendo a cero todos los demás. Se van a considerar, por tanto, los estados definidos por un movimiento unidad según los distintos grados de libertad y , para cada uno de ellos, se calculan las fuerzas que determinan dichos estados.

En el cálculo de los coeficientes de rigidez, se hace uso del teorema de los trabajos virtuales con las consideraciones siguientes:

- 1) El eje OY local de coordenadas es de simetría de la sección. Por tanto OY y OZ son principales de inercia.
- 2) Siempre se ha despreciado la deformación debida al cortante.

Conviene en este punto, antes de presentar las expresiones, realizar las siguientes convenciones de notación:

L es la longitud del elemento.

$I_g(x)$ es la ley de variación de alguna de las características geométricas de la sección, área o momento de inercia de la misma, con la coordenada sobre la directriz.

Se define entonces:

$$I_0(I_g) = \int_0^L \frac{dx}{I_g(x)}$$

$$I_1(I_g) = \int_0^L \frac{x dx}{I_g(x)}$$

$$I_2(I_g) = \int_0^L \frac{x^2 dx}{I_g(x)}$$

Y en general:

$$I_n(I_g) = \int_0^L \frac{x^n dx}{I_g(x)}$$

Movimiento unidad según el grado de libertad 1 y nulos los demás.

$$K_{11} = \frac{E}{I_0(A)}$$

$$K_{71} = -K_{11}$$

Movimiento unidad según el grado de libertad 2.

$$K_{22} = \frac{E I_0(I_z)}{I_0(I_z)I_2(I_z) - I_1^2(I_z)}$$

$$K_{62} = \frac{E I_1(I_z)}{I_0(I_z)I_2(I_z) - I_1^2(I_z)}$$

$$K_{82} = -K_{22} \quad ; \quad K_{12,2} = K_{22} L - K_{62}$$

Movimiento unidad según el grado de libertad 3.

$$K_{33} = \frac{E I_0(I_y)}{I_0(I_y)I_2(I_y) - I_1^2(I_y)}$$

$$K_{53} = \frac{-E I_1(I_y)}{I_0(I_y)I_2(I_y) - I_1^2(I_y)}$$

$$K_{93} = -K_{33} \quad ; \quad K_{11,3} = -K_{53} - K_{33} L$$

Giro unidad según el grado de libertad 4.

$$K_{44} = \frac{G}{I_0(J)}$$

$$K_{10,4} = -K_{44}$$

donde J es el momento de rigidez a torsión.

Giro unidad según el grado de libertad 5.

$$K_{35} = \frac{-E I_1(I_y)}{I_0(I_y)I_2(I_y) - I_1^2(I_y)}$$

$$K_{55} = \frac{E I_2(I_y)}{I_0(I_y)I_2(I_y) - I_1^2(I_y)}$$

$$K_{95} = -K_{35} \quad ; \quad K_{11,5} = -K_{55} - K_{35} L$$

Giro unidad según el grado de libertad 6.

$$K_{26} = \frac{E I_1(I_z)}{I_0(I_z)I_2(I_z) - I_1^2(I_z)}$$

$$K_{66} = \frac{E I_2(I_z)}{I_0(I_z)I_2(I_z) - I_1^2(I_z)}$$

$$K_{86} = -K_{26} \quad ; \quad K_{12,6} = -K_{66} + K_{26} L$$

Matriz de transformación de coordenadas.

Si se conocen los cosenos directores de cada uno de los ejes locales respecto de los ejes globales (Figura 3), la expresión matricial que transforma un vector de coordenadas locales a globales será:

$$\begin{vmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{vmatrix}$$

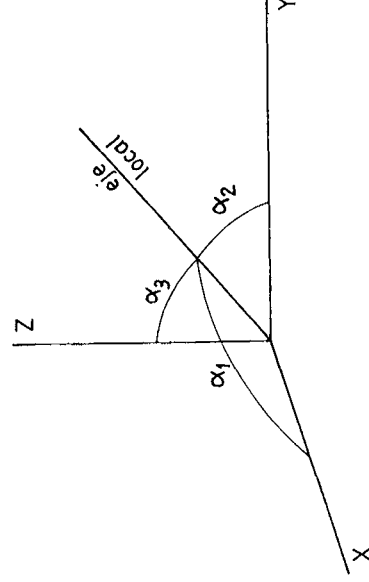


Figura 3.

Siendo $\{x, y, z\}$ el sistema de ejes locales, y L_{ij} es el coseno del ángulo α_i que forma el eje local j (al x corresponde el 1, etc.).

Si designamos a la matriz de la última expresión por L , la matriz de transformación completa, teniendo en cuenta todos los grados de libertad del elemento será:

$$T = \begin{vmatrix} L & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & L & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & L & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & L \end{vmatrix}$$

Para determinar la posición exacta de una barra respecto a un sistema general de coordenadas $\{X, Y, Z\}$, se tienen los ángulos que forman los ejes locales de la barra con los ejes globales.

La definición de los nudos que conecta un elemento, a través de sus coordenadas, proporciona los cosenos directores del eje que coincide con la directriz del elemento, pero es necesaria una información adicional para definir perfectamente el triedro local. Se elige con este fin el ángulo β , que determina la rotación de los ejes locales alrededor del eje directriz, desde la posición de los mismos en que el eje y estuviese contenido en el plano xZ .

Al eje ficticio, desde cuya posición se mide β , se le denomina y' , y cumple la condición de tener una proyección positiva sobre el eje Z global.

Se toma como sentido positivo para este ángulo, el horario cuando se mira desde el extremo i del elemento hacia el j .

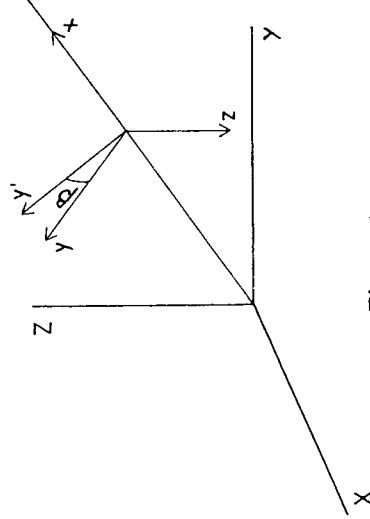


Figura 4.

Hay una indeterminación en esta definición que corresponde al caso de una barra paralela al eje Z global de coordenadas.

Para salvar ésta, se definirá este caso mediante el ángulo medido desde la dirección negativa del eje Y , cuando el sentido del eje x local coincide con el positivo del Z global. Cuando está dirigido según $-Z$, se medirá desde la dirección positiva del eje Y . Estas dos situaciones se han representado en las Figuras 5 y 6 respectivamente.

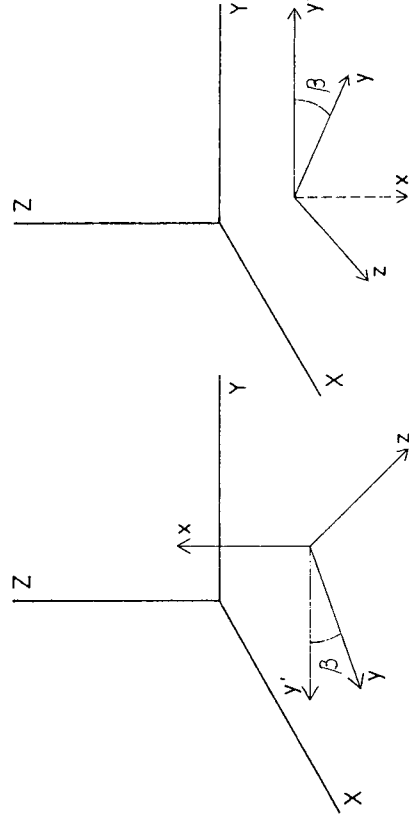


Figura 5.

Figura 6.

La expresión de los cosenos directores de los ejes locales en función de las coordenadas de los nudos extremos del elemento y del ángulo β se presenta a continuación.

Si se define:

$$\begin{aligned} DX &= X_j - X_i \\ DY &= Y_j - Y_i \\ DZ &= Z_j - Z_i \end{aligned} \quad \begin{aligned} DXY &= \sqrt{DX^2 + DY^2} \\ L &= \sqrt{DX^2 + DY^2 + DZ^2} \end{aligned}$$

los elementos de la matriz L , L_{ij} , serán:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{DX}{L} ; L_{21} = \frac{DY}{L} ; L_{31} = \frac{DZ}{L} \\ L_{12} &= \frac{DY}{DXY} \operatorname{sen} \beta - \frac{DZ}{L} \frac{DX}{DXY} \cos \beta \\ L_{22} &= -\frac{DX}{DXY} \operatorname{sen} \beta - \frac{DZ}{L} \frac{DY}{DXY} \cos \beta \\ L_{32} &= \frac{DXY}{L} \cos \beta \\ L_{13} &= \frac{DY}{DXY} \cos \beta + \frac{DZ}{L} \frac{DX}{DXY} \operatorname{sen} \beta \\ L_{23} &= -\frac{DX}{DXY} \cos \beta + \frac{DZ}{L} \frac{DY}{DXY} \operatorname{sen} \beta \\ L_{33} &= -\frac{DXY}{L} \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

En el caso de barra paralela a OZ , las expresiones son:

$$\begin{aligned} L_{11} &= 0 ; L_{21} = 0 ; L_{31} = \frac{DZ}{L} \\ L_{12} &= \operatorname{sen} \beta ; L_{22} = -\operatorname{SIG} \cos \beta ; L_{32} = 0 \\ L_{13} &= \cos \beta ; L_{23} = \operatorname{SIG} \operatorname{sen} \beta ; L_{33} = 0 \end{aligned}$$

donde

$$\operatorname{SIG} = \frac{DZ}{|DZ|}$$

Matriz de rigidez elemental en coordenadas globales.

