

# FORMA SIMÉTRICA DE LA CONDICIÓN DE CONTORNO ABSORBENTE DNL PARA EL PROBLEMA DE LA RESISTENCIA DE OLA EN BARCOS

MARIO STORTI  
JORGE D'ELÍA  
y  
SERGIO IDELSOHN

*Grupo de Tecnología Mecánica del INTEC  
Güernes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina  
Tel/Fax: + 54-42-559 175, Fax: + 54-42-550 944  
E-mail: mstorti@minerva.unl.edu.ar  
Home-page: <http://venus.unl.edu.ar/gtm-eng.html>*

## RESUMEN

En la ref.<sup>1</sup> hemos presentado un esquema numérico basado en elementos finitos centrados con condición de contorno absorbente (la cual llamamos DNL, por Discrete Non-Local) para el problema de la resistencia de ola en barcos. Al no agregar viscosidades numéricas este método da curvas de resistencia en función del Froude mejor definidas y posibilita el cálculo de la resistencia por el balance de flujo de momento a la salida. Sin embargo, debido a la naturaleza de la condición absorbente, el sistema resultante es no simétrico y en principio el sistema lineal resultante presenta ciertas dificultades para la factorización. En este trabajo se describe un método por el cual sólo es necesario factorizar una matriz simétrica y con el mismo ancho de banda que una matriz de elementos finitos típica, con el consecuente ahorro de memoria central (RAM).

## SYMMETRIC FORM OF THE DNL ABSORBING BOUNDARY CONDITION FOR THE SHIP WAVE RESISTANCE PROBLEM

### SUMMARY

In ref.<sup>1</sup> we presented a numerical algorithm based on centered Finite Elements with absorbing boundary conditions (which we call DNL, for Discrete Non-Local) for the ship wave resistance problem. As no numerical viscosity is added, this method yields very well defined resistance curves as a function of Froude number and allows calculation of the resistance from a momentum flux balance at the outlet plane. However, due to the nature of the absorbing conditions, the resultant system is non-symmetric and for the factorization. In this work we show how the system can be solved by only factorizing a symmetric matrix with approximately the same band-width of a typical FEM matrix.

Recibido: Julio 1997

**Palabras clave:**

Flujo potencial, flujo con superficie libre, condiciones de contorno absorbentes, método de elementos finitos, resistencia de ola, hidrodinámica naval.

**INTRODUCCIÓN**

Cuando un cuerpo se desplaza cerca de la superficie libre de un fluido, se genera un patrón de olas de gravedad que sigue al cuerpo. La energía necesaria para producir este patrón proviene del trabajo realizado por el cuerpo en contra de la "resistencia de ola". El modelado de este problema es un tópico de mucho interés para el diseño de embarcaciones e ingeniería marítima<sup>1-12</sup>. En primera aproximación la resistencia de ola puede calcularse con un modelo potencial, mientras que la resistencia viscosa puede calcularse manteniendo la superficie libre en su posición de referencia. Esta es, básicamente, la hipótesis de Froude. Con esta simplificación estamos despreciando la interacción entre la capa límite, la cual tiende a producir un cuerpo más grande que el real, cuyo patrón de olas modifica, a su vez, el flujo potencial, que es el dato necesario para el cálculo viscoso en la capa límite.

El cálculo de la resistencia de ola tiene dos dificultades importantes asociadas. Primero, la presencia de condiciones de borde no lineales en la superficie libre tanto cinemática como dinámica, que complican notoriamente cualquier intento de resolución del problema. Segundo, el problema necesita o bien un término disipativo, o bien condiciones de contorno absorbentes, de lo contrario conduce a un *problema hidrodinámico incompletamente formulado*, en el sentido de Birkhoof<sup>2</sup>, porque no incorpora el sentido de propagación de las ondas por gravedad sólo hacia corriente abajo. Los algoritmos más usados agregan un término disipativo y son derivados del método de Dawson<sup>3</sup>. Si bien el uso de estos términos (también llamado "upwind" o "viscosidad numérica") es una técnica bien establecida en el contexto de flujos advectivos<sup>13-15</sup>, ciertos aspectos particulares de este problema hacen deseable la búsqueda de una solución alternativa vía las mencionadas condiciones de contorno absorbentes. Por ejemplo, el término disipativo usado es, básicamente, una derivada quinta según la línea de corriente, lo cual hace muy difícil la implementación en un contexto de malla no estructurada o estructurada pero curvilínea.

En la ref.<sup>1</sup> hemos presentado un algoritmo basado en el método de los elementos finitos con condiciones de contorno absorbentes en el plano de salida que no necesita el agregado de términos disipativos. Este procedimiento tiene la ventaja de que permite utilizar mallas más acotadas en el sentido longitudinal, las curvas de resistencia presentan picos mejor definidos y la resistencia puede ser calculada a partir del flujo de momento en el plano de salida. Esto último tiene la ventaja, entre otras, de que asegura una resistencia positiva<sup>4</sup>.

Un punto clave de las condiciones de contorno absorbentes es que un cierto número de condiciones es "relajado" a la salida del dominio y un número igual de condiciones es agregado a la entrada del dominio aguas arriba. Si bien el sistema resultante es bien condicionado, esto trae inconvenientes a la hora de resolver el sistema ya que esto implica un "corrimiento" de la diagonal principal de la matriz del sistema, con lo cual

se pierde la simetría de la matriz y existe la posibilidad de que aparezcan pivotes nulos durante la factorización. Este trabajo está orientado a la resolución de estos problemas.

## FORMA SIMÉTRICA DE LAS ECUACIONES

### Ecuaciones de gobierno

Consideremos el flujo alrededor de una embarcación moviéndose a velocidad constante en un canal de sección constante, la cual, por simplicidad, supondremos que es un rectángulo de profundidad  $H$  y ancho  $L_y$  como se muestra en la Figura 1. El

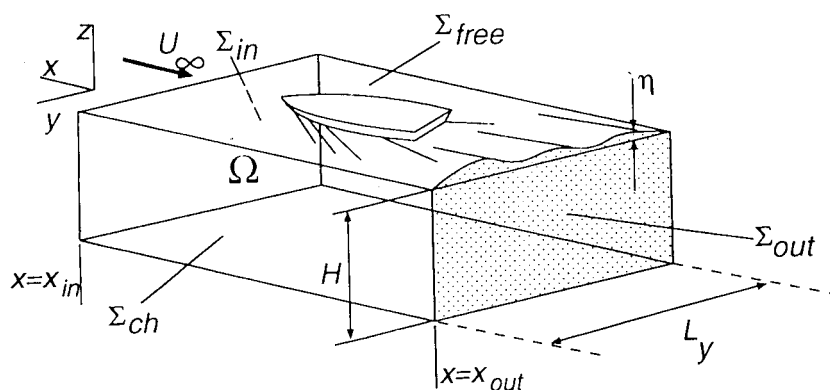


Figura 1. Descripción geométrica del problema

fluido a ser modelado ocupa la región  $\Omega$  que está limitada por las paredes y el fondo del canal  $\Sigma_{ch}$ , las superficies de entrada y salida  $\Sigma_{in/out}$ , la superficie mojada del casco  $\Sigma_{ship}$  y la superficie libre  $\Sigma_{free}$ . Las ecuaciones de gobierno son

