

# DINÁMICA DE VIGAS DE SECCIÓN ABIERTA DE PARED DELGADA DEFORMABLES POR CORTE SUJETAS A UN ESTADO INICIAL DE TENSIONES

VÍCTOR H. CORTÍNEZ\*,\*\*

y

RAÚL E. ROSSI\*\*

\* *Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos  
Universidad Tecnológica Nacional  
11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina  
Tel. + 54-91-555 220, Tel/Fax + 54-91-555 311  
E-mail: vcortine@frbb.utn.edu.ar*

\*\* *Departamento de Ingeniería  
Universidad Nacional del Sur  
8000, Bahía Blanca, Argentina  
Tel. + 54-91-29357 (int. 267), Fax + 54-91-551 447, 560 320  
E-mail: rerossi@criba.edu.ar*

## RESUMEN

Se presenta una teoría general para el análisis dinámico de vigas de sección abierta de pared delgada tomando en consideración la deformabilidad por corte, la no uniformidad de las propiedades seccionales transversales y la existencia de un estado arbitrario de tensiones iniciales.

El presente enfoque, el cual se basa en una formulación variacional general de la teoría de la elasticidad, permite determinar en forma unificada la ecuación variacional unidimensional de movimiento así como las relaciones constitutivas para las resultantes de tensión. Posteriormente se determinan las ecuaciones diferenciales de movimiento.

Se desarrolla una formulación de elementos finitos basada en la presente teoría, la cual es usada para la determinación de frecuencias naturales de vibración. Se realizan determinaciones independientes mediante una solución analítica exacta de las presentes ecuaciones diferenciales.

Se realizan ejemplos numéricos para poner de manifiesto la importancia de los efectos considerados, asimismo como para mostrar la precisión del elemento propuesto.

## DYNAMICS OF SHEAR DEFORMABLE THIN WALLED OPEN BEAMS SUBJECTED TO INITIAL STRESSES

### SUMMARY

A general theory for the dynamic analysis of thin walled open beams taking into account shear deformability, variable cross-sectional properties and initial stresses is presented.

Recibido: Abril 1997

The present approach, which is based on a general variational formulation of the theory of elasticity, allows the determination, in a unified fashion, of the governing unidimensional variational equation of motion of the beam and the constitutive relations for the stress resultants. The motion differential equations are then obtained.

It is developed a finite element formulation based on the present theory, which is used for determining natural frequencies of vibrations. Independent determinations are performed for simply supported thin walled open beams by means of an analytical solution of the present differential equations.

Numerical experiments are done to show the importance of the considered effects and to assess the accuracy of the proposed finite element.

## INTRODUCCIÓN

El comportamiento estático y dinámico de vigas de sección abierta de pared delgada (VAPD) es de gran interés debido a que tales elementos son utilizados frecuentemente en la construcción metálica y aeroespacial por requerimientos de ahorro de peso. Por otra parte, son usados como modelos básicos de ciertas estructuras especiales tales como núcleos de edificios y cascos de barcos.

Estos elementos se hallan sujetos a considerables tensiones longitudinales producidas por el alabeo torsional no uniforme. Este hecho fue señalado primeramente por Timoshenko<sup>1</sup> al analizar la estática de vigas I doblemente simétricas. Varios desarrollos posteriores<sup>2,3</sup> convergen en la teoría de Vlasov<sup>4</sup> que modela el comportamiento estático y dinámico de vigas de pared delgada de sección abierta de forma arbitraria. Este modelo ha sido utilizado en diversos problemas dinámicos, asimismo como en problemas de inestabilidad elástica<sup>5,6</sup>.

La teoría de Vlasov no considera la flexibilidad de corte de la viga. Sin embargo, este efecto conjuntamente con las inercias rotatoria y de alabeo pueden tener importancia al analizar el comportamiento dinámico de vigas cortas o cuando es necesario considerar modos superiores de vibración. Esto es perfectamente conocido para el caso de vigas planas<sup>7</sup>.

Los trabajos teniendo en cuenta los efectos mencionados en el comportamiento dinámico de VAPD son más bien escasos. Bishop y Price<sup>8</sup> desarrollan un modelo que considera los efectos de corte e inercia rotatoria asociados con el desplazamiento lateral de acuerdo a la teoría de Timoshenko para vigas planas. Esta teoría fue implementada computacionalmente mediante el método de elementos finitos<sup>9</sup>. Un interesante enfoque ha sido presentado recientemente por Ambrosini, Riera y Danesi<sup>10</sup>, quienes consideraron el efecto de inercia de alabeo además de los efectos de corte e inercia rotatoria asociados con el movimiento lateral. El método de integración numérica propuesto por ellos permite el análisis dinámico de materiales viscoelásticos lineales.