La obtención de esta matriz se reduce al doble producto matricial:

$$K = TK'T^T$$

ELEMENTOS DE DIRECTRIZ CIRCUNFERENCIAL Y SECCION TRANSVERSAL CONSTANTE O VARIABLE

El sistema de ejes del elemento es el representado en la Figura 7.

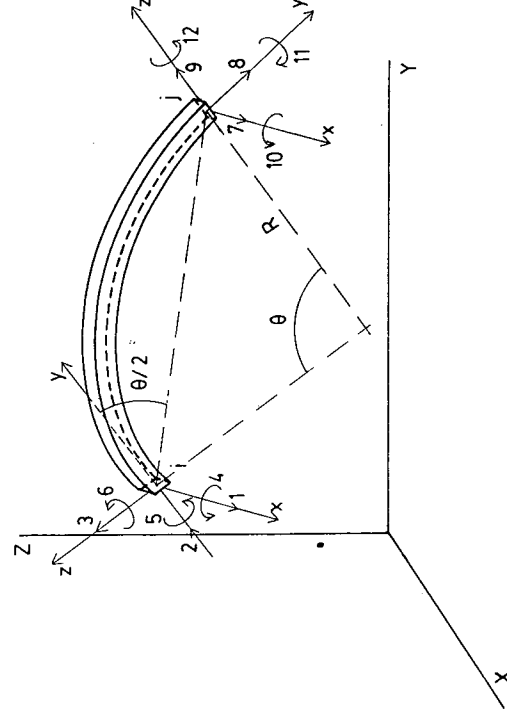


Figura 7.

En realidad se trata de dos sistemas de ejes, uno en cada extremo del elemento. Cada uno de estos sistemas cumple las siguientes especificaciones:

- El eje oy tiene la dirección de la tangente a la directriz, y su sentido positivo es el que apunta desde el extremo i hacia el j del elemento.
- El eje oz tiene la dirección radial, y su sentido positivo es el que va dirigido desde el centro de curvatura de la directriz hacia el extremo correspondiente del elemento.
- El eje ox tiene la dirección de la binormal y se toma con sentido positivo el que determina como triedro a derechas al sistema.

En la Figura también se han representado las direcciones y sentidos de los distintos grados de libertad.

El ángulo θ , ángulo abarcado por el arco, y el radio R , son dos parámetros que se van a utilizar ampliamente en los siguientes apartados.

Matriz elemental de rigidez expresada en el sistema de ejes del elemento.

Introduccion.

Se determinan a continuación los coeficientes que componen la matriz de rigidez de un elemento de directriz circular y sección constante o variable. En esta determinación se hace uso del teorema de los trabajos virtuales con las siguientes consideraciones:

- 1) El eje local de coordenadas es de simetría de la sección. Por tanto ox y oz son principales de inercia.
- 2) Los elementos que se consideran tienen un radio de curvatura grande comparado con las dimensiones de la sección transversal de los mismos.
- 3) Siempre se ha despreciado la deformación debida al cortante. En cambio, se ha considerado la deformación debida al axil.

Las leyes de variación de las características geométricas de la sección pueden expresarse indistintamente en función de la coordenada s , longitud medida sobre la directriz desde el nudo i , o del ángulo α , ambos representados en la Figura 8.

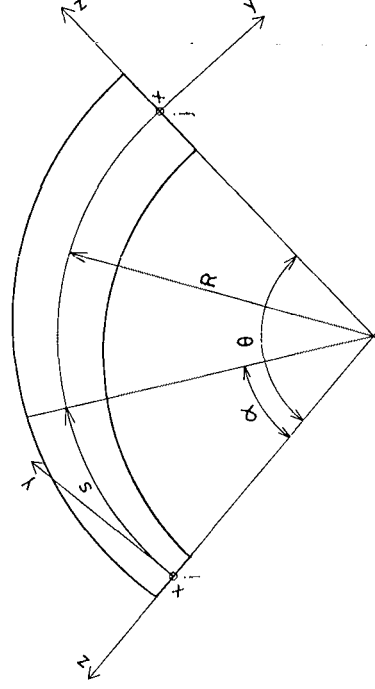


Figura 8.

Determinación de la Matriz de rigidez.

En el caso de elementos curvos resulta muy conveniente utilizar un procedimiento indirecto para el cálculo de los coeficientes de rigidez K_{ij} . Este procedimiento es el siguiente:

- a) Se obtiene la matriz de flexibilidad del elemento $[f]_i$. Los coeficientes de flexibilidad, que constituyen la matriz, se derivan de la definición de los mismos. El coeficiente f_{km} es el movimiento según el grado de libertad k -ésimo que aparece al aplicar una carga unidad según m , manteniendo empotrado el extremo j del elemento. La expresión general de estos coeficientes, aplicando el P.T.V., resulta:

$$f_{km} = \int_S \left[\left(\frac{M_k M_m}{EI_x} \right)_{yz} + \left(\frac{M_k M_m}{EI_z} \right)_{xy} + \left(\frac{N_k N_m}{EA} \right)_y + K' \left(\frac{V_k V_m}{GA} \right)_x + K'' \left(\frac{V_k V_m}{GA} \right)_z + \left(\frac{T_k T_m}{GJ} \right)_{xz} \right] ds$$

En donde la integración está extendida a la longitud S del elemento. Los esfuerzos subindicados con k y m son, respectivamente, los que aparecen en un

estado en el que se aplica una fuerza unidad según el grado de libertad k y m . Esta matriz satisface la relación:

$$\delta_i = [f]_i P_i$$

que premultiplicando por $[f]_i^{-1}$ resulta:

$$P_i = [f]_i^{-1} \delta_i$$

- b) La relación de equilibrio estático, entre las fuerzas aplicadas a los extremos i y j del elemento, puede expresarse matricialmente como sigue:

$$P_j = [S] P_i$$

en donde $[S]$ es la matriz de equilibrio del elemento.

- c) Finalmente, la matriz de rigidez del elemento, en función de las anteriores, resulta:

$$\begin{vmatrix} P_i \\ - \\ P_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [f]_i^{-1} & [f]_i^{-1} [S]^T \\ [S] [f]_i^{-1} & [S] [f]_i^{-1} [S]^T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_i \\ - \\ \delta_j \end{vmatrix}$$

Para un elemento de directriz circunferencial la matriz de equilibrio estático es:

$$S = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen}\theta & -\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R(1 - \cos\theta) & R \text{sen}\theta & -1 & 0 & 0 \\ R(1 - \cos\theta) & 0 & 0 & 0 & -\cos\theta & \text{sen}\theta \\ -R \text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}$$

Y la matriz de flexibilidad $[f]_i$ puede expresarse formalmente por:

$$[f]_i = \begin{vmatrix} f_{11} & 0 & 0 & 0 & f_{51} & f_{61} \\ 0 & f_{22} & f_{32} & f_{42} & 0 & 0 \\ 0 & f_{32} & f_{33} & f_{43} & 0 & 0 \\ 0 & f_{42} & f_{43} & f_{44} & 0 & 0 \\ f_{51} & 0 & 0 & 0 & f_{55} & F_{65} \\ f_{61} & 0 & 0 & 0 & f_{65} & F_{66} \end{vmatrix}$$

Si se conviene en llamar:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^\theta \frac{d\alpha}{I_{gg}(\alpha)} & ; & \quad A = \int_0^\theta \frac{\sin^2 \alpha}{I_{gg}(\alpha)} d\alpha \\
 B &= \int_0^\theta \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{I_{gg}(\alpha)} d\alpha & ; & \quad C = \int_0^\theta \frac{(\cos \alpha - 1) \cos \alpha}{I_{gg}(\alpha)} d\alpha \\
 D &= \int_0^\theta \frac{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha}{I_{gg}(\alpha)} d\alpha & ; & \quad E = \int_0^\theta \frac{\sin 2\alpha}{I_{gg}(\alpha)} d\alpha \\
 F &= \int_0^\theta \frac{\cos^2 \alpha}{I_{gg}(\alpha)} d\alpha & ; & \quad G = \int_0^\theta \frac{\cos \alpha - 1}{I_{gg}(\alpha)} d\alpha \\
 H &= \int_0^\theta \frac{\sin \alpha}{I_{gg}(\alpha)} d\alpha
 \end{aligned}$$

donde $I_{gg}(\alpha)$ representa una ley de momento de inercia o de área a lo largo del elemento. Se tiene, para los coeficientes de flexibilidad:

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= \frac{R^3}{E} A(I_z) + \frac{R^3}{G} B(J) \\
 f_{51} &= \frac{R^2}{G} C(J) + \frac{R^2}{E} A(I_z) \\
 f_{61} &= \frac{R^2}{G} D(J) + \frac{R^2}{2E} E(I_z) \\
 f_{22} &= \frac{R}{E} F(A) + \frac{R^3}{E} B(I_x) \\
 f_{32} &= \frac{R^3}{E} D(I_x) - \frac{R}{2E} E(A) \\
 f_{42} &= \frac{R^2}{E} G(I_x) \\
 f_{33} &= \frac{R^3}{E} A(I_x) + \frac{R}{E} A(A) \\
 f_{43} &= -\frac{R^2}{E} H(I_x) \\
 f_{44} &= \frac{R}{E} I_1(I_x) \\
 f_{55} &= \frac{R}{G} F(J) + \frac{R}{E} A(I_z) \\
 f_{65} &= -\frac{R}{2G} E(J) + \frac{R}{2E} E(I_z) \\
 f_{66} &= \frac{R}{G} A(J) + \frac{R}{E} F(I_z)
 \end{aligned}$$

Aplicando el método anteriormente descrito se llega a que la matriz de rigidez responde a la expresión formal:

K_{11}	0	0	K_{51}	K_{61}	$-K_{11}$	0	0	$K_{11,1}$	$K_{12,1}$
K_{22}	K_{32}	K_{42}	0	0	0	K_{82}	K_{92}	0	0
K_{33}	K_{43}	K_{44}	0	0	0	K_{83}	K_{93}	0	0
			0	0	0	K_{84}	K_{94}	0	0
			K_{55}	K_{65}	$-K_{51}$	0	0	$K_{11,5}$	$K_{12,5}$
			K_{66}	$-K_{61}$	0	0	0	$K_{11,6}$	$K_{12,6}$
				K_{11}	0	0	0	$-K_{11,1}$	$-K_{12,1}$
					K_{88}	K_{89}	$K_{8,10}$	0	0
						K_{99}	$K_{9,10}$	0	0
							$K_{10,10}$	0	0
								$K_{11,11}$	$K_{11,12}$
									$K_{12,12}$

SIM

Figura 9.

en la que los coeficientes de rigidez, expresados en función de los de flexibilidad y de las dos cantidades:

$$W = \frac{f_{11}}{\left[(f_{11}f_{55} - f_{51}^2)(f_{11}f_{66} - f_{61}^2) - (f_{11}f_{65} - f_{51}f_{61})^2 \right]}$$

$$U = \frac{f_{22}}{\left[(f_{22}f_{33} - f_{32}^2)(f_{22}f_{44} - f_{42}^2) - (f_{22}f_{43} - f_{32}f_{42})^2 \right]}$$

son:

$$K_{11} = \frac{(f_{55}f_{66} - f_{65}^2)}{W}$$

$$K_{61} = \frac{(f_{51}f_{65} - f_{55}f_{61})}{W}$$

$$K_{51} = \frac{(f_{61}f_{65} - f_{51}f_{66})}{W}$$

$$K_{22} = \frac{(f_{33}f_{44} - f_{43}^2)}{U}$$

$$K_{32} = \frac{(f_{42}f_{43} - f_{32}f_{44})}{U}$$

$$K_{42} = \frac{(f_{32}f_{43} - f_{33}f_{42})}{U}$$

$$K_{82} = -K_{22} \cos\theta + K_{32} \operatorname{sen}\theta$$

$$K_{83} = -K_{32} \cos\theta + K_{33} \operatorname{sen}\theta$$

$$K_{84} = -K_{42} \cos\theta + K_{43} \operatorname{sen}\theta$$

$$K_{33} = \frac{(f_{22}f_{44} - f_{42}^2)}{U}$$

$$\begin{aligned}
K_{43} &= \frac{(f_{32}f_{42} - f_{22}f_{43})}{U} \\
K_{93} &= -K_{32} \operatorname{sen}\theta - K_{33} \operatorname{cos}\theta \\
K_{94} &= -K_{42} \operatorname{sen}\theta - K_{43} \operatorname{cos}\theta \\
K_{44} &= \frac{(f_{22}f_{33} - f_{32}^2)}{U} \\
K_{55} &= \frac{(f_{11}f_{66} - f_{61}^2)}{W} \\
K_{65} &= \frac{(f_{51}f_{61} - f_{11}f_{65})}{W} \\
K_{66} &= \frac{(f_{11}f_{55} - f_{51}^2)}{W} \\
K_{10,4} &= K_{42} R (1 - \operatorname{cos}\theta) + K_{43} R \operatorname{sen}\theta - K_{44} \\
K_{11,5} &= K_{51} R (1 - \operatorname{cos}\theta) - K_{55} \operatorname{cos}\theta + K_{65} \operatorname{sen}\theta \\
K_{11,6} &= K_{61} R (1 - \operatorname{cos}\theta) - K_{65} \operatorname{cos}\theta + K_{66} \operatorname{sen}\theta \\
K_{12,6} &= -K_{61} R \operatorname{sen}\theta - K_{65} \operatorname{sen}\theta - K_{66} \operatorname{cos}\theta \\
K_{92} &= -K_{22} \operatorname{sen}\theta - K_{32} \operatorname{cos}\theta \\
K_{10,2} &= R (1 - \operatorname{cos}\theta) K_{22} + R K_{32} \operatorname{sen}\theta - K_{42} \\
K_{10,3} &= R (1 - \operatorname{cos}\theta) K_{32} + R K_{33} \operatorname{sen}\theta - K_{43} \\
K_{11,1} &= R (1 - \operatorname{cos}\theta) K_{11} - K_{51} \operatorname{cos}\theta + K_{61} \operatorname{sen}\theta \\
K_{12,1} &= -R K_{11} \operatorname{sen}\theta - K_{51} \operatorname{sen}\theta - K_{61} \operatorname{cos}\theta \\
K_{12,5} &= -R K_{51} \operatorname{sen}\theta - K_{55} \operatorname{sen}\theta - K_{65} \operatorname{cos}\theta \\
K_{88} &= -K_{82} \operatorname{cos}\theta + K_{83} \operatorname{sen}\theta \\
K_{89} &= -K_{82} \operatorname{sen}\theta - K_{83} \operatorname{cos}\theta \\
K_{8,10} &= -K_{10,2} \operatorname{cos}\theta + K_{10,3} \operatorname{sen}\theta \\
K_{99} &= -K_{92} \operatorname{sen}\theta + K_{93} \operatorname{cos}\theta \\
K_{9,10} &= -K_{10,2} \operatorname{sen}\theta - K_{10,3} \operatorname{cos}\theta \\
K_{10,10} &= R (1 - \operatorname{cos}\theta) K_{10,2} + R K_{10,3} \operatorname{sen}\theta - K_{10,4}
\end{aligned}$$

$$K_{11,11} = R(1 - \cos\theta) K_{11,1} - K_{11,5} \cos\theta + K_{11,6} \sin\theta$$

$$K_{11,12} = -R K_{11,1} \sin\theta - K_{11,5} \sin\theta - K_{11,6} \cos\theta$$

$$K_{12,12} = -R K_{12,1} \sin\theta - K_{12,5} \sin\theta - K_{12,6} \cos\theta$$

Transformación de coordenadas.

La transformación ortogonal de los ejes (x, y, z) del elemento, con una orientación cualquiera, a los ejes globales, puede llevarse a cabo mediante las tres transformaciones sucesivas que se describen a continuación.

Primer paso: Los ejes del elemento $\{x, y, z\}$ se giran, alrededor de la línea recta que conecta los nudos extremos i y j , un ángulo β . Este giro hace que el arco pase a estar contenido en un plano vertical. El nuevo sistema de ejes, obtenido después de la rotación, se va a designar por $\{x_0, y_0, z_0\}$.

El eje x_0 es paralelo al plano XY y los ejes y_0 y z_0 están, naturalmente, contenidos en el plano vertical del arco. Esta transformación se ha representado en la Figura 10.

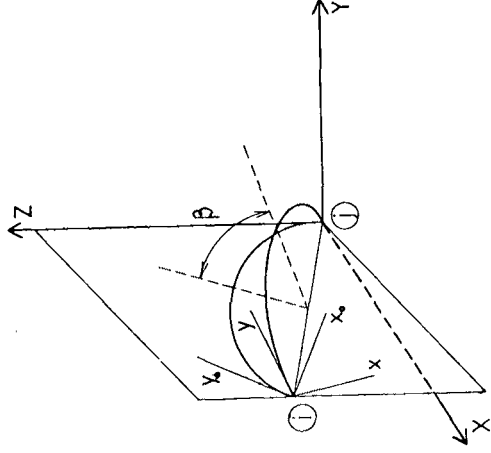


Figura 10.