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\Phi = 0 & \text{para } \mathbf{x} \text{ en } \Omega \\ \Phi_{,n} = 0 & \text{en } \Sigma_{free} + \Sigma_{ch} + \Sigma_{ship} \\ 1/2|\nabla\Phi|^2 + g\eta = 1/2U_\infty^2 & \text{en } \Sigma_{free} \\ \Phi = U_\infty x & \text{en } \Sigma_{in} \\ \text{c.c. de radiación} & \text{en } \Sigma_{out} \end{array} \right. \quad (1a - e)$$

La ecuación de Laplace (1a) proviene de suponer que el flujo es irrotacional e incompresible. La condición de contorno de deslizamiento usual (1b) es utilizada en las paredes del canal, el fondo y la superficie libre. La ecuación (1c) es la "ecuación dinámica de superficie libre" y proviene de aplicar la ecuación de Bernoulli (incluyendo un término hidrostático  $gz$ ,  $\eta$  es la superficie libre). Esta condición se lineariza usualmente bajo ciertas suposiciones, a saber: que el barco es delgado, lento o sumergido profundamente<sup>5,8</sup>. Las "condiciones de contorno de radiación" deben permitir el flujo de

energía en forma de ondas desde adentro hacia afuera a través de  $\Sigma_{\text{out}}$ . Por el contrario, como las ondas de gravedad no se propagan hacia aguas arriba desde el barco hasta  $\Sigma_{\text{in}}$  la condición de contorno allí puede ser simplemente que el potencial se aproxime al no perturbado (1d). Nótese que, el tratamiento diferente entre  $\Sigma_{\text{in}}$  y  $\Sigma_{\text{out}}$  es el único elemento que rompe la simetría  $x \rightarrow -x$  y asegura la propagación de las olas en la dirección físicamente correcta. Otra forma de lograr esto es por medio del agregado de “upwind” o “disipación numérica”.

En la teoría de barco lento el potencial se descompone en una parte que corresponde al flujo básico  $\Phi_0$ , también llamado “flujo de cuerpo doble” (double body flow), y un potencial de “perturbación de ola”  $\phi$  (ref.<sup>5</sup>)

$$\Phi = \Phi_0 + \phi \quad (2)$$

La gran ventaja de esta descomposición es que las ecuaciones de gobierno para ambos flujos se restringen al dominio  $\Omega_0$  donde la superficie libre  $\Sigma_{\text{free}}$  ha sido reemplazada por su posición no perturbada  $\Sigma_{\text{free}0}$ , la cual corresponde al plano  $z = 0$ . El potencial básico  $\Phi_0$  satisface la ecuación de Laplace con condición de contorno de deslizamiento en la superficie libre no perturbada. Como ésta es un plano, simplemente actúa como un espejo y el problema es equivalente al de un cuerpo acotado que se obtiene reflejando (“doblando”) el casco con respecto a la superficie libre. No detallaremos aquí las ecuaciones de barco lento para  $\Phi_0$  y  $\phi$ , las cuales pueden ser consultadas en las refs.<sup>1,5,8</sup>.

Lejos del casco (tanto aguas abajo como aguas arriba) el potencial básico  $\Phi_0$  debe aproximarse al flujo uniforme  $\Phi_0 \rightarrow U_\infty x$  y las ecuaciones de gobierno para  $\phi$  son

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi = 0 & \text{en } \Omega_0 \\ \phi_{,n} = 0 & \text{en } \Sigma_{\text{ch}} \\ \phi = 0 & \text{en } \Sigma_{\text{in}} \\ \phi_{,n} + K^{-1} \phi_{,xx} = 0 & \text{en } \Sigma_{\text{in}} \\ \text{c.c. de radiación} & \text{en } \Sigma_{\text{out}} \end{array} \right. \quad (3a - e)$$

que son, básicamente, las ecuaciones para barco delgado.  $K = U_\infty^2/g$  es el número de onda característico. En las secciones siguiente nos basaremos en éstas para desarrollar la condición de contorno absorbente DNL. Sin embargo, hacemos hincapié en que las ecuaciones que gobiernan el flujo en la región cercana al barco son las de barco lento.

### Discretización parcial

Haremos primero una discretización parcial de esta PDE (ecuación en derivadas parciales) en la dirección transversal ( $y$ ) y en profundidad ( $z$ ) en las regiones alejadas  $|x| > L$ , donde son válidas las aproximaciones (3). La discretización parcial se basa

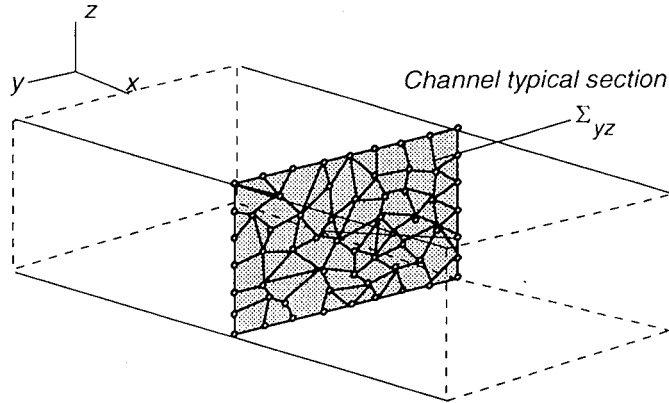


Figura 2. Discretización parcial del problema en  $y$ - $z$ . Malla no estructurada sobre la sección típica

en definir una malla de elementos finitos 2D en la sección típica (ver Figura 2) y reemplazando

$$\phi(x, y, z) \sim \hat{\phi}(x, y, z) = \sum_{k=1}^{N_{\text{slab}}} \phi_k(x) N_k(y, z) \quad (4)$$

donde  $N_{\text{slab}}$  es el número de nodos en la sección típica y  $N_k(y, z)$  la función de interpolación 2D del método de elementos finitos. Reemplazando este desarrollo en la ecuación de Laplace (3a), integrando por partes y usando la condición de superficie libre se obtiene el siguiente sistema de ODE's (ecuaciones diferenciales ordinarias)

$$\tilde{\mathbf{M}} \phi_{,xx} - \mathbf{K} \phi = 0 \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_{N_{\text{slab}}}(x) \end{bmatrix} \\ K_{jk} &= \int_{\Sigma_{yz}} \nabla_{yz} N_j(y, z) \cdot \nabla_{yz} N_k(y, z) dy dz \\ \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}_{\text{free}} \\ M_{jk} &= \int_{\Sigma_{yz}} N_j(y, z) N_k(y, z) dy dz \\ M_{\text{free},jk} &= \int_{\Sigma_{\text{free}0}} N_j(y, 0) N_k(y, 0) dy \end{aligned} \quad (6a - e)$$

donde  $\phi(x)$  es el vector de potenciales nodales,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  son las matrices de elementos finitos para el operador identidad (matriz de masa) y el operador de Laplace y  $\Sigma_{yz}$  es la sección típica del canal. La matriz de masa modificada  $\tilde{\mathbf{M}}$  incluye la "matriz de masa de superficie"  $\mathbf{M}_{\text{free}}$ .  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{M}_{\text{free}}$  son matrices de masa definidas positivas,  $\mathbf{K}$  es

semi-definida positiva y todas ellas son simétricas.  $\tilde{\mathbf{M}}$  es simétrica, pero debido al signo negativo que afecta a  $\mathbf{M}_{\text{free}}$  en (6c) no tiene signo definido.