Los trabajos señalados anteriormente no contemplan la deformación de corte debida al alabeo torsional. Los primeros estudios teniendo en cuenta este efecto estuvieron restringidos a vigas de secciones I, U y V<sup>11,12</sup>. Para el caso de secciones arbitrarias existen según el conocimiento de los autores tan sólo tres trabajos que lo consideran<sup>13,14,15</sup>.

No obstante ninguna de las investigaciones citadas analiza el caso de barras flexibles al corte sometidas a un estado de tensiones iniciales. Con el propósito de

solucionar esta situación en el presente artículo se presenta una teoría general para la dinámica de VAPD que considera la flexibilidad de corte, la no uniformidad de las propiedades seccionales transversales y la existencia de un estado arbitrario de tensiones iniciales. La formulación teórica se basa en dos ecuaciones variacionales generales de la dinámica tridimensional de un cuerpo elástico en las cuales el tensor de tensiones y el vector de desplazamientos son funciones variacionalmente independientes. Mediante una adecuada adopción de estas funciones se determinan la ecuación variacional unidimensional de movimiento y las ecuaciones constitutivas para las resultantes de tensión. Posteriormente se obtienen las ecuaciones diferenciales de movimiento.

La teoría propuesta es utilizada para el análisis de vibraciones libres. Se desarrolla una solución general computacional mediante una formulación de elementos finitos basada en la presente teoría. Las funciones de forma son elegidas de manera tal de evitar el efecto de bloqueo por corte. Por otra parte, se obtiene una solución analítica exacta para la determinación de frecuencias naturales de VAPD uniformes simplemente apoyadas.

Se presentan ejemplos numéricos con el propósito de ilustrar acerca de la influencia de los efectos considerados y también de demostrar la precisión del elemento propuesto.

## TEORÍA

### Formulación variacional

Se considera un cuerpo elástico isótropo sujeto a un estado estático inicial de tensiones  $\tau_{ij}$  y desplazamientos  $v_i$  generado por cierta distribución de fuerzas externas.

Un sistema de fuerzas incrementales de volumen  $F_i$  y de superficie  $\bar{T}_i$  (sobre la superficie  $S_\tau$ ) que se aplique a continuación sobre el cuerpo produce una distribución de tensiones incrementales  $\sigma_{ij}$  y de desplazamientos incrementales  $u_i$ .

El comportamiento dinámico resultante puede ser adecuadamente descrito por medio de las ecuaciones variacionales

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \tau_{ij} \delta \psi_{ij} dV - \int_V \left( F_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \delta u_i dV - \int_{S_\tau} \bar{T}_i \delta u_i dS = 0 \quad (1a)$$

$$\int_V \left( \varepsilon_{ij} - \frac{\partial W_c}{\partial \sigma_{ij}} \right) \delta \sigma_{ij} dV = 0, \quad i, j = x, y, z \quad (1b)$$

siendo

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \psi_{ij} = u_{k,i} u_{k,j}, \quad W_c(\sigma_{ij}) = -\frac{\mu}{2E}(\sigma_{ii})^2 + \frac{1}{4G}\sigma_{ij}\sigma_{ij} \quad (2a, b, c)$$

donde  $x, y, z$  son coordenadas cartesianas,  $t$  coordenada temporal,  $W_c$  energía volumétrica complementaria incremental,  $\varepsilon_{ij}$  y  $\psi_{ij}$  componentes lineales y no lineales,

respectivamente, del tensor de deformaciones incrementales de Green-Lagrange,  $\rho$  densidad del material,  $E$  módulo de elasticidad,  $G$  módulo de elasticidad transversal y  $\mu$  coeficiente de Poisson. Ha sido empleada la convención de suma de Einstein. Estas ecuaciones pueden ser obtenidas naturalmente a partir del principio de Reissner<sup>16</sup>. Es inmediato notar que la primera de ellas corresponde al principio de D' Alembert de los trabajos virtuales, mientras que la segunda constituye la ley de Hooke expresada en forma variacional. Debe reconocerse que  $\sigma_{ij}$  y  $u_i$  son variacionalmente independientes, estando el vector de desplazamientos sujeto a la restricción

$$\delta u_i = 0, \quad (u_i = \bar{u}_i) \quad \text{en } Su \quad (3)$$

Se supone que el cambio de configuración generado por el campo de desplazamientos iniciales es despreciable de manera tal que pueda describirse la geometría del cuerpo en la configuración no deformada.