La ecuación de esta rotación puede expresarse:

$$P_{xyz} = [t]_1 P_{x_0 y_0 z_0}$$

en la que:

$$[t]_1 = \begin{vmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} & -\operatorname{sen}\beta \cos\frac{\theta}{2} \\ \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} & (1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2}) & -\frac{1}{2}(1 - \cos\beta) \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\beta \cos\frac{\theta}{2} & -\frac{1}{2}(1 - \cos\beta) \operatorname{sen}\theta & (1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2}) \end{vmatrix}$$

Segundo paso: El nuevo sistema de ejes (x_s, y_s, z_s) tiene su eje y_s coincidente con la línea recta entre i y j , eje x_s horizontal coincidente con x_0 y eje z_s perpendicular a ambos. Esto puede conseguirse girando el anterior sistema x_0, y_0, z_0 alrededor de x_0 un ángulo $\theta/2$ hasta que el eje y_0 coincida con la línea comentada. La ecuación de transformación será:

$$P_{x_0y_0z_0} = [t]_2 P_{x_s y_s z_s}$$

donde

$$[t]_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} & \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \\ 0 & -\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{vmatrix}$$

Tercer paso: Los ejes auxiliares $\{x_s, y_s, z_s\}$ son transformados a ejes globales $\{X, Y, Z\}$. Esta transformación puede expresarse:

$$P_{x_s y_s z_s} = [t]_3 P_{XYZ}$$

$$[t]_3 = \begin{vmatrix} m_y/Q & -l_y/Q & 0 \\ l_y & m_y & n_y \\ -l_y n_y/Q & -m_y n_y/Q & 0 \end{vmatrix}$$

en la que l_y, m_y y n_y son los cosenos directores de la línea que une i con j . Expresadas en función de las coordenadas de los nudos i y j que conecta el elemento son:

$$l_y = \frac{x_j - x_i}{L} ; m_y = \frac{y_j - y_i}{L} ; n_y = \frac{z_j - z_i}{L}$$

y

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

además,

$$Q^2 = 1 - n_y^2$$

En definitiva, la transformación de los ejes globales $\{X, Y, Z\}$ a los locales $\{x, y, z\}$ puede expresarse en una sola ecuación como sigue:

$$P_{xyz} = [t]_1 P_{XYZ}$$

donde

$$[t]_i = [t]_1 [t]_2 [t]_3$$

Si designamos a los elementos que constituyen la matriz de transformación en el extremo i por

$$[t]_i = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix}$$

Sus valores son:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \frac{m_y}{Q} \cos\beta + \frac{l_y n_y}{Q} \operatorname{sen}\beta \\ t_{21} &= \frac{m_y}{Q} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\beta + l_y \left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{n_y}{Q} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\beta \right) \\ t_{31} &= \frac{l_y}{Q} \cos\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\beta - l_y \left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \frac{n_y}{Q} \cos\frac{\theta}{2} \cos\beta \right) \\ t_{12} &= -\frac{l_y}{Q} \cos\beta + \frac{m_y n_y}{Q} \operatorname{sen}\beta \\ t_{22} &= -\frac{l_y}{Q} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\beta + m_y \left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{n_y}{Q} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\beta \right) \\ t_{32} &= -\frac{l_y}{Q} \cos\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\beta - m_y \left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \frac{n_y}{Q} \cos\frac{\theta}{2} \cos\beta \right) \\ t_{13} &= -Q \operatorname{sen}\beta ; t_{23} = n_y \cos\frac{\theta}{2} + Q \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\beta \\ t_{33} &= Q \cos\frac{\theta}{2} \cos\beta - n_y \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

La matriz de transformación para el extremo j del elemento, $[t]_j$, responde a las expresiones anteriores sin más que sustituir $\frac{\theta}{2}$ por $-\frac{\theta}{2}$.

En cada extremo de un arco de estructura espacial hay tres fuerzas y 3 momentos, por lo tanto la matriz de transformación completa será:

$$[T] = \begin{vmatrix} [T]_i & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & [T]_j \end{vmatrix}$$

donde

$$[T]_i = \begin{vmatrix} [t]_i & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & [t]_i \end{vmatrix} \quad [T]_j = \begin{vmatrix} [t]_j & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & [t]_j \end{vmatrix}$$

Hay un caso especial en el cambio de coordenadas que se estudia aparte. El caso en que el vector que une los puntos extremos de la directriz del arco, i y j , sea paralelo al eje global OZ.

- a) Si el elemento es ascendente, $Z_j > Z_i$, se define el ángulo β como en la Figura 11

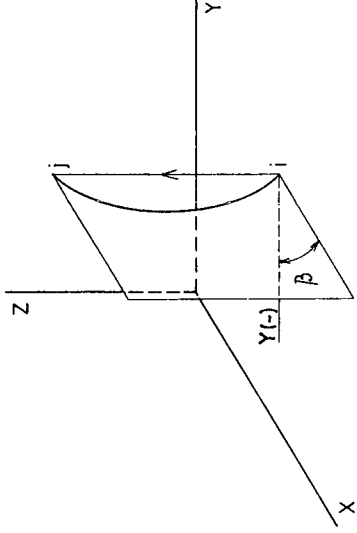


Figura 11.

Y para la matriz $[t]_i$ se tiene en este caso:

$$[t]_i = \begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \sin\beta \sin\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \cos\beta & \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\beta \cos\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \cos\beta & -\sin\frac{\theta}{2} \end{vmatrix}$$

- b) Si es descendente el elemento, $Z_j < Z_i$, se define el ángulo β como se muestra en la Figura 12.

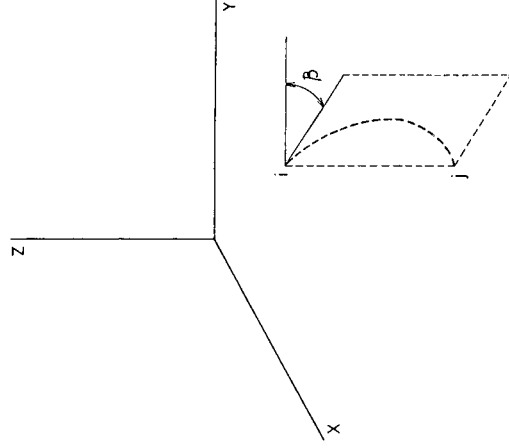


Figura 12.

En este caso se tiene para la matriz $[t]_i$:

$$[t]_i = \begin{vmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\frac{\theta}{2} \cos\beta & \sin\frac{\theta}{2} \cos\beta & -\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\beta \cos\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \cos\beta & \sin\frac{\theta}{2} \end{vmatrix}$$

Para la matriz $[t]_j$, en ambos casos, basta sustituir $\theta/2$ por $-\theta/2$ en las expresiones anteriores de $[t]_i$.

Matriz de rigidez elemental en coordenadas globales.

Una vez obtenidas la matriz de rigidez en locales y la de transformación, se calcula mediante la expresión:

$$[K]_{XYZ} = [T]^T [K]_{xyz} [T]$$

ACCIONES CONCENTRADAS EN ELEMENTOS DE DIRECTRIZ RECTA

En este apartado se presentan las expresiones de las fuerzas de empotramiento perfecto que aparecen cuando se somete un elemento a una acción concentrada, fuerza o momento. Se consideran elementos de directriz recta y sección constante o variable. De nuevo se hace uso del teorema de los trabajos virtuales con las consideraciones ya comentadas anteriormente.

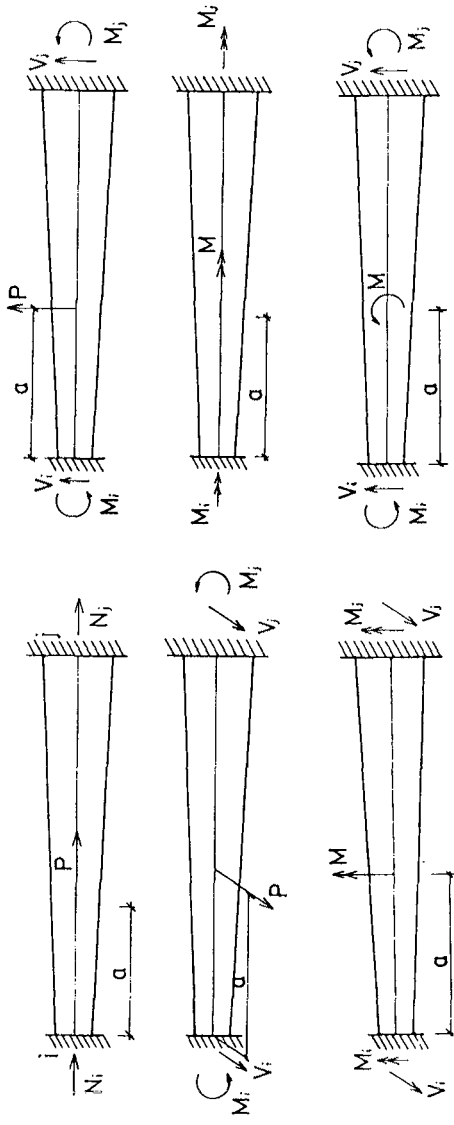


Figura 13.