**La condición de contorno absorbente DNL**

El sistema (5) se desacopla en una serie de ODE's escalares si hacemos el cambio de variables  $\mathbf{U} = \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\phi}$ , donde  $\mathbf{S}$  es la solución del siguiente problema de autovalores

$$\mathbf{KS} = \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{SA} \tag{7}$$

con  $A$  una matriz diagonal. Denotamos por  $\boldsymbol{\phi}_k$  la  $k$ -ésima columna de  $A$ , esto es el  $k$ -ésimo autovector y  $\lambda_k = A_{kk}$  el correspondiente autovalor. Debido a las propiedades de  $\tilde{\mathbf{M}}$  y  $\mathbf{K}$  ( $\mathbf{K}$  es simétrica y definida positiva y  $\tilde{\mathbf{M}}$  es simétrica) puede mostrarse que tal descomposición es posible y que  $\mathbf{S}$  y  $A$  son reales. Suponemos que los autovalores están ordenados en forma ascendente. Un cierto número  $N_{\text{inv}}$  de ellos son, en general, negativos y son los responsables, veremos más adelante, del fenómeno de la resistencia de ola

$$\begin{cases} \lambda_k < 0; & \text{para } 1 \leq k \leq N_{\text{inv}} \text{ (modos no viscosos)} \\ \lambda_k > 0; & \text{para } N_{\text{inv}} + 1 \leq k \leq N_{\text{slab}} \text{ (modos viscosos puros)} \end{cases} \tag{8}$$

Llamaremos modos no viscosos y viscosos según  $\lambda_k$  sea mayor o menor que 0. En general puede verse que el número de modos no viscosos es igual al número de nodos en la superficie que hay en la sección típica del canal. Como es usual para este tipo de descomposición, los autovectores son ortogonales con respecto a ambos  $\tilde{\mathbf{M}}$  y  $\mathbf{K}$

$$\boldsymbol{\phi}_k^T \cdot \tilde{\mathbf{M}}\boldsymbol{\phi}_j = 0, \quad \boldsymbol{\phi}_k^T \cdot \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_j = 0, \quad \text{si } j \neq k \tag{9}$$

La ecuación para cada componente  $U_k$  de  $\mathbf{U}$  es

$$U_{k,xx} - \lambda_k U_k = 0 \tag{10}$$

y su solución general para  $x < -L$  es

$$U_k^{\text{up}}(x) = \begin{cases} b_k^{\text{up}+} e^{+i\mu_k x} + b_k^{\text{up}-} e^{-i\mu_k x}; & \text{por } 1 \leq k \leq N_{\text{inv}} \\ a_k^{\text{up}+} e^{+\mu_k x} + a_k^{\text{up}-} e^{-\mu_k x}; & \text{por } N_{\text{inv}} + 1 \leq k \leq N_{\text{slab}} \end{cases} \tag{11}$$

donde  $\mu_k = \sqrt{|\lambda_k|}$ . Un desarrollo similar es válido para  $x > L$  pero con otros coeficientes que denotaremos por  $a_k^{\text{down}\pm}$ ,  $b_k^{\text{down}\pm}$ . Para tener una solución acotada para los modos viscosos debemos tener que  $a_k^{\text{down}+} = 0$  y  $a_k^{\text{up}-} = 0$ , entonces

$$\left. \begin{aligned} U_{k,x} + \mu_k U_k &= 0, & \text{en } x = x_{\text{out}} \\ U_{k,x} - \mu_k U_k &= 0, & \text{en } x = x_{\text{in}} \end{aligned} \right\} k = N_{\text{inv}} + 1, \dots, N_{\text{slab}} \tag{12a, b}$$

Estas son las condiciones de contorno absorbentes apropiadas para los modos viscosos puros. Sin embargo, no se puede aplicar el mismo criterio para los modos no viscosos ya que estos no decaen ni crecen para  $x \rightarrow \pm\infty$ . No obstante, un análisis detallado desde el punto de vista físico muestra que la disipación viscosa tiende a desplazar los

autovalores desde el eje imaginario puro hacia el semi-plano  $Re\{z\} < 0$ . Esto significa que debemos tener que  $b_k^{\pm\text{up}} = 0$ , de manera que las condiciones de contorno apropiadas son

$$U_k = U_{k,x} = 0 \quad \text{en } x = x_{\text{in}}, \quad k = 1, \dots, N_{\text{inv}} \quad (13)$$

Las ecuaciones (12,13) representan un conjunto de  $2N_{\text{slab}}$  condiciones de contorno que cierran el sistema de ecuaciones de gobierno (5). Las condiciones de contorno absorbente son una técnica muy conocida en el contexto de otro tipo de ecuaciones de ondas como la ecuación de Helmholtz<sup>16</sup>. Las presentadas aquí son completamente absorbentes para el problema de flujo potencial con superficie libre, en el sentido de que *la solución es (por construcción) independiente de la posición del contorno donde la condición es impuesta*. Este resultado es muy fuerte y, en nuestro conocimiento, aún no ha sido reportado algo equivalente en la literatura.

### Forma discreta de las condiciones absorbentes

De (13) se deduce que en  $x_{\text{in}}$  se puede también imponer una ecuación similar para los modos no viscosos similar a la que vale para los viscosos puros

$$U_{k,x} - \mu_k U_k = 0, \quad \text{en } x = x_{\text{in}}, \quad \text{para } k = 1, \dots, N_{\text{inv}} \quad (14)$$

Esto es un poco arbitrario porque en realidad podemos reemplazar en esta ecuación  $\mu_k$  por cualquier otro número, pero para fijar ideas y mantener la misma forma que las ecuaciones para los modos viscosos, elegimos esta forma. Entonces, juntando estas ecuaciones con las de (12) para los modos viscosos

$$\mathbf{U}_{,x} - |\Lambda| \mathbf{U} = 0, \quad \text{en } x = x_{\text{in}} \quad (15)$$

donde  $|\Lambda| = \text{diag}\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_{N_{\text{slab}}}| \}$ . Volviendo a la base de las  $\phi$

$$\phi_{,x} - \mathbf{G} \phi = 0, \quad \text{en } x = x_{\text{in}} \quad (16)$$

donde

$$\mathbf{G} = \mathbf{S} |\Lambda| \mathbf{S}^{-1} \quad (17)$$

Ahora hacemos una discretización completa de las ecuaciones, suponiendo que la malla en  $x$  es de paso constante  $x_J = x_{\text{in}} + (J-1)\Delta x$  y sea  $\phi^J$  el vector de potenciales en la capa  $J$ -ésima. Suponiendo una discretización por elementos finitos en  $x$  de (5), la ecuación para la capa  $J$  es de la forma

$$\mathbf{A} \phi^J - 2\mathbf{B} \phi^J + \mathbf{A} \phi^{J-1} = 0 \quad (18)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \tilde{\mathbf{M}} - 1/6 \cdot \Delta x^2 \mathbf{K}, \\ \mathbf{B} &= \tilde{\mathbf{M}} + 1/3 \cdot \Delta x^2 \mathbf{K} \end{aligned} \quad (19)$$

Con respecto a la condición de contorno absorbente la posibilidad más inmediata es hacer una discretización de primer orden, del primer término en (16). Sea  $j = 1$  la primera capa de la malla, entonces

$$\frac{\phi^2 - \phi^1}{\Delta x} - \mathbf{G}\phi^1 = 0 \tag{20}$$

$$\mathbf{F}\phi^1 + \mathbf{A}\phi^2 = 0, \quad \mathbf{F} = -\mathbf{A}(\mathbf{I} + \Delta x\mathbf{G}) \tag{21}$$