### Procedimiento de unidimensionalización

Se considera a continuación una viga de pared delgada como la mostrada en la Figura 1 donde  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$  son los ejes principales,  $y$  y  $z$  los ejes paralelos a los primeros teniendo su origen en el centro de corte SC definido de acuerdo con Vlasov y  $y_0$  y  $z_0$  las coordenadas del centroide medidas con respecto a SC. Se define también un sistema auxiliar curvilíneo  $s, n$ . La geometría de la línea media de la sección se define mediante letras mayúsculas  $Y(s)$ ,  $Z(s)$  (o  $\bar{Y}(s)$ ,  $\bar{Z}(s)$ ).

Con el propósito de formular una teoría dinámica unidimensional de vigas se utiliza el procedimiento de Kantorovich<sup>17</sup> para "unidimensionalizar" las ecuaciones generales tridimensionales (1). Para ello es necesario efectuar ciertas suposiciones con respecto a las distribuciones de tensiones y desplazamientos sobre la sección transversal de la viga. Estas pueden realizarse a partir de las hipótesis que se exponen a continuación:

- a) La sección de la viga es indeformable en su plano aunque es libre de alabear fuera de éste.
- b) Se supone que el tensor de tensiones resulta de la composición de dos estados. El primero de ellos es el estado de torsión pura de Saint Venant y el segundo corresponde a un estado membranal (uniforme en el espesor).

Luego los desplazamientos son adoptados en la forma

$$u_x = \varsigma(x) - \theta_z(x)\bar{y} - \theta_y(x)\bar{z} + \theta(x) \omega(s) + [w(y, z) - \omega(s)] \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4a)$$

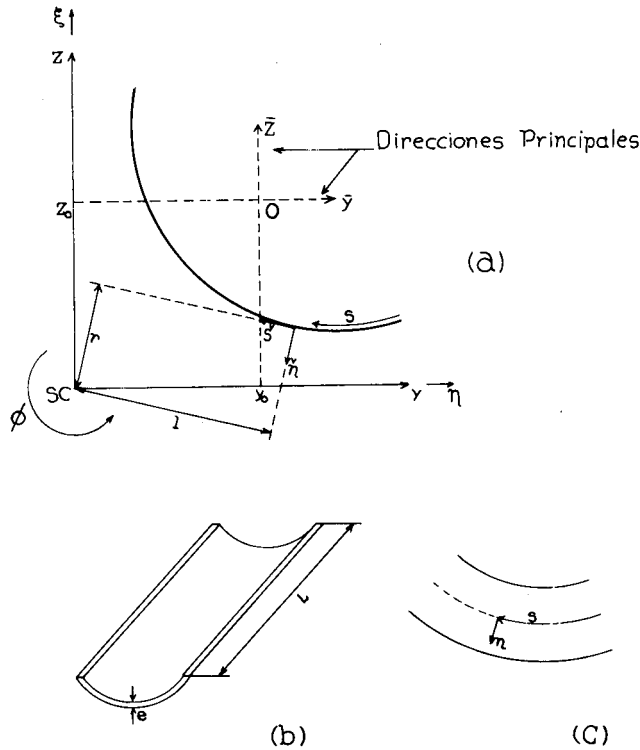
$$u_y = \eta(x) - \phi(x)z, \quad u_z = \xi(x) + \phi(x)y \quad (4b, c)$$

donde  $\varsigma$  es el desplazamiento axial centroidal,  $\eta$  y  $\xi$  los desplazamientos transversales del centro de corte,  $\phi$  es la rotación torsional,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  denotan rotaciones alrededor de los ejes principales centroidales  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$ , respectivamente,  $\omega(s)$  denota la coordenada sectorial definida de acuerdo a Vlasov,  $s$  la coordenada curvilínea mostrada en la Figura 1,  $\theta$  una función que describe la variación de alabeo a lo largo de la viga y  $w(y, z)$  la función de alabeo de Saint Venant.

Para el caso de una viga de pared delgada puede expresarse con suficiente precisión

$$w(y, z) - \omega(s) = l(s)n \tag{5}$$

donde  $n$  es la coordenada curvilínea mostrada en la Figura 1, mientras que  $l(s)$  denota la distancia desde el centro de corte a la normal a la línea media de la sección en el punto considerado,  $y$  es considerada positiva cuando el versor  $n$  gira en forma horaria alrededor de SC.