En las expresiones que definen estas fuerzas, los símbolos I_{aL0} , I_{aL1} , I_{aL2} e I_{aL1M} , responden a las siguientes definiciones:

$$I_{\alpha L 0}(I_{gg}) = \int_{\alpha}^L \frac{dx}{I_{gg}(x)}$$

$$I_{\alpha L 1}(I_{gg}) = \int_{\alpha}^L \frac{x - \alpha}{I_{gg}(x)} dx$$

$$I_{\alpha L 2}(I_{gg}) = \int_{\alpha}^L \frac{x(x - \alpha)}{I_{gg}(x)} dx$$

$$I_{\alpha L 1M}(I_{gg}) = \int_{\alpha}^L \frac{x}{I_{gg}(x)} dx$$

Siendo α la distancia desde el nudo origen, nudo i , hasta el punto donde se aplica la acción.

$N_i = -P \frac{I_{\alpha L 0}(A)}{I_0(A)}$ $N_j = -N_i - P$	$V_i = \frac{P \{I_{\alpha L 1}(I_z)I_1(I_z) - I_{\alpha L 2}(I_z)I_0(I_z)\}}{I_0(I_z)I_2(I_z) - I_1(I_z)^2}$ $M_i = \frac{P \{I_{\alpha L 1}(I_z)I_2(I_z) - I_{\alpha L 2}(I_z)I_1(I_z)\}}{I_0(I_z)I_2(I_z) - I_1(I_z)^2}$ $V_j = -P - V_i ; M_j = V_i L + P(L - \alpha) - M_i$
$V_i = \frac{P \{I_1(I_y)I_{\alpha L 1}(I_y) - I_0(I_y)I_{\alpha L 2}(I_y)\}}{I_0(I_y)I_2(I_y) - I_1(I_y)^2}$ $M_i = \frac{P \{I_1(I_y)I_{\alpha L 2}(I_y) - I_2(I_y)I_{\alpha L 1}(I_y)\}}{I_0(I_y)I_2(I_y) - I_1(I_y)^2}$ $V_j = -P - V_i ; M_j = -M_i - V_i L - P(L - \alpha)$	$M_i = -M \frac{I_{\alpha L 0}(J)}{I_0(J)}$ $M_j = -M_i - M$
$V_i = \frac{M \{I_1(I_y)I_{\alpha L 0}(I_y) - I_0(I_y)I_{\alpha L 1M}(I_y)\}}{I_0(I_y)I_2(I_y) - I_1(I_y)^2}$ $M_i = \frac{M \{I_1(I_y)I_{\alpha L 1M}(I_y) - I_2(I_y)I_{\alpha L 0}(I_y)\}}{I_0(I_y)I_2(I_y) - I_1(I_y)^2}$ $V_j = -V_i ; M_j = -M_i - M - V_i \cdot L$	$V_i = \frac{M \{I_0(I_z)I_{\alpha L 1M}(I_z) - I_1(I_z)I_{\alpha L 0}(I_z)\}}{I_0(I_z)I_2(I_z) - I_1(I_z)^2}$ $M_i = \frac{M \{I_1(I_z)I_{\alpha L 1M}(I_z) - I_2(I_z)I_{\alpha L 0}(I_z)\}}{I_0(I_z)I_2(I_z) - I_1(I_z)^2}$ $V_j = -V_i ; M_j = -M_i - M + V_i \cdot L$

Tabla I.

DISTRIBUCIONES UNIFORMES DE CARGA EN ELEMENTOS DE DIRECTRIZ

Se presentan ahora las expresiones de las fuerzas de empotramiento perfecto originadas por las distribuciones uniformes de carga más frecuentes.

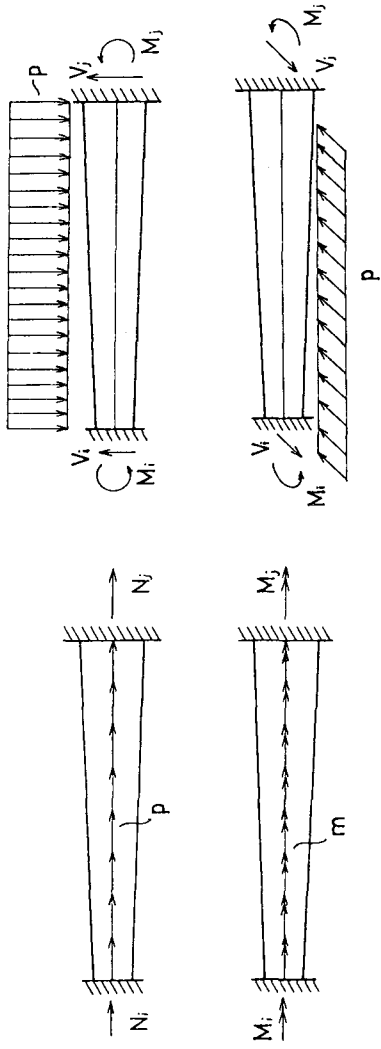


Figura 14.

$N_i = -p \frac{I_1(A)}{I_0(A)}$	$V_i = \frac{P}{2} \frac{\{I_0(I_z)I_3(I_z) - I_1(I_z)I_2(I_z)\}}{I_0(I_z)I_2(I_z) - I_1(I_z)^2}$
$N_j = -pL - N_i$	$M_i = \frac{P}{2} \frac{\{I_1(I_z)I_3(I_z) - I_2(I_z)^2\}}{I_0(I_z)I_2(I_z) - I_1(I_z)^2}$
$V_j = pL - V_i \quad ; \quad M_j = V_i \cdot L - M_i - p \frac{L^2}{2}$	
$M_i = -m \frac{I_1(J)}{I_0(J)}$	$V_i = \frac{P}{2} \frac{\{I_0(I_y)I_3(I_y) - I_1(I_y)I_2(I_y)\}}{I_0(I_y)I_2(I_y) - I_1(I_y)^2}$
$M_j = -M_i - mL$	$M_i = \frac{P}{2} \frac{\{-I_1(I_y)I_3(I_y) + I_2(I_y)^2\}}{I_0(I_y)I_2(I_y) - I_1(I_y)^2}$
$V_j = pL - V_i \quad ; \quad M_j = p \frac{L^2}{2} - V_i \cdot L - M_i$	

Tabla II.

ACCIONES CONCENTRADAS EN ELEMENTOS DE DIRECTRIZ CIRCUNFERENCIAL

Se exponen a continuación las expresiones de las fuerzas de empotramiento perfecto, correspondientes a los casos de acción concentrada en este tipo de elementos. La Figura 15 representa las distintas posibilidades.

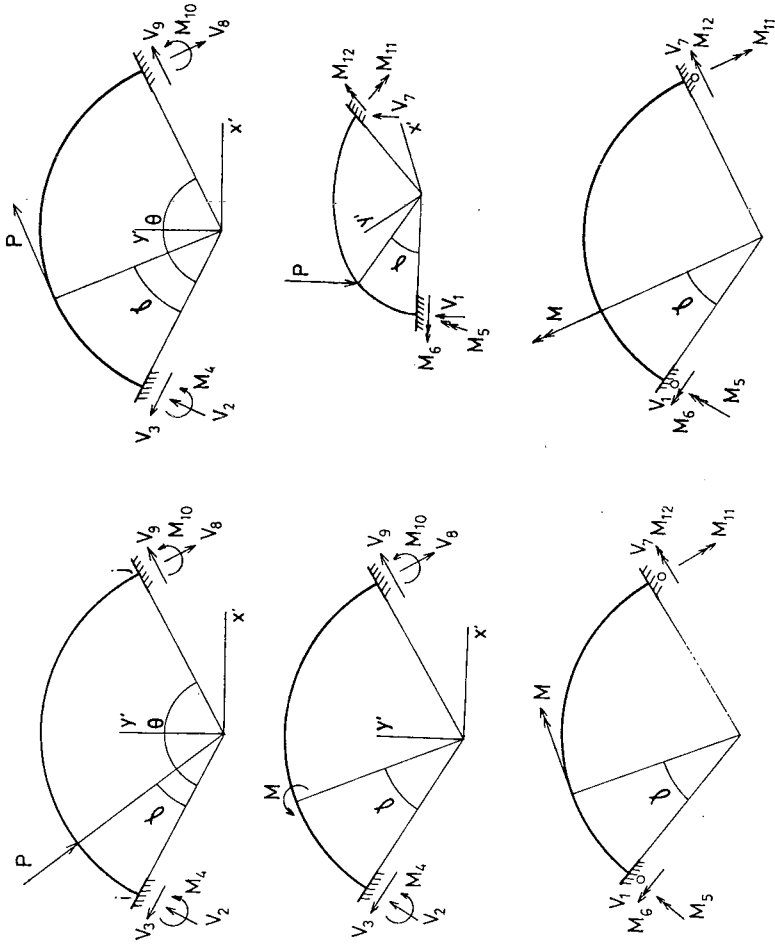


Figura 15.