Ec. (21) se obtiene de (20) multiplicando por  $\Delta x\mathbf{A}$ . Esto es para obtener un sistema simétrico, como veremos después. Esta discretización es de primer orden en  $\Delta x$ . También se puede encontrar una aproximación de segundo orden añadiendo una capa ficticia  $\phi^0$  en  $x = -\Delta x$ , usando una aproximación centrada para la derivada primera en (16) y agregando la ecuación de gobierno (18) para la capa  $J = 1$ . Otra posibilidad es suponer que (16) es válida en todo el primer elemento unidimensional  $x_1 < x < x_2$  e integrar el sistema de primer orden. Finalmente, otra posibilidad es repetir un análisis como el hecho en el apartado anterior, pero ahora directamente sobre las ecuaciones discretas (18). En la práctica hemos adoptado esta última posibilidad ya que es completamente absorbente a nivel discreto. Esto es, la solución es independiente del agregado de más capas de nodos<sup>1</sup>. No entraremos en detalles sobre eso aquí, de todas formas, todas las variantes dan una expresión como la (21), donde  $\mathbf{F}$  es  $\mathbf{A}$  por una cierta función (en el sentido matricial) de  $\mathbf{G}$ . Por supuesto, para calcular tal función matricial debemos hacer una descomposición en autovalores y autovectores de  $\mathbf{G}$ , pero de (17) que los autovectores son los mismos que los del problema (7) y los autovalores son los valores absolutos de los  $\lambda_k$ .

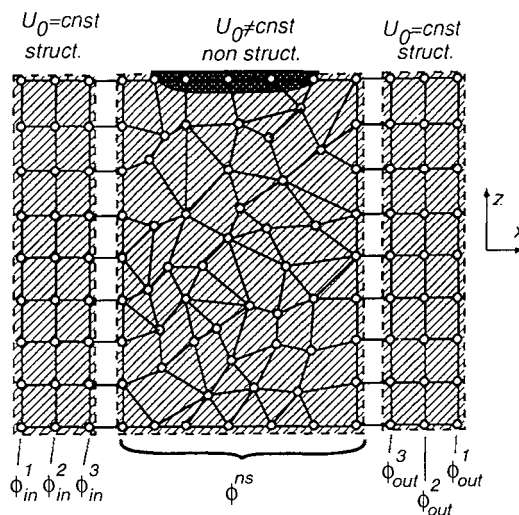


Figura 3. Malla no estructurada con capas estructuradas a la entrada salida





Asintóticamente, esto no es de importancia ya que la memoria total requerida para almacenar la matriz es  $2N_{\text{slab}}N_{\text{eq}}$  (suponiendo que el ancho de banda es en promedio  $N_{\text{slab}}$ , en general es mayor ya que la malla se refina cerca del barco). El cociente entre ambos es  $N_{\text{inv}}/(2N_{\text{slab}})$ , pero como mencionamos anteriormente, el número de autovalores no viscosos es igual al de nodos de superficie, de manera que  $N_{\text{inv}}/N_{\text{slab}} \approx$  número de nodos en profundidad, y entonces, este incremento se hace despreciable a medida que se refina.

El segundo inconveniente es que el sistema deja de ser simétrico, lo cual representa el doble de memoria requerida. Finalmente, los elementos diagonales de las ecuaciones adicionales correspondientes a los modos no viscosos (esto es, las  $N_{\text{inv}}$  primeras filas de la última fila de bloques en (24) son nulos, con lo cual es muy probable que aparezcan *pivotes nulos* durante el proceso de factorización, en el caso de resolver con un método tipo banda o de perfil activo. Estos dos inconvenientes si representan un problema y a continuación veremos como podemos resolverlos, al menos parcialmente.

Con respecto a la simetría notemos que, salvo la última fila de bloques, el resto es simétrico. Esto se desprende de que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son simétricas (ver (19) y (6)). Con respecto a la parte no-estructurada  $\mathbf{D}^{\text{ns}}$ , puede verse que ésta también es simétrica, esto se debe a que tanto el laplaciano (3a) como el término de superficie libre para la aproximación de barco lento son operadores simétricos<sup>1</sup>. Con respecto a la primera fila de bloques, veremos en la sección siguiente que  $\mathbf{F}$  es simétrica. Finalmente, en el apartado siguiente veremos que, mediante una apropiada manipulación algebraica, el sistema puede ser resuelto factorizando sólo la parte simétrica de la ecuación.

### Simetría de la matriz absorbente

Mostraremos en esta sección que la *matriz absorbente*  $\mathbf{F} = -\mathbf{A}(\mathbf{I} + \Delta x \mathbf{G})$  es simétrica. Efectivamente, veremos primero que  $\mathbf{G}$  puede ponerse como un polinomio en  $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K}$ . Consideremos el polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \quad (25)$$

tal que mapea los  $\lambda_k$  en  $|\lambda_k|$ , es decir

$$p(\lambda_k) = |\lambda_k|, \quad k = 1, \dots, N_{\text{slab}} \quad (26)$$

Es bien sabido que esto puede lograrse con un polinomio de grado menor o igual que  $N_{\text{slab}} - 1$ . Consideremos ahora  $p(\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K})$ . Primero veamos que, por (7)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K} &= \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1} \\ (\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K})^2 &= (\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1})(\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1}) = \mathbf{S}\mathbf{A}^2\mathbf{S}^{-1} \\ &\vdots \\ (\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K})^n &= \mathbf{S}\mathbf{A}^n\mathbf{S}^{-1} \end{aligned} \quad (27)$$

de manera que

$$\begin{aligned}
 p(\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K}) &= \sum_{j=0}^m a_k (\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K})^j \\
 &= \sum_{j=0}^m a_k \mathbf{S} \Lambda^j \mathbf{S}^{-1} \\
 &= \mathbf{S} p(\Lambda) \mathbf{S}^{-1} \\
 &= \mathbf{S} |\Lambda| \mathbf{S}^{-1} \\
 &= \mathbf{G}
 \end{aligned} \tag{28}$$

y ahora basta con recordar que, por (19),  $\mathbf{A}$  es una combinación lineal de  $\tilde{\mathbf{M}}$  y  $\mathbf{K}$ , y entonces por (21)  $\mathbf{F}$  es una suma de términos de la forma  $\tilde{\mathbf{M}} (\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K})^n$  y  $\mathbf{K} (\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K})^n$ . Pero es sencillo ver que cada uno de estos términos es simétrico

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K}) &= \mathbf{K} = \text{simétrica} \\
 [\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K})^n]^T &= [\mathbf{K} \underbrace{(\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K}) \dots (\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K})}_{n-1}]^T \\
 &= \underbrace{(\mathbf{K}\tilde{\mathbf{M}}^{-1}) \dots (\mathbf{K}\tilde{\mathbf{M}}^{-1}) \mathbf{K}}_{n-1} \\
 &= \mathbf{K} \underbrace{(\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K}) \dots (\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K})}_{n-1} \\
 &= \tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K})^n
 \end{aligned} \tag{29}$$

y similarmente para los términos de la forma  $\mathbf{K}(\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K})^n$ . Lo cual completa la demostración.