O centroide, SC centro de corte,  $s, n$  coordenadas curvilíneas,  $\eta, \xi$  desplazamientos transversales del centro de corte,  $\phi$  rotación torsional

Figura 1. Geometría del elemento estructural analizado

Debe notarse que los desplazamientos transversales dados por (4b) y (4c) corresponden a la hipótesis de indeformabilidad de la sección transversal en su plano y coinciden con la adopción de Vlasov. En cambio el desplazamiento longitudinal dado por (4a) es más general que su correspondiente según la teoría clásica de Vlasov y coincide con éste si se imponen las restricciones

$$\theta_z = \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \theta_y = \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \theta = \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{6}$$

De todas maneras éstas no son aquí consideradas.

Reemplazando las expresiones (4) en la (2a) y transformando tensorialmente al sistema  $(x, s, n)$  puede determinarse la deformación lineal de distorsión en la línea media de la sección como

$$\varepsilon_{xs}(x, s, 0) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \theta_z \right) \cos(\alpha_1) + \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} - \theta_y \right) \cos(\alpha_2) + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \theta \right) r \right] \quad (7)$$

donde

$$\cos(\alpha_1) = \frac{dY}{ds}, \quad \cos(\alpha_2) = \frac{dZ}{ds}, \quad r = \left( -Z \frac{dY}{ds} + Y \frac{dZ}{ds} \right) \quad (8a, b, c)$$

$\cos(\alpha_1)$  y  $\cos(\alpha_2)$  son las componentes del versor director correspondiente a la coordenada curvilínea  $s$ . Los primeros dos términos en la expresión (7) corresponden al efecto de corte asociado al movimiento lateral, mientras que el último término puede ser considerado como el efecto de corte asociado al alabeo no uniforme. Puede observarse que el hecho de no imponer las restricciones (6) implica que, a diferencia de la hipótesis simplificativa de Vlasov, la deformación de distorsión en la línea media de la sección no se anula.

Por otra parte, las componentes no nulas del tensor de tensiones incrementales son adoptadas en la forma

$$\sigma_{xx} = -\frac{N(x)}{A} + \frac{M_y(x)}{I_y} \bar{z} + \frac{M_z(x)}{I_z} \bar{y} + \frac{B(x)}{C_w} \omega(s) \quad (9a)$$

$$\sigma_{xs} = \frac{T_w(x)}{C_w} \lambda_w(s) - \frac{Q_y(x)}{I_z} \lambda_z(s) - \frac{Q_z(x)}{I_y} \lambda_y(s) + 2 \frac{[M_x(x) - T_w(x)]}{J} n \quad (9b)$$

siendo

$$\lambda_w(s) = \int_0^s \omega(s) ds; \quad \lambda_z(s) = \int_0^s \bar{Y}(s) ds; \quad \lambda_y(s) = \int_0^s \bar{Z}(s) ds \quad (10)$$

donde  $N(x)$  es el esfuerzo normal,  $M_y(x)$  y  $M_z(x)$  los momentos flectores con respecto a los ejes centroidales  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$ , respectivamente,  $B(x)$  el bimomento,  $T_w(x)$  el momento flexotorsional,  $Q_y(x)$  y  $Q_z(x)$  los esfuerzos de corte en las direcciones  $y$  y  $z$  respectivamente,  $M_x(x)$  el momento torsor total,  $(M_x - T_w)$  el momento torsor de Saint Venant,  $A$  el área de la sección transversal,  $I_y$  y  $I_z$  los momentos de inercia principales con respecto a  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$ , respectivamente,  $C_w$  la constante de alabeo y  $J$  la constante de torsión. Debe observarse que estas expresiones cumplen con la hipótesis b) señalada anteriormente.

Las tensiones de corte en el sistema  $x, y, z$  se obtienen inmediatamente mediante la transformación tensorial

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xs} \cos(\alpha_1), \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xs} \cos(\alpha_2) \quad (11a, b)$$

El campo tensional adoptado es estáticamente compatible y coincide con el de la teoría de Vlasov, aunque aquí los esfuerzos se mantienen como funciones independientes. Su relación con los desplazamientos generalizados viene dada por (1b).

La sustitución de las expresiones (4), (9) y (11) en (1) permite, luego de integrar con respecto a las variables  $y$  y  $z$ , obtener nuevas ecuaciones variacionales unidimensionales cuyas funciones incógnitas vienen dadas por los desplazamientos generalizados y los esfuerzos (o resultantes de tensión)  $\varsigma$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ ,  $\theta$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\phi$ ,  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $B$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $T_w$  y  $M_x$ .