En las ecuaciones que aparecen a continuación s y c son:

$$s = \sin \frac{\theta}{2} ; \quad c = \cos \frac{\theta}{2}$$

Y las letras mayúsculas I_1, A, B, C, D, E, F, G y H corresponden a las definiciones integrales realizadas anteriormente.

Fuerza en dirección radial.

Si Δ es la cantidad:

$$\Delta = R^2 (-D^2 I_1 - AG^2 - BH^2 - 2DGH + AB I_1)$$

se tiene:

$$V_3 = \frac{PR^2 \left[-J_1(DI_1 + GH) + J_2(BI_1 - G^2) - J_3(BH + DG) \right]}{\Delta}$$

$$V_2 = \frac{PR^2 \left[J_1(AI_1 - H^2) - J_2(DI_1 + GH) + J_3(AG + DH) \right]}{\Delta}$$

$$M_4 = \frac{PR^3 \left[-J_1(AG + HD) + J_2(GD + BH) + J_3(D^2 - AB) \right]}{\Delta}$$

Donde todas las integrales dependen del momento de inercia $I_x(\alpha)$.
Los símbolos J_1, J_2 y J_3 corresponden a :

$$J_1 = \int_{\gamma}^{\theta} \frac{(1 - \cos\alpha) \operatorname{sen}(\alpha - \gamma)}{I_x(\alpha)} d\alpha$$

$$J_2 = \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\alpha - \gamma)}{I_x(\alpha)} d\alpha$$

$$J_3 = \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \gamma)}{I_x(\alpha)} d\alpha$$

En éstas y posteriores expresiones γ es el ángulo de situación de la carga.
Por último, de las ecuaciones de equilibrio, las restantes incógnitas hiperestáticas serán:

$$V_8 = (s^2 - c^2) V_2 + 2sc V_3 - P \operatorname{sen}(\theta - \gamma)$$

$$V_9 = (s^2 - c^2) V_3 - 2sc V_2 + P \operatorname{cos}(\theta - \gamma)$$

$$M_{10} = 2Rs^2 V_2 + 2Rsc V_3 - M_4 - PR \operatorname{sen}(\theta - \gamma)$$

Fuerza en dirección tangente.

Siendo ahora:

$$J_1 = \int_{\gamma}^{\theta} \frac{(\cos\alpha - 1) [1 - \cos(\alpha - \gamma)]}{I_x(\alpha)} d\alpha$$

$$J_2 = \int_{\gamma}^{\theta} \frac{[\cos(\alpha - \gamma) - 1] \operatorname{sen}\alpha}{I_x(\alpha)} d\alpha$$

$$J_3 = \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\cos(\alpha - \gamma) - 1}{I_x(\alpha)} d\alpha$$

se obtienen, para las incógnitas V_2, V_3 y M_4 , expresiones formalmente iguales a las obtenidas en el caso anterior.

En el nudo extremo:

$$V_8 = 2scV_3 + (s^2 - c^2) V_2 - P \cos(\theta - \gamma)$$

$$V_9 = (s^2 - c^2) V_3 - 2sc V_2 - P \operatorname{sen}(\theta - \gamma)$$

$$M_{10} = 2Rs^2 V_2 - M_4 + 2Rsc V_3 + PR [1 - \cos(\theta - \gamma)]$$

Momento concentrado normal al plano del arco.

Las fuerzas de empotramiento en el extremo i son:

$$V_3 = \frac{MR}{\Delta} [-Z_1(DI_1 + GH) + Z_2(BI_1 - G^2) - Z_3(BH + DG)]$$

$$V_2 = \frac{MR}{\Delta} [Z_1(AI_1 - H^2) - Z_2(DI_1 + GH) + Z_3(AG + DH)]$$

$$M_4 = \frac{MR^2}{\Delta} [-Z_1(AG + HD) + Z_2(GD + BH) + Z_3(D^2 - AB)]$$

En las que Δ responde a la expresión presentada para el caso de fuerza en dirección radial y para Z_1, Z_2 y Z_3 se tiene:

$$Z_1 = \int_{\gamma}^{\theta} \frac{(1 - \cos\alpha)}{I_x(\alpha)} d\alpha$$

$$Z_2 = \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\operatorname{sen}\alpha d\alpha}{I_x(\alpha)}$$

$$Z_3 = \int_{\gamma}^{\theta} \frac{d\alpha}{I_x(\alpha)}$$

Y V_8, V_9 , y M_{10} resultan, usando las ecuaciones de equilibrio:

$$V_8 = 2scV_3 + (s^2 - c^2) V_2$$

$$V_9 = (s^2 - c^2) V_3 - 2sc V_2$$

$$M_{10} = 2Rs^2 V_2 - M_4 + 2Rsc V_3 - M$$

Fuerza normal al plano del arco.

Siendo Δ :

$$\begin{aligned} \Delta = R & \left[\left(\frac{1}{2}E + D'\right) (E - E') (A + C') + (F + A') (A + F') (A + B') - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} (E - E')^2 (A + B') - (A + F') \left(\frac{1}{2}E + D'\right)^2 - (F + A') (A + C')^2 \right] \end{aligned}$$

Las fuerzas de empotramiento en el extremo i son:

$$M_6 = \frac{PR^2}{\Delta} \left[\beta_1 \left[\frac{1}{2} (A + C') (E - E') - (A + F') \left(\frac{1}{2} E + D' \right) \right] + \right. \\ \left. + \beta_2 [(A + F') (A + B') - (A + C')^2] + \right. \\ \left. + \beta_3 [(A + C') \left(\frac{1}{2} E + D' \right) - \frac{1}{2} (E - E') (A + B')] \right]$$

$$M_5 = \frac{PR^2}{\Delta} \left[\beta_1 \left[\left(\frac{1}{2} E + D' \right) \frac{1}{2} (E - E') - (F + A') (A + C') \right] + \right. \\ \left. + \beta_2 [(A + C') \left(\frac{1}{2} E + D' \right) - (A + B') \frac{1}{2} (E - E')] + \right. \\ \left. + \beta_3 [(F + A') (A + B') - \left(\frac{1}{2} E + D' \right)^2] \right]$$

$$V_1 = \frac{PR}{\Delta} \left[\beta_1 [(F + A') (A + F') - \frac{1}{4} (E - E')^2] + \right. \\ \left. + \beta_2 \left[\frac{1}{2} (A + C') (E - E') - (A + F') \left(\frac{1}{2} E + D' \right) \right] + \right. \\ \left. + \beta_3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} E + D' \right) (E - E') - (A + C') (F + A') \right] \right]$$

En estas ecuaciones los símbolos con prima se refieren a integrales dependientes del momento de inercia J , multiplicado por G , módulo de elasticidad transversal; los símbolos sin prima del momento I_z multiplicado por E , módulo de Young del material, y los símbolos β_1, β_2 y β_3 son:

$$\beta_1 = \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \gamma)}{EI_z(\alpha)} d\alpha + \int_{\gamma}^{\theta} \frac{(1 - \cos \alpha) [1 - \cos(\alpha - \gamma)]}{GJ(\alpha)} d\alpha \\ \beta_2 = \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \gamma)}{EI_z(\alpha)} d\alpha + \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\operatorname{sen} \alpha [1 - \cos(\alpha - \gamma)]}{GJ(\alpha)} d\alpha \\ \beta_3 = \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \gamma)}{EI_z(\alpha)} d\alpha + \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\cos \alpha [1 - \cos(\alpha - \gamma)]}{GJ(\alpha)} d\alpha$$

Para las restantes incógnitas hiperestáticas se tiene:

$$V_7 = P - V_1$$

$$M_{12} = PR \operatorname{sen}(\theta - \gamma) - 2scM_5 + (s^2 - c^2) M_6 - 2RscV_1$$

$$M_{11} = PR [\cos(\theta - \gamma) - 1] + 2scM_6 + (s^2 - c^2) M_5 - 2Rs^2V_1$$

Momento concentrado en dirección tangencial.