## SOLUCIÓN DEL SISTEMA POR SUPERPOSICIÓN

Para cada modo no viscoso hemos reemplazado una de las condiciones (13) por la combinación lineal (14). Si pudiéramos reemplazar la restante condición en  $x = x_{in}$  por una condición como la (14) pero en  $x_{out}$ , entonces podríamos repetir la primera fila de bloques el proceso hecho con la última y el sistema sería simétrico. Esto no lo podemos hacer pero sí podemos *agregar* tales ecuaciones introduciendo incógnitas auxiliares

$$U_{k,x} + \mu_k U_k = \eta_k, \quad \text{en } x = x_{out}, \quad \text{para } k = 1, \dots, N_{inv} \tag{30}$$

Junto con las ecuaciones para los modos viscosos (12a) se puede llegar a una expresión similar a la (21) pero con un término adicional

$$\mathbf{F}\boldsymbol{\phi}^1 + \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}^2 - \mathbf{S}_{inv} \mathbf{J} = 0 \tag{31}$$

donde  $\mathbf{S}_{inv}$  es una matriz de  $N_{slab} \times N_{inv}$  con los autovectores no viscosos. El sistema final queda como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\phi\phi} & \mathbf{D}_{\phi\eta} \\ \mathbf{D}_{\eta\phi} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{b}} \tag{32}$$



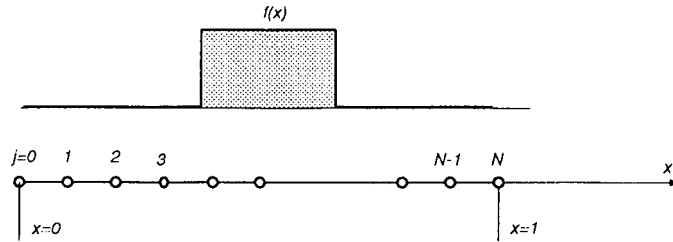


Figura 4. Descripción del problema 1D para las ecuaciones modales

### Resonancias espúreas

La matriz que es factorizada  $\mathbf{D}_{\phi\phi}$  corresponde a un problema similar al original, pero donde hemos desplazado las condiciones de contorno desde aguas arriba hacia aguas abajo. Esto hace que el sistema pueda estar mal condicionado cuando el dominio entra en resonancia. Esto puede verse más fácilmente en un ejemplo sencillo que consiste en resolver el siguiente problema de condiciones iniciales (ver Figura 4)

$$\phi_{,xx} + k^2\phi = f(x) \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \quad (35)$$

con condiciones iniciales

$$\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad \text{en} \quad x = 0 \quad (36)$$

Esta ecuación corresponde a una simplificación de la ecuación para cada uno de los modos no viscosos. Si esta ecuación es resuelta por elementos finitos centrados, el hecho de tener dos condiciones de contorno en  $x = 0$  y ninguna en  $x = 1$  hace que la matriz resultante no sea simétrica. Obviamente esto no tiene importancia en el presente caso donde el problema puede resolverse de izquierda a derecha como si  $x$  fuera el tiempo. Pero tratando de emular el problema de la resistencia de ola, tratamos de resolverlo modificando las condiciones de contorno como

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0, \quad \text{en} \quad x = 0 \\ \beta\phi_{,x} + (1 - \beta)\phi &= \eta, \quad \text{en} \quad x = 1 \end{aligned} \quad (37)$$

Al cambiar una de las condiciones de contorno desde  $x = 0$  a  $x = 1$  el problema ha cambiado a uno de valores de contorno para la ecuación de Helmholtz.  $\beta$  es un parámetro real que nos permite pasar de condiciones de contorno tipo Dirichlet  $\beta = 0$  a condiciones tipo Neumann para  $\beta = 1$  y  $\eta$  es la incógnita adicional. Como el problema es lineal en  $\eta$  la solución general es de la forma

$$\phi = \phi_0 + \eta(\phi_1 - \phi_0) \quad (38)$$

donde  $\phi_0$  y  $\phi_1$  se obtienen resolviendo (35) con condiciones (37) y  $\eta = 0, 1$  respectivamente. Para obtener el valor de  $\eta$  imponemos la primera de las condiciones (36) de donde

$$\eta = -\frac{\phi_{0,x}(0)}{\phi_{1,x}(0) - \phi_{0,x}(0)} \quad (39)$$

Hemos resuelto el problema para  $N = 20$  para más de 1000 valores de  $k$  distribuidos logarítmicamente entre  $k = 0,1$  y  $k = 41,7$ . Para cada valor de  $k$  hemos calculado el número de condición del sistema sin modificar (35), (36) y el del sistema modificado (35), (37) con  $\beta = 0$  (Dirichlet) y  $\beta = 1$  (Neumann). Los resultados se muestran en un gráfico semilogarítmico en la Figura 5. Ambas versiones del sistema modificado (con  $\beta = 0$  y 1) se vuelven singulares para cierto conjunto discreto de números de onda  $k$ , mientras que el sistema original está “razonablemente” bien condicionado. Recuérdese que el operador de Laplace 1D tiene un número de condición  $\propto h^{-2}$ , en particular para esta malla su número de condición es  $\sim 161$ . Estos números de onda, para los cuales ambas versiones del sistema modificado son singulares, coinciden salvo errores de aproximación con los modos propios del problema para las condiciones de contorno correspondientes. Por ejemplo, para  $\beta = 0$  los modos propios se producen cuando un número entero de semi-longitudes de onda entran en el dominio, es decir (ver Figura 6)

$$\begin{aligned} 1 = n\lambda &= n \frac{2\pi}{k} \\ \implies k &= n\pi, \quad n = 1/2, 1, 3/2 \dots \end{aligned} \quad (40)$$

y los modos correspondientes son

$$\psi_n(x) = \sin(2n\pi x) \quad (41)$$

Para estos valores de  $k$  el denominador en (39) se anula. Mientras tanto, para  $\beta = 1$  (condición de Neumann en  $x = 1$ ) las singularidades se producen cuando un número impar de cuartos de longitudes de onda entran en el dominio (ver Figura 7)

$$n = 1/4, 3/4, 5/4, \dots \quad (42)$$

Para  $k \approx 40$  existe una transición del sistema de ecuaciones, por la cual los modos discretos pasan a ser “evanescentes” en vez de oscilatorios. Esto ocurre cuando

$$1 - 1/2(kh)^2 < -1, \quad \implies k > \frac{2}{h} \quad (43)$$

que en este caso corresponde, efectivamente a  $k > 40$ . En este rango las ecuaciones cambian completamente de carácter y ambas versiones del sistema modificado pasan a tener un condicionamiento muy bajo, mientras que el esquema original pasa a tener un número de condición que tiende rápidamente a infinito. Esto correspondería en nuestro problema a números de Froude muy bajos, donde algunos autovalores no viscosos pasan a ser viscosos, sin embargo, en nuestro método este cambio de carácter no afectaría, ya que automáticamente, si un modo pasa de no viscoso a viscoso entonces no se hace el pasaje de la condición de contorno de aguas abajo a aguas arriba.