### Ecuaciones constitutivas para los esfuerzos

Reemplazando las expresiones (4), (9) y (11) en la ecuación (1b), de acuerdo a lo explicado en la sección anterior y reconociendo la independencia variacional de los esfuerzos, es posible arribar a las siguientes ecuaciones constitutivas

$$N = EA \frac{\partial \varsigma}{\partial x}; \quad M_y = -EI_y \frac{\partial \theta_y}{\partial x}; \quad M_z = -EI_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \quad (12a, b, c)$$

$$B = EC_w \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad M_x - T_w = GJ \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (12d, e)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - \theta = R_{(1,1)} T_w + R_{(1,2)} Q_y + R_{(1,3)} Q_z \quad (12f)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - \theta_z = R_{(2,1)} T_w + R_{(2,2)} Q_y + R_{(2,3)} Q_z \quad (12g)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} - \theta_y = R_{(3,1)} T_w + R_{(3,2)} Q_y + R_{(3,3)} Q_z \quad (12h)$$

donde

$$\begin{aligned} R_{(1,1)} &= \frac{e}{GC_w^2} \int_0^m \lambda_w^2 ds; & R_{(1,2)} &= R_{(2,1)} = \frac{e}{GC_w I_z} \int_0^m \lambda_w \lambda_z ds; \\ R_{(2,2)} &= \frac{e}{GI_z^2} \int_0^m \lambda_z^2 ds; & R_{(1,3)} &= R_{(3,1)} = \frac{e}{GC_w I_y} \int_0^m \lambda_w \lambda_y ds; \\ R_{(3,3)} &= \frac{e}{GI_y^2} \int_0^m \lambda_y^2 ds; & R_{(2,3)} &= R_{(3,2)} = \frac{e}{GI_y I_z} \int_0^m \lambda_y \lambda_z ds; \end{aligned} \quad (13a - f)$$

Si el espesor  $e$  resultara ser una función de  $s$ , las expresiones (13) son todavía aproximadamente válidas con tal de considerar el espesor promedio.

Estas mismas ecuaciones constitutivas han sido halladas por un camino menos directo que el presente por Capuani *et al.*<sup>15</sup>. Por otra parte, para el caso de barras sin torsión fueron recientemente obtenidas<sup>18,19</sup> relaciones equivalentes a éstas, si se considera  $\theta = \phi = 0$ . En los ejemplos analizados en estos últimos trabajos es posible notar que el efecto de los términos fuera de la diagonal en las expresiones (12f-h) es pequeño excepto tal vez para vigas muy cortas cuya sección transversal presente gran asimetría, o al considerar modos de vibración muy altos. De todas maneras en estos

casos podría también ser de importancia la deformabilidad de la sección transversal en su plano aquí despreciada. En consecuencia puede proponerse una versión simplificada de las relaciones (12f-h) la cual no tiene en cuenta el acoplamiento de corte dado por los coeficientes fuera de la diagonal. Esta puede ser escrita como

$$T_w = GK_w \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \theta \right); \quad Q_y = GK_y \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \theta_z \right); \quad Q_z = GK_z \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta_z \right) \quad (14a, b, c)$$

donde

$$GK_w = \frac{1}{R_{(1,1)}}; \quad GK_y = \frac{1}{R_{(2,2)}}; \quad GK_z = \frac{1}{R_{(3,3)}} \quad (15a, b, c)$$

Si la sección es doblemente simétrica, las expresiones (14) son exactas. La conveniencia práctica de utilizar la versión simplificada dada por estas ecuaciones es doble, por una parte deben calcularse tres coeficientes de rigidez de corte en lugar de seis, y por otra parte el sistema gobernante de ecuaciones diferenciales resultante (19) se desacopla para la situación estática sin tensiones iniciales de igual manera que en la teoría de Vlasov.

Debe observarse que la presente formulación no requiere el uso de factores de corrección por corte ajenos a la teoría.

### Ecuación variacional unidimensional de movimiento

Sustituyendo las expresiones (4), (9) y (11) en la ecuación tridimensional (1a), integrando esta última con respecto a  $y$  y  $z$  y despreciando términos de orden superior es posible llegar a

$$L_K + L_{KG} + L_M + L_P = 0 \quad (16)$$

donde

$$L_K = \int_0^L \left[ N \delta \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - M_y \delta \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) - M_z \delta \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) + B \delta \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + Q_y \delta \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \theta_z \right) + \right. \\ \left. + Q_z \delta \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} - \theta_y \right) + T_w \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \theta \right) + (M_x - T_w) \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] dx \quad (17a)$$