Siendo δ_1 , δ_2 y δ_3 las cantidades:

$$\delta_1 = - \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\text{sen} \alpha \text{ sen}(\alpha - \gamma)}{EI_z(\alpha)} d\alpha + \int_{\gamma}^{\theta} \frac{(1 - \text{cos} \alpha) \text{ cos}(\alpha - \gamma)}{GJ(\alpha)} d\alpha$$

$$\delta_2 = - \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\text{cos} \alpha \text{ sen}(\alpha - \gamma)}{EI_z(\alpha)} d\alpha + \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\text{sen} \alpha \text{ cos}(\alpha - \gamma)}{GJ(\alpha)} d\alpha$$

$$\delta_3 = - \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\text{sen} \alpha \text{ sen}(\alpha - \gamma)}{EI_z(\alpha)} d\alpha - \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\text{cos} \alpha \text{ cos}(\alpha - \gamma)}{GJ(\alpha)} d\alpha$$

Las expresiones de V_1 , M_5 , y M_6 son:

$$V_1 = \frac{M}{\Delta} \left[\delta_1 [(F + A')(A + F')] - \frac{1}{4} (E - E')^2 \right] + \\ + \delta_2 \left[\frac{1}{2} (A + C')(E - E') - (A + F') \left(\frac{1}{2} E + D' \right) \right] +$$

$$+ \delta_3 \left[\left(\frac{1}{2} E + D' \right) \frac{1}{2} (E - E') - (F + A') (A + C') \right] \\ M_5 = \frac{MR}{\Delta} \left[\delta_1 \left[\left(\frac{1}{2} E + D' \right) \frac{1}{2} (E - E') - (F + A') (A + C') \right] + \right. \\ \left. + \delta_2 \left[\left(\frac{1}{2} E + D' \right) (A + C') - \frac{1}{2} (E - E') (A + B') \right] + \right. \\ \left. + \delta_3 \left[(F + A') (A + B') - \left(\frac{1}{2} E + D' \right) \right] \right]$$

$$M_6 = \frac{MR}{\Delta} \left[\delta_1 \left[\frac{1}{2} (E - E') (A + C') - (A + F') \left(\frac{1}{2} E + D' \right) \right] + \right. \\ \left. + \delta_2 \left[(A + F') (A + B') - (A + C')^2 \right] + \right. \\ \left. + \delta_3 \left[(A + C') \left(\frac{1}{2} E + D' \right) - \frac{1}{2} (E - E') (A + B') \right] \right]$$

Aquí Δ es la cantidad anteriormente definida.
Usando las ecuaciones de equilibrio:

$$V_7 = - V_1$$

$$M_{12} = -2scM_5 + (s^2 - c^2) M_6 - 2RscV_1 - M \text{ sen}(\theta - \gamma)$$

$$M_{11} = (s^2 - c^2) M_5 + 2scM_6 + 2Rs^2V_1 - M \text{ cos}(\theta - \gamma)$$

Momento concentrado radial.

Siendo δ_1 , δ_2 y δ_3 las definidas por:

$$\delta_1 = - \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos(\alpha - \gamma)}{EI_z(\alpha)} d\alpha - \int_{\gamma}^{\theta} \frac{(1 - \cos \alpha) \operatorname{sen}(\alpha - \gamma)}{GJ(\alpha)} d\alpha$$

$$\delta_2 = - \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\cos \alpha \cos(\alpha - \gamma)}{EI_z(\alpha)} d\alpha - \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \gamma)}{GJ(\alpha)} d\alpha$$

$$\delta_3 = - \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos(\alpha - \gamma)}{EI_z(\alpha)} d\alpha + \int_{\gamma}^{\theta} \frac{\cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \gamma)}{GJ(\alpha)} d\alpha$$

Siguen siendo válidas las expresiones de V_1 , M_5 y M_6 que aparecían en el apartado anterior.

Para las restantes fuerzas de empotramiento se tiene:

$$V_7 = - V_1$$

$$M_{12} = - M \cos(\theta - \gamma) + (s^2 - c^2) M_6 - 2scM_5 - 2RscV_1$$

$$M_{11} = M \operatorname{sen}(\theta - \gamma) + 2scM_6 + (s^2 - c^2) M_5 + 2Rs^2 V_1$$

DISTRIBUCIONES UNIFORMES DE CARGA EN ELEMENTOS DE DIRECTRIZ CIRCUNFERENCIAL

Se consideran los casos que se presentan a continuación:

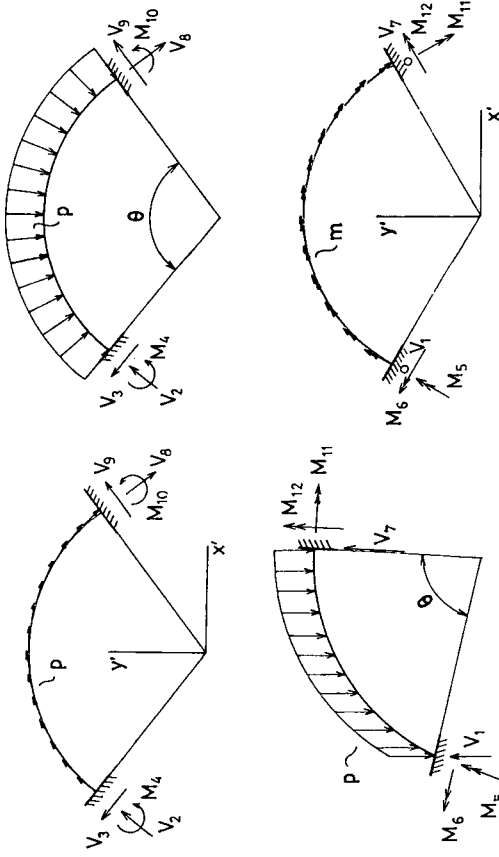


Figura 16.

Distribución de fuerzas tangenciales.

Las expresiones para V_2 , V_3 y M_4 son las que aparecen para el caso de fuerza concentrada en dirección radial del apartado anterior, si el segundo miembro de cada una de aquellas se multiplica por R y el valor P de la carga concentrada se sustituye por p , valor de la carga distribuida. Los valores de J_1 , J_2 y J_3 , en este caso serán:

$$J_1 = \int_0^\theta \frac{(1 - \cos\alpha) (\operatorname{sen}\alpha - \alpha)}{I_x(\alpha)} d\alpha$$

$$J_2 = \int_0^\theta \frac{\operatorname{sen}\alpha (\operatorname{sen}\alpha - \alpha)}{I_x(\alpha)} d\alpha$$

$$J_3 = \int_0^\theta \frac{(\operatorname{sen}\alpha - \alpha)}{I_x(\alpha)} d\alpha$$

Para las incógnitas del extremo j , usando las ecuaciones de equilibrio, se tiene:

$$M_{10} = pR^2 (\theta - \operatorname{sen}\theta) + 2RscV_3 + 2Rs^2V_2 - M_4$$

$$V_9 = V_3 (s^2 - c^2) - 2scV_2 - 2s^2pR$$

$$V_8 = V_2 (s^2 - c^2) + 2sc (V_3 - pR)$$

Distribución uniforme de fuerzas radiales.

Las fuerzas de empotramiento en el extremo i resultan:

$$V_3 = 0$$

$$V_2 = pR$$

$$M_4 = 0$$

Y usando las ecuaciones de equilibrio:

$$V_9 = 0$$

$$V_8 = -pR$$

$$M_{10} = 0$$

Distribución de fuerzas normales al plano del arco.

Si se definen:

$$I' = \int_0^\theta \frac{(1 - \cos\alpha)(\alpha - \text{sen}\alpha)}{GJ(\alpha)} d\alpha$$

$$J' = \int_0^\theta \frac{\text{sen}\alpha(\alpha - \text{sen}\alpha)}{GJ(\alpha)} d\alpha$$

$$K' = \int_0^\theta \frac{\cos\alpha(\alpha - \text{sen}\alpha)}{GJ(\alpha)} d\alpha$$

Las expresiones obtenidas para V_1 , M_5 y M_6 en el caso de fuerza concentrada en dirección normal al plano del arco son válidas también aquí, siendo ahora β_1 , β_2 y β_3 las siguientes:

$$\beta_1 = R(D + I')$$

$$\beta_2 = R(J' - C)$$

$$\beta_3 = R(D - K')$$

Mediante las ecuaciones de equilibrio se obtiene:

$$V_7 = pR\theta - V_1$$

$$M_{11} = 2pR^2(cI_s - sI_c) + 2scM_6 + (s^2 - c^2)M_5 + 2Rs^2V_1$$

$$M_{12} = 2pR^2(sI_s + cI_c) + (s^2 - c^2)M_6 - 2scM_5 - 2RscV_1$$

en las que:

$$I_s = s - \frac{1}{2}c\theta$$

$$I_c = \frac{\theta}{2} - s$$

Distribución de momentos torsores.

Siguen siendo válidas las expresiones comentadas más arriba para V_1 , M_5 y M_6 , sin más que cambiar el valor de la fuerza concentrada P por el del momento por unidad de longitud m .

En este caso, β_1 , β_2 y β_3 son:

$$\beta_1 = D' - D$$

$$\beta_2 = A' + C$$

$$\beta_3 = -D - \frac{1}{2}E'$$

Y las incógnitas en el nudo j en función de las del nudo i , serán:

$$V_7 = -V_1$$

$$M_{11} = (s^2 - c^2) M_5 + 2s [c(M_6 - Rm) + RsV_1]$$

$$M_{12} = (s^2 - c^2) M_6 - 2sc (M_5 + RV_1) - 2Rs^2m$$

RESULTADOS

Se presentan a continuación dos ejemplos, que han sido resueltos utilizando la formulación expuesta anteriormente.

Ambos ejemplos se analizaron haciendo uso de un programa de análisis⁷ que implementa el desarrollo teórico.

Ejemplo I.

Se trata de una viga recta en voladizo de sección variable. En la Figura 17 se ha representado la estructura y se definen las características geométricas y resistentes.