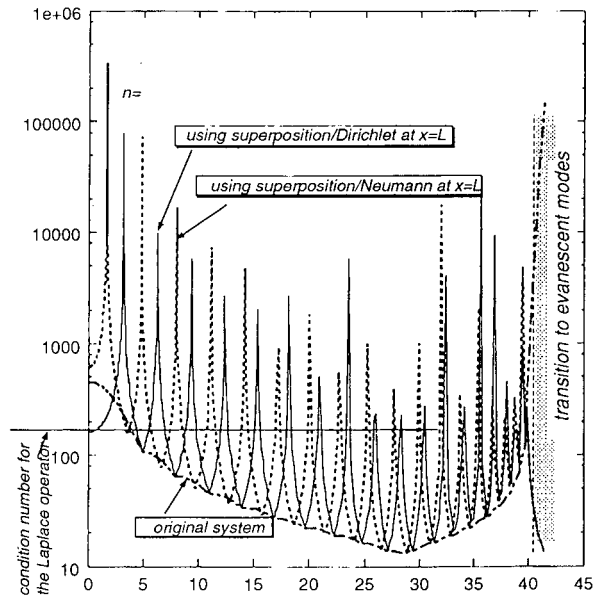


Figura 5. Número de condición para la ecuación modal 1D con el sistema original y el modificado con condiciones de contorno Dirichlet o Neumann aguas abajo

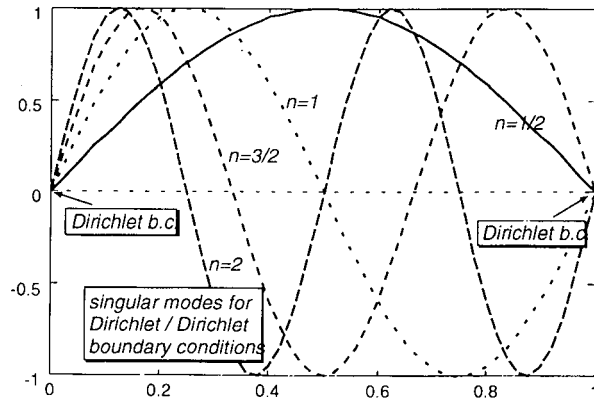


Figura 6. Modos propios del problema 1D con condiciones de contorno Dirichlet/Dirichlet

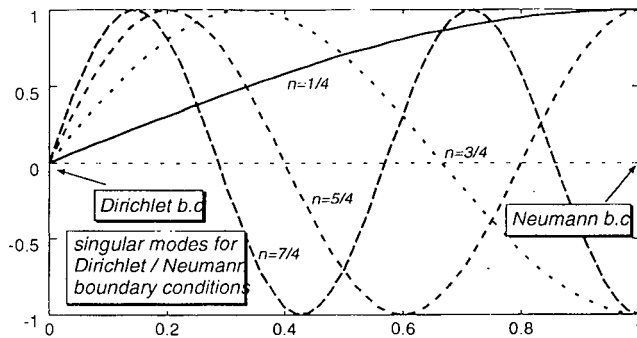


Figura 7. Modos propios del problema 1D con condiciones de contorno Dirichlet/Neumann

### Extensión al problema de resistencia de ola

En el caso del flujo con superficie libre el parámetro  $k$  debe asimilarse al número de onda característico del flujo  $K = g/U_\infty^2 \propto Fr^{-2}$  y este ejemplo nos permite extraer las siguientes conclusiones:

- Para flujo 2D (por ejemplo, el cilindro sumergido), es de esperar que el sistema modificado sea singular para un conjunto discreto de valores de  $Fr$ . Este conjunto debería mantener, aproximadamente  $\Delta Fr^{-2} = \text{cte}$ , es decir que este conjunto debería ser más denso hacia Froude bajos.
- En 3D, cada modo no viscoso genera su propio conjunto de valores donde el sistema modificado es singular, de manera que es de esperar que este sea más denso al refinar transversalmente.
- Si bien el cambiar el valor de  $\beta$  altera la posición de los puntos singulares, la situación no mejora. Experimentando con diferentes  $\beta$  se observa que el conjunto de valores singulares se va desplazando con  $\beta$  pero no hay ningún valor de  $\beta$  que los elimine. Si bien hemos intentado evitar el problema de los modos singulares, parece ser que el hecho de “cambiar de lugar” las condiciones de contorno, *lleva indefectiblemente a la aparición de modos singulares*.
- En la práctica el problema de los modos singulares no ha ocasionado inconvenientes. Hemos computado los números de condición para cada  $Fr$  en los diferentes problemas y si bien presenta un comportamiento como el descrito, es difícil (a menos que se hagan barridos muy “finos” en el número de Froude) que un punto del barrido se de tan cerca de una singularidad como para que el número de condición sea demasiado alto y esto afecte la precisión de los resultados. En el caso de que esto acarreará problemas se podría cambiar la condición de contorno que fue elegida. Esto corresponde a reemplazar los  $\mu_k$  por otra cosa en (14) y (30).
- Parece ser que aumentando la longitud del dominio de resolución hace más “denso” el conjunto de puntos singulares. Esta es otra razón (además del costo computacional) para tratar de acotar lo más posible la malla en la dirección longitudinal (eje  $x$ ). Recordemos que, bajo ciertas condiciones, por ejemplo perfil delgado, el método propuesto da soluciones que son independientes del punto donde se corta la malla, mientras esto sea fuera de la zona donde se produce la perturbación (la zona donde está el casco).

## EJEMPLOS NUMÉRICOS

### Método de superposición. Casco de la serie Wigley

Consideremos el casco Wigley modelo 1805 A a  $Fr = 0,5$ . El cálculo se hizo sobre una malla estructurada de  $51 \times 14 \times 14$  nodos (longitud/profundidad/manga) y se encontraron 14 modos no viscosos, ya que como mencionamos, en general hay tantos modos como nodos haya *según la manga*. En la Figura 8 vemos la contribuciones de los diferentes modos (las diferentes columnas de  $\mathbf{D}_{\phi\phi}^{-1}\mathbf{D}_{\phi\eta}$  en (34a) usados para el



cálculo de la resistencia. Han sido ordenados de acuerdo al  $|\mu_j|$  es decir, con respecto al número de onda. Así  $j = 1$  es el de mayor longitud de onda (menor  $k_j$ ) hasta llegar a  $j = 14$  que es el de menor longitud de onda (mayor  $k_j$ ). En la ref.<sup>4</sup> demostramos que la resistencia puede ser calculado a partir de la amplitud de las componentes de ola que son emitidas hacia aguas abajo. En la figura se puede observar la contribución a la resistencia al costado de cada modo.