$$L_{KG} = \int_0^L \left\{ \frac{N^0}{2} \delta \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{I_s}{A} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + 2y_0 \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - 2z_0 \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{M_z^0}{2} \delta \left[ \beta_z \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] + \frac{M_y^0}{2} \delta \left[ \beta_y \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] + \frac{B^0}{2} \delta \left[ \beta_w \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + M_x^0 \delta \left[ \alpha \theta_z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + (1 + \alpha) \theta_y \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right] + Q_y^0 \delta \left[ - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \theta_z + \phi \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] + \right. \\ \left. + Q_z^0 \delta \left[ - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \theta_y + \phi \left( - \frac{\partial \eta}{\partial x} + z_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] \right\} dx \quad (17b)$$



$$L_M = \int_0^L \rho \left[ A \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \delta \zeta + I_z \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \delta \theta_z + I_y \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta \theta_y + C_w \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta \theta + A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\eta - z_0 \phi) \delta \eta + \right. \\ \left. + A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\xi + y_0 \phi) \delta \xi + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-Az_0 \eta + Ay_0 \xi + I_s \phi) \delta \phi \right] dx \tag{17c}$$

$$L_P = \int_0^L (-q_x \delta \zeta - q_y \delta \eta - q_z \delta \xi + m_z \delta \theta_z + m_y \delta \theta_y - b \delta \theta - m_x \delta \phi) dx + \\ + [\bar{N} \delta \zeta - \bar{M}_z \delta \theta_z - \bar{M}_y \delta \theta_y + \bar{B} \delta \theta + \bar{Q}_y \delta \eta + \bar{Q}_z \delta \xi + \bar{M}_x \delta \phi]_{x=0}^{x=L} \tag{17d}$$

Los parámetros que figuran en (17) tienen el siguiente significado:  $m_z$ ,  $m_y$  y  $m_x$  son los momentos externos por unidad de longitud con respecto a  $\bar{z}$ ,  $\bar{y}$ ,  $x$ , respectivamente,  $q_x$ ,  $q_y$  y  $q_z$  fuerzas externas por unidad de longitud en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente,  $b$  bimomento externo por unidad de longitud,  $I_s$  momento de segundo orden con respecto al centro de corte,  $\bar{N}$ ,  $\bar{M}_z$ ,  $\bar{M}_y$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{Q}_y$ ,  $\bar{Q}_z$ ,  $\bar{M}_x$  esfuerzos incrementales externos actuando en los extremos y  $N^0$ ,  $M_z^0$ ,  $M_y^0$ ,  $B^0$ ,  $Q_y^0$ ,  $Q_z^0$ ,  $T_w^0$ ,  $M_x^0$  esfuerzos iniciales. También han sido definidos los coeficientes

$$\alpha = \left( \int_A \tau_{xy} \bar{z} dA \right) \frac{1}{M_x^0}; \quad \beta_z = \frac{\int_A \bar{y} (y^2 + z^2) dA}{I_z} \tag{18a, b}$$

$$\beta_y = \frac{\int_A \bar{z} (y^2 + z^2) dA}{I_y}; \quad \beta_w = \frac{\int_A \omega (y^2 + z^2) dA}{C_w} \tag{18c, d}$$

Debe notarse que  $L_K$ ,  $L_{KG}$ ,  $L_M$  y  $L_P$  representan los trabajos virtuales debidos a los esfuerzos incrementales, los esfuerzos iniciales, las fuerzas de inercia y las fuerzas externas, respectivamente.

La ecuación variacional unidimensional (16) junto a las relaciones constitutivas (12) (o su versión simplificada) constituyen las ecuaciones rectoras del comportamiento dinámico de la viga de pared delgada en consideración y son la base de la formulación de elementos finitos que se desarrolla más adelante.

### Ecuaciones diferenciales de movimiento

Las ecuaciones gobernantes en forma diferencial pueden ser obtenidas mediante la aplicación del cálculo variacional a la expresión (16). Operando de esta manera se llega a

$$-\frac{\partial N}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (Q_y^0 \theta_z + Q_z^0 \theta_y)} = q_x \tag{19a}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial x} - Q_y + \rho I_z \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} - \underbrace{Q_y^0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha M_x^0 \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \alpha) M_x^0 \theta_y]} = -m_z \tag{19b}$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\eta - z_0 \phi) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( N^0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (M_y^0 + N^0 z_0) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} (Q_z^0 \phi)} = q_y \quad (19c)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z + \rho I_y \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} - \underbrace{Q_z^0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (1 + \alpha) M_x^0 \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha M_x^0 \theta_z)} = -m_y \quad (19d)$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\xi + y_0 \phi) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( N^0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ (M_z^0 + N^0 y_0) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} (Q_y^0 \phi)} = q_z \quad (19e)$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} - T_w + \rho C_w \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = b \quad (19f)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{I_s}{A} \phi - z_0 \eta + y_0 \xi \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ N^0 \left( -\frac{I_s}{A} \frac{\partial \phi}{\partial x} - y_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} + z_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] + \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left[ (M_z^0 \beta_z + M_y^0 \beta_y + B^0 \beta_w) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left( M_z^0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( M_y^0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \\ & + \underbrace{Q_y^0 \left( y_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (Q_y^0 y_0 \phi) + Q_z^0 \left( z_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (Q_z^0 z_0 \phi)} = m_x \end{aligned} \quad (19g)$$