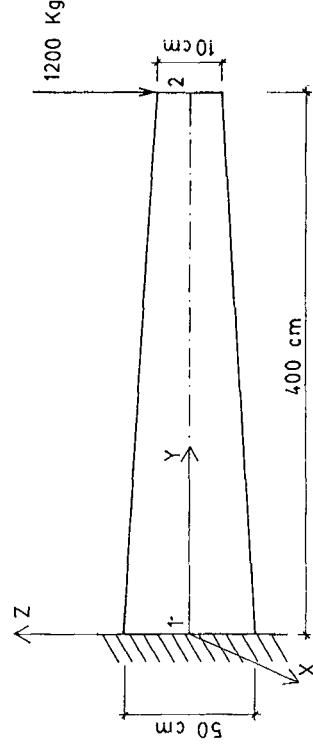


Figura 17. Sección rectangular de ancho 20cm

Ley de área:

$$A = -2x + 1000 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Ley de momento de inercia:

$$I_z = -1.667E - 3x^3 + 2.5x^2 - 2.083 E5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

En estas expresiones x es la coordenada sobre la directriz de la viga, medida desde el nudo 1.

Material: Hormigón

$$E = 2E5$$

$$\nu = 0.2$$

Haciendo uso del programa se analizó este ejemplo por dos procedimientos: en forma exacta, es decir, considerando la estructura como formada por un sólo elemento de área e inercia las anteriormente expresadas, y aproximándola con tramos de sección constante. Estos tramos se eligen con el criterio que expresa gráficamente la Figura 18.

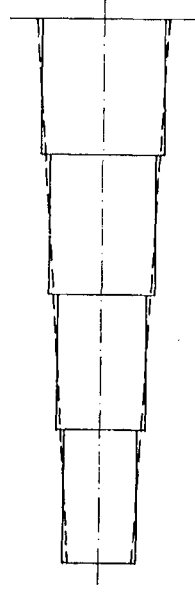


Figura 18.

La Tabla que aparece a continuación presenta los resultados del análisis aproximado con 1, 2, 4, 8 y 16 tramos de sección constante. En este caso sencillo tan sólo aparecen la flecha y el giro en el extremo, ya que los esfuerzos, por tratarse de una estructura isostática, son en cualquier caso los que equilibran la carga.

No. tramos	flecha	giro	Errores relativos	
			flecha	giro
1	- 2.8444	- 1.06667 E-2	61.5 %	7.5 %
2	- 2.2500	- 1.2375 E-2	27.74 %	7.33 %
4	- 1.9122	- 1.2271 E-2	8.56 %	6.43 %
8	- 1.7999	- 1.1823 E-2	2.19 %	2.54 %
16	- 1.7712	- 1.1609 E-2	0.56 %	0.69 %
Exacto	- 1.7614	- 1.1530 E-2	—	—

Tabla III.

	LECTURA DATOS	CALCULOS	ESCRITURA
Exacto	44	22	164
16 tramos	316	382	702
mejora conseguida	7.18	17.36	4.28

TABLA IV. Tiempos de Computador

Ejemplo II.

Se considera ahora el arco hiperestático de sección variable que muestra la Figura 19. Se trata de una estructura simétrica que se ha supuesto formada por dos elementos que conectan tres nudos.

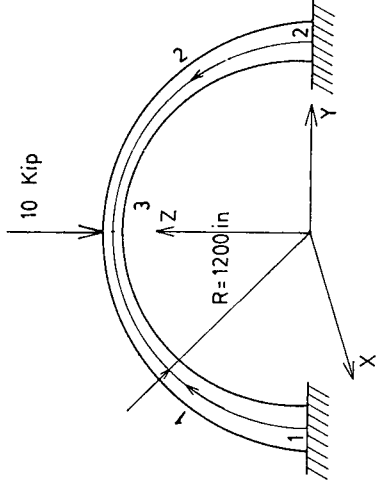


Figura 19.

Las barras son de sección rectangular de ancho constante de 20 in.
Ley de área:

$$A = 1000 - 509.296 x$$

Ley de inercia:

$$I_x = 2.083 E5 - 3.1831E5x + 1.62114E5x^2 - 2.752E4x^3$$

En los que x es el ángulo en radianes medido desde el origen de la barra.
Material: Hormigón

$$E = 3E6$$

$$\nu = 0.2$$

Nº tramos	flecha	Reac. Horiz.	Momento base	Mom. en 3	Errores relativos		
					fecha	R. hor.	M. Base
2	- 9.4251E-3	4.99688 E3	1.87441 E3	1.87441 E3	-	-	-
4	- 2.4658	5.87475 E3	- 2.0803 E6	1.0306 E6	36.75%	17.5%	38.2 %
6	- 2.8200	6.22764 E3	- 2.5278 E6	1.05466 E6	27.66%	12.5%	24.91%
10	- 3.1752	6.66521 E3	- 2.9554 E6	9.57119 E5	18.55%	6.4%	12.22%
20	- 3.639	6.98391 E3	- 3.2448 E6	8.64086 E5	6.66%	1.9%	3.62%
Exacto	- 3.8985	7.1214 E3	- 3.3667 E6	8.21039 E5	-	-	-
8	- 3.6675	7.1431 E3	- 3.2747 E6	7.02977 E5	5.9 %	0.3%	2.73%
4	- 2.3543	7.08151 E3	- 2.9156 E6	4.17799 E5	39.6 %	0.5%	13.4 %

de
sección
constante

sección
variable

Tabla V. El arco aproximado con tramos rectos.

Nº tramos	flecha	Reac. Horiz.	Momento base	Mom. arriba	Errores relativos			
					fecha	R. hor.	M. Base	M. arrib.
2	- 1.5006	4.58925 E3	- 1.3256 E6	1.81855 E6	61.5 %	35.6 %	60 %	121.5 %
4	- 2.8003	5.7409 E3	- 2.3878 E6	1.4987 E6	28.17%	19.4 %	29.1 %	82.5 %
6	- 2.9622	6.1954 E3	- 2.6938 E6	1.2594 E6	24 %	13 %	20 %	53.4 %
8	- 3.0965	6.4807 E3	- 2.8944 E6	1.11758 E6	20.6 %	8.99%	14.03%	36.12%
10	- 3.2349	6.6607 E3	- 3.025 E6	1.0319 E6	17 %	6.47%	10.15%	25.7 %
20	- 3.6572	6.9837 E3	- 3.2635 E6	8.83166 E5	6.19%	1.93%	3.07%	7.57%
Exacto	- 3.8985	7.1214 E3	- 3.3667 E6	8.21039 E5	-	-	-	-

Tabla VI. El arco aproximado con tramos curvos de s.c..

Se presentan las tablas de resultados obtenidos al aproximar la estructura con elementos rectos de sección constante, con el mismo criterio que en el ejemplo anterior, con elementos rectos de sección variable lineal, obtenidos al unir con aristas rectas las secciones extremas de cada tramo en que se divide el arco original; por último, en la Tabla VI aparece la aproximación con elementos de directriz circunferencial y sección constante. Siempre comparando con los resultados exactos.

	Lectura Datos	Cálculos	Escritura	Total	Mejora
EXACTO	61	161	188	410	1
20 t.R.s.c.	326	560	728	1614	3.94
20 t.C.s.c.	347	1605	714	2666	6.5
8 t.R.s.v.	150	248	372	770	1.88

TABLA VII. Tiempos de computador

CONCLUSIONES

En los apartados anteriores se ha descrito la mecánica de trabajo necesaria para incorporar al Análisis Matricial de Estructuras, elementos de sección variable, rectos o curvos circunferenciales, incluyéndose todas las expresiones que deben ser usadas.

Asimismo se han tratado los casos más importantes de cargas actuantes sobre estos elementos, tema imprescindible éste si queremos que dichos elementos puedan operar realmente dentro de un paquete de Análisis Matricial.

Finalmente, se han presentado dos ejemplos numéricos que validan las formulaciones desarrolladas.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo forma parte de los estudios realizados para la realización del Proyecto de Diseño Asistido por computador de Puertas Metálicas⁷, financiado por la Junta de Andalucía, a través de SADIEL S.A..

REFERENCIAS

1. J.S. Przemieniecki, "*Theory of Matrix Structural Analysis*", Mc Graw-Hill, (1968).
2. F. Paris, "*Cálculo Matricial de Estructuras*", Cátedra de Estructuras de la ESII de Madrid, (1980).
3. O.C. Zienkiewicz, "*El Método de los Elementos Finitos*", Reverté, (1980).
4. G.S. Pisarenko, A.P. Yakovlev y V.V. Matveev, "*Manual de Resistencia de Materiales*", Mir, Moscú, (1979).

5. A.F. Martín y F. Delgado, "A.N.P.I.: Un programa de Ordenador para el Análisis de Tuberías en Centrales Nucleares", *VII Reunión Anual de la Sociedad Nuclear Española*.
6. M. Prati, "Etude des poutres planes courbes. Méthode des déplacements", *Annales de L'ITBTP*, no. 453, (1987).
7. G. Bravo, "Análisis por Computador de estructuras espaciales de barras. Tratamiento específico de barras curvas con sección variable", P.F.C. Departamento de Ingeniería del Diseño de la ESII de Sevilla, (1987).