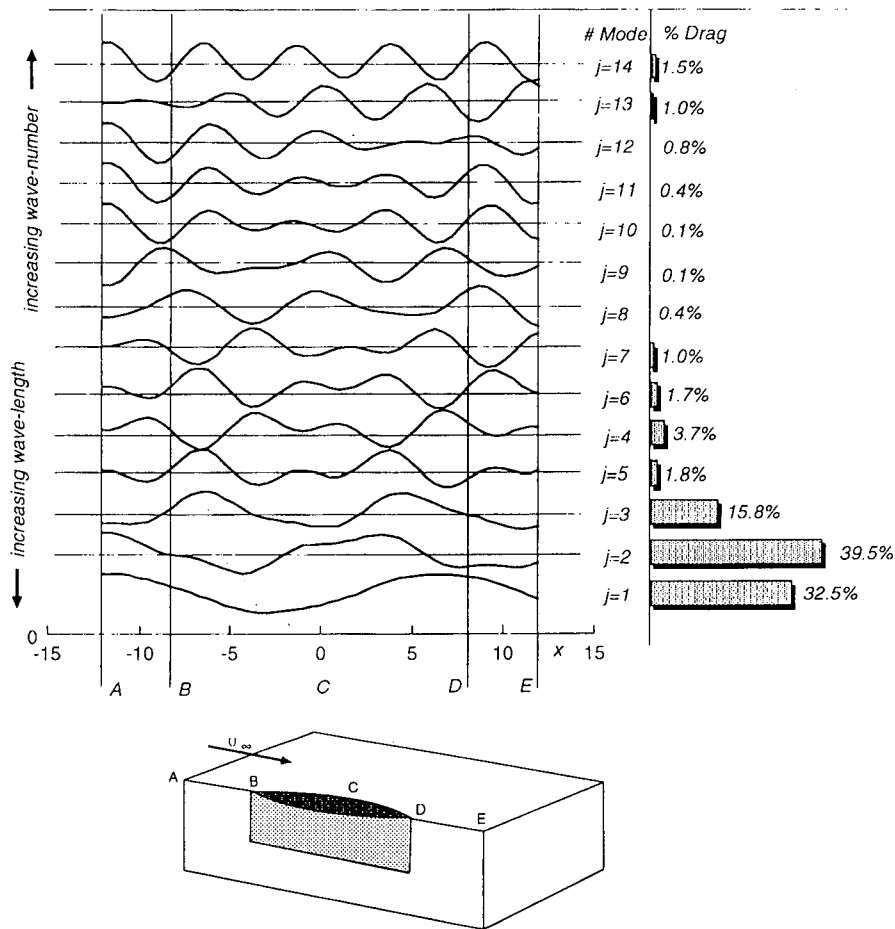


Figura 8. Modos usados en la superposición para el Wigley

Finalmente, en la Figura 9 vemos las curvas de elevación de la superficie para líneas aproximadamente paralelas a líneas de corriente y en la Figura 10 la curva de resistencia en función del Froude, donde notamos la buena resolución de los máximos secundarios, incluso para Froudes tan bajos como 0,12.

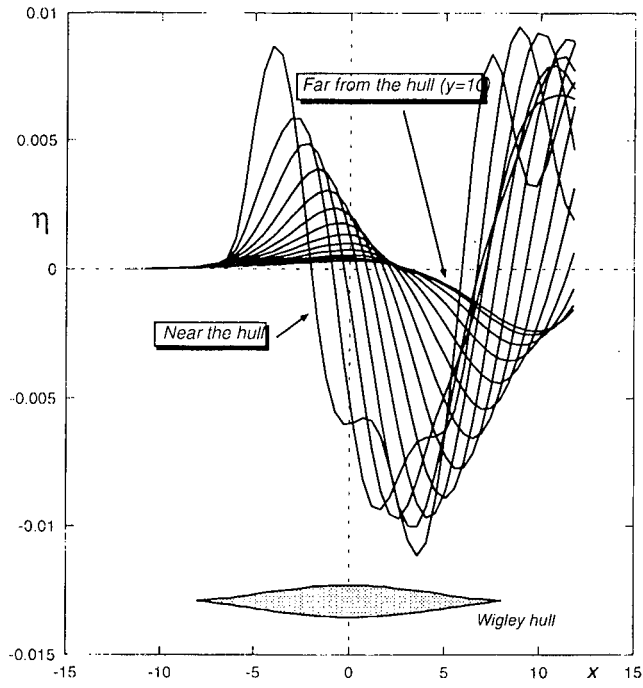


Figura 9. Elevación de la superficie sobre (cuasi) líneas de corriente

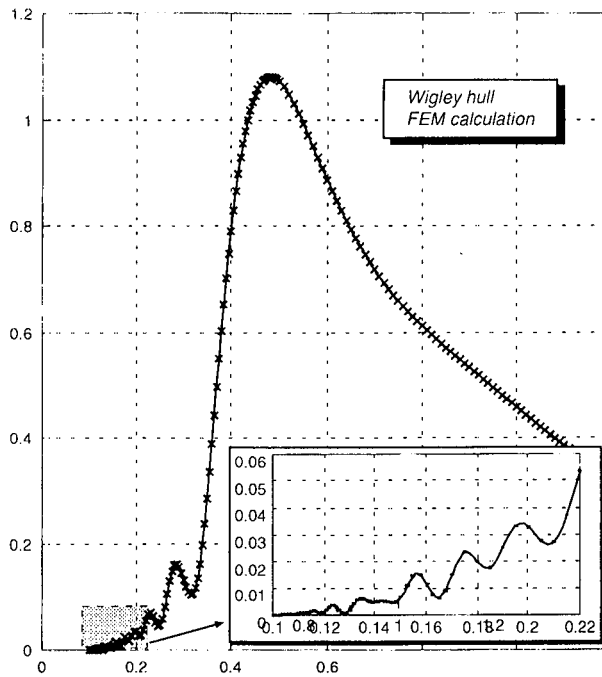


Figura 10. Curva de resistencia para el casco Wigley

### Cilindro sumergido en un canal

Este problema es 2D y consiste en un cilindro sumergido a una profundidad  $f$  (referida a su eje) de 4 veces su radio  $b$  (ver Figura 12). La profundidad del canal es  $H = 2f$ . La malla (ver Figura 11) es básicamente una malla tipo "O" alrededor del cilindro con dos capas adicionales estructuradas a la entrada y a la salida. La malla

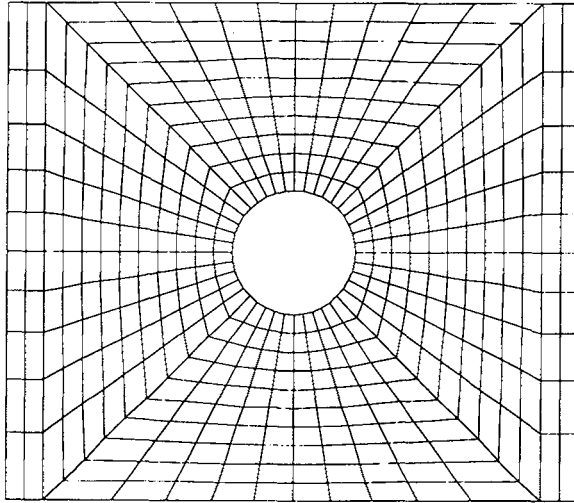


Figura 11. Malla de elementos finitos sobre el cilindro sumergido

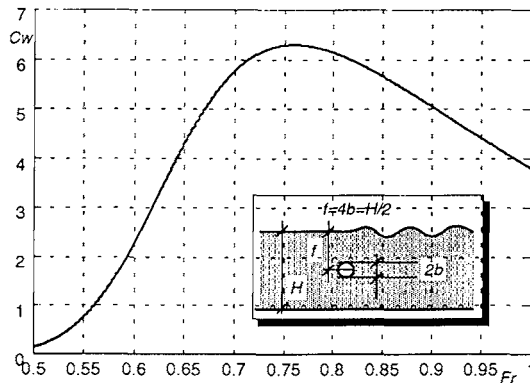


Figura 12. Curva de resistencia sobre un cilindro sumergido

básica contiene 10 elementos en la dirección radial y 40 en la circunferencial. A esta malla básica se le han agregado dos capas de elementos a la entrada y a la salida que es la parte "estructurada" necesaria para aplicar el método. El  $Fr$  se refiere a la profundidad, es decir,  $Fr = U/\sqrt{gf}$  y el coeficiente de arrastre ha sido adimensionalizado

y normalizado como

$$C_w = (f/b)^3 \frac{F_x}{\rho U_\infty^2 b} \quad (44)$$

El factor  $(f/b)^3$  hace que la curva de resistencia sea independiente del diámetro del cilindro en el límite  $b/f \ll 1$  (dipolo sumergido). El cálculo de la resistencia se realizó para 500 valores de  $Fr$  entre  $0,5 < Fr < 1$ , y al mismo tiempo calculamos el número de condición de la matriz  $\mathbf{D}_{\eta\phi}(\mathbf{D}_{\phi\phi}^{-1}\mathbf{D}_{\phi\eta})$  en el sistema (34b) (ver Figura 13).

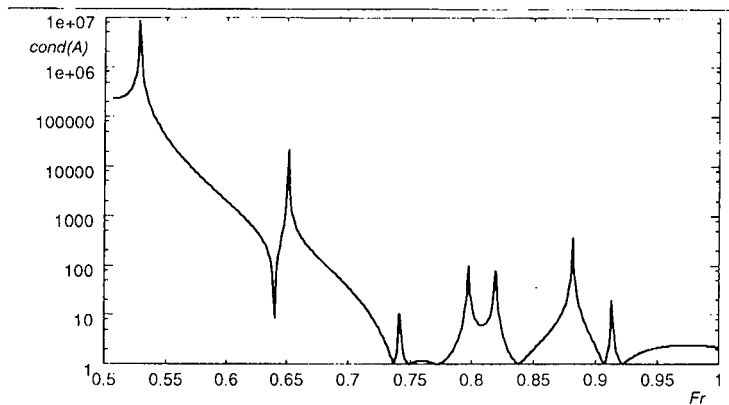


Figura 13. Número de condición para el problema del cilindro sumergido

Vemos que el número de condición presenta una serie de picos que indican un conjunto discreto de números de Froude para los cuales el sistema se hace singular. A pesar de esto la curva de resistencia no presenta ningún tipo de irregularidad, lo cual es una señal de que estos picos en el número de condición no llegan a afectar la precisión del método, al menos no dentro de los parámetros en que hemos realizado el experimento (grado de refinamiento y tipo de la malla, rango de números de Froude, etc.). Para números de Froude muy bajos ( $Fr < 0,6$ ) el número de condición crece y, a partir de cierto valor los resultados dejan de tener sentido. Todavía no tenemos una explicación satisfactoria para este comportamiento, pero de todas formas debemos recalcar que los valores del rango de valores de Froude para los cuales obtenemos resultados satisfactorios con este método supera ampliamente el que se obtiene con los otros métodos con los que hemos experimentado (fundamentalmente paneles+Dawson y FEM+Dawson).

## CONCLUSIONES

La condición de contorno absorbente DNL para el problema de resistencia no requiere ningún tipo de término disipativo y permite el cálculo de la resistencia en base al flujo de momento por ondas de gravedad a la salida del dominio de cálculo. Esto permite obtener curvas de resistencia con picos bien definidos y garantiza que la resistencia es siempre positiva. Sin embargo las condición de contorno absorbente implica el pasaje de un cierto número de condiciones de ecuaciones correspondientes a

las condiciones de contorno aguas abajo hacia el plano de entrada aguas arriba. Esto afecta notablemente el sistema de ecuaciones de manera que, además de perderse la simetría de la matriz, el sistema puede tener pivotes nulos. El método propuesto permite la resolución del sistema de ecuaciones factorizando una matriz simétrica similar a la que se obtiene para un problema de elementos finitos estándar. De esta forma el costo asociado a la resolución de este problema es similar al de un problema simple como el operador de Laplace, por ejemplo. La matriz a factorizar puede ser singular para un cierto conjunto finito de números de Froude, como ocurre con la ecuación de Helmholtz en una cavidad cerrada para las frecuencias que corresponden a los modos resonantes de la cavidad.

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, Argentina) y el Banco Interamericano de Desarrollo (BID) a través del subsidio BID 802/OC-AR PID Nr. 26, y por la Universidad Nacional del Litoral (Argentina). Se ha hecho uso intensivo de software distribuido por la *Free Software Foundation / GNU-Project*: Linux-OS, Octave, Tgif, compilador Fortran f2c y otros. Este trabajo fue realizado en cooperación con el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE, Barcelona, España).

### REFERENCIAS

1. M. Storti, J. D'Elía y S. Idelsohn, "Algebraic Discrete Non-Local (DNL) Absorbing Boundary Condition for the Ship Wave Resistance Problem", aceptado *J. Comp. Physics*, (1998).
2. G. Birkhoof, "*Hydrodynamics*", Greenwood Press Publishers, (1978).
3. C.W. Dawson, "A Practical Computer Method for Solving Ship-Wave Problems", in *Proceedings 2nd International Conference on Numerical Ships Hydrodynamics*, Berkeley, C.A., pp. 30, (1977).
4. M. Storti, J. D'Elía y S. Idelsohn, "Computing Ship Wave Resistance from Wave Amplitude with the DNL Absorbing Boundary Condition", aceptado *Comm. Num. Meth. Engng.*, (1998).
5. H.C. Raven, "A Solution Method for the Nonlinear Ship Wave Resistance Problem", Thesis Doctoral, Maritime Research Institute Netherlands (MARIN), (1995).
6. J. Broeze y J.E. Romate, "Absorbing Boundary Conditions for Free Surface Wave Simulations with a Panel Method", *J. Comp. Physics*, Vol. **99**, pp. 146, (1992).
7. Storti M., "Implementation Details of the Absorbing Boundary Condition for the Ship Wave-Resistance Problem. Computing the Drag from the Wave Amplitude", GTM Internal Report. (in Spanish, <ftp://galileo.unl.edu.ar/pub/wdrag10.ps.gz>).
8. J. D'Elía, "Numerical Methods for the Ship Wave-Resistance Problem", Thesis Doctoral, Univ. Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina), (1997).
9. J.V. Wehausen, "The Wave Resistance of Ships", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. **13**, pp. 93-245, (1973).

10. S. Ohring, "Three-Dimensional Ship Wave Generation Using an Efficient Finite Difference Scheme with Double Model Linearization", *J. Comp. Physics*, Vol. **41**, pp. 89-114, (1981).
11. Y. Tahara, F. Stern y B. Rosen, "An Interactive Approach for Calculating Ship Boundary Layers and Wakes for Nonzero Froude Number", *J. Comp. Physics*, Vol. **98**, pp. 33-53, (1992).
12. J. Farmer, L. Martinelli y A. Jameson, "Fast Multigrid Method for Solving Incompressible Hydrodynamic Problems with Free Surface", *AIAA Journal*, Vol. **32**, pp. 1175, (1994).
13. C. Baumann, M. Storti y S. Idelsohn, "A Petrov-Galerkin Technique for the Solution of Transonic and Supersonic Flows", *Comm. Num. Meth. Engng.*, Vol. **95**, pp. 49-70, (1992).
14. M. Storti, N. Nigro and S. Idelsohn "Equal-Order Interpolations: A Unified Approach to Stabilize the Incompressible and Convective Effects", *Comm. Num. Meth. Engng.*, Vol. **143**, 3-4, pp. 317-331, (1997).
15. N. Nigro, M. Storti y S. Idelsohn, "Fluid Flows Around Turbomachinery Using an Explicit Seudo-Temporal Euler FEM Code", *Comm. Num. Meth. Engng.*, Vol. **11**, pp. 199-211, (1995).
16. D. Givoli y J.B. Keller, "Non-Reflecting Boundary Conditions for Elastic Waves", *Wave Motion*, Vol. **12**, pp. 261-279, (1990).