con las condiciones de contorno (en  $x = 0, L$ )

$$N - \underbrace{Q_y^0 \theta_z - Q_z^0 \theta_y} - \bar{N} = 0 \quad \circ \quad \delta \zeta = 0 \quad (20a)$$

$$-M_z + \underbrace{(1 + \alpha) M_x^0} + \bar{M}_z = 0 \quad \circ \quad \delta \theta_z = 0 \quad (20b)$$

$$Q_y + \underbrace{N^0 \frac{\partial \eta}{\partial x} - (M_y^0 + N^0 z_0) \frac{\partial \phi}{\partial x}} - Q_z^0 \phi - \bar{Q}_y = 0 \quad \circ \quad \delta \eta = 0 \quad (20c)$$

$$-M_y + \underbrace{\alpha M_x^0} + \bar{M}_y = 0 \quad \circ \quad \delta \theta_y = 0 \quad (20d)$$

$$Q_z + \underbrace{N^0 \frac{\partial \xi}{\partial x} + (M_z^0 + N^0 y_0) \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q_y^0 \phi - \bar{Q}_z}_{=0} = 0 \quad \text{o} \quad \delta \xi = 0 \quad (20e)$$

$$B - \bar{B} = 0 \quad \text{o} \quad \delta \theta = 0 \quad (20f)$$

$$\begin{aligned} M_x + \underbrace{N^0 \left( \frac{I_s}{A} \frac{\partial \phi}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} - z_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + M_z^0 \left( \beta_z \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + M_y^0 \left( \beta_y \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)}_{=0} + \\ + \underbrace{B^0 \beta_w \frac{\partial \phi}{\partial x} + (Q_y^0 y_0 + Q_z^0 z_0) \phi - \bar{M}_x}_{=0} = 0 \quad \text{o} \quad \delta \phi = 0 \end{aligned} \quad (20g)$$

Si se expresan los esfuerzos de acuerdo con las relaciones constitutivas (12a-h) (o 12a-d, 14a-c), éste resulta ser un sistema acoplado de siete ecuaciones diferenciales cuyas incógnitas son los desplazamientos generalizados  $\zeta$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ ,  $\theta$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  y  $\phi$ . Para su mejor visualización han sido subrayados los términos correspondientes al efecto del estado inicial de tensiones. Debe observarse que estas ecuaciones resultan aún aproximadamente válidas para vigas de sección transversal variable, mientras las direcciones principales no varíen, con tal de tomar los parámetros característicos de la sección transversal como funciones de  $x$ .

Estas ecuaciones constituyen uno de los sistemas más completos para el análisis dinámico lineal de VAPD, teniendo como casos particulares a los modelos correspondientes a las referencias<sup>2,8-12</sup>, complementando además en varios aspectos a las teorías propuestas en los estudios<sup>13-15</sup>.

Puede demostrarse que cuando las longitudes de onda de los modos de vibración son muy grandes con respecto a las dimensiones de la sección transversal (en el caso estático cuando la viga es muy esbelta) las presentes ecuaciones son equivalentes a las de Vlasov. Esto también puede ser observado mediante los resultados numéricos de las frecuencias naturales determinadas en forma exacta, como se muestra más adelante.

Es interesante mencionar las siguientes situaciones de desacoplamiento de estas ecuaciones:

- Si no existen tensiones de corte iniciales, la ecuación de movimiento axial (19a) junto con sus respectivas condiciones de contorno resultan desacopladas del resto.
- En la situación estática cuando no existen tensiones iniciales resultan desacopladas las respuestas axial (19a), lateral (19b y c según  $y$  y 19d y e según  $z$ ) y torsional (19f y g), si son utilizadas las relaciones constitutivas (14a-c).

El sistema gobernante dado por (19, 20) es de utilidad para la obtención de soluciones analíticas exactas para ciertos casos particulares, como se muestra más adelante, asimismo como para la solución aproximada mediante métodos basados en la formulación diferencial tales como el de cuadratura diferencial<sup>20</sup>, el método de Ambrosini, Riera y Danesi<sup>10</sup> y métodos de diferencias finitas.

## ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES

### Solución general computacional

Con el propósito de analizar el problema de vibraciones libres de una viga de sección abierta de pared delgada teniendo una vinculación y un estado inicial de tensiones arbitrarias se desarrolla a continuación una formulación de elementos finitos.

Se considera un elemento uniforme de dos nodos con siete grados de libertad, en cada uno de ellos, correspondientes a los desplazamientos generalizados. Por consiguiente el vector de desplazamientos nodales del elemento puede escribirse como

$$\mathbf{p} = [\zeta^{(1)}, \eta^{(1)}, \theta_z^{(1)}, \xi^{(1)}, \theta_y^{(1)}, \phi^{(1)}, \theta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \eta^{(2)}, \theta_z^{(2)}, \xi^{(2)}, \theta_y^{(2)}, \phi^{(2)}, \theta^{(2)}]^T \quad (21)$$

El campo de desplazamientos del elemento es interpolado mediante

$$\begin{aligned} \zeta &= a_0 + a_1 \tilde{x}; & \eta &= b_0 + b_1 \tilde{x} + b_2 \tilde{x}^2 + b_3 \tilde{x}^3 \\ \theta_z &= b_1 + \frac{\chi_1 b_3}{2} + 2b_2 \tilde{x} + 3b_3 \tilde{x}^2; & \xi &= c_0 + c_1 \tilde{x} + c_2 \tilde{x}^2 + c_3 \tilde{x}^3 \\ \theta_y &= c_1 + \frac{\chi_2 c_3}{2} + 2c_2 \tilde{x} + 3c_3 \tilde{x}^2; & \phi &= d_0 + d_1 \tilde{x} + d_2 \tilde{x}^2 + d_3 \tilde{x}^3 \\ \theta &= d_1 + \frac{\chi_3 d_3}{2} + 2d_2 \tilde{x} + 3d_3 \tilde{x}^2 \end{aligned} \quad (22a - g)$$

donde los coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  y  $d_i$  son funciones de tiempo indeterminadas, mientras que

$$\tilde{x} = \frac{x}{l_e}; \quad \chi_1 = \frac{12EI_z}{GK_y l_e^2}; \quad \chi_2 = \frac{12EI_y}{GK_z l_e^2}; \quad \chi_3 = \frac{12EC_w}{GK_w l_e^2} \quad (23a - d)$$

$l_e$  denota la longitud del elemento.

Esta interpolación, la cual puede ser considerada como una generalización de aquella propuesta por McCalley y Archer<sup>21</sup>, produce

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - \theta_z = -\frac{\chi_1 b_3}{2}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} - \theta_y = -\frac{\chi_2 c_3}{2}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} - \theta = -\frac{\chi_3 d_3}{2} \quad (24a - c)$$

Luego puede observarse que cuando  $\chi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) tiende a cero, esto es cuando la viga es muy esbelta, las expresiones (24) corresponden a las restricciones de la teoría de Vlasov (dadas por las expresiones (6)). Consecuentemente este elemento reproduce, en el límite, la mencionada teoría evitando el fenómeno de bloqueo por corte.

Los coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  y  $d_i$  pueden ser expresados en función de los desplazamientos nodales obteniéndose las siguientes relaciones

$$\zeta = \mathbf{N}_1 \mathbf{p}; \quad \eta = \mathbf{N}_2 \mathbf{p}; \quad \theta_z = \mathbf{N}_3 \mathbf{p}; \quad \xi = \mathbf{N}_4 \mathbf{p}; \quad \theta_y = \mathbf{N}_5 \mathbf{p}; \quad \phi = \mathbf{N}_6 \mathbf{p}; \quad \theta = \mathbf{N}_7 \mathbf{p} \quad (25a - f)$$

donde  $\mathbf{N}_i$  ( $i = 1 - 7$ ) son matrices de funciones de forma de orden  $1 \times 14$ .

Reemplazando las expresiones (25) en la ecuación variacional (16) y ensamblando de la manera usual puede escribirse

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{P}}{dt} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_G) \mathbf{P} = \mathbf{Q} \quad (26)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez proveniente de la expresión (17a),  $\mathbf{K}_G$  la matriz de rigidez geométrica proveniente de (17b),  $\mathbf{M}$  la matriz de masa proveniente de (17c),  $\mathbf{Q}$  el vector de cargas nodales equivalentes proveniente de (17d) y  $\mathbf{P}$  el vector global de desplazamientos. Se han empleado fórmulas de cuadraturas gaussianas para efectuar las integrales pertinentes. A los efectos de determinar la matriz de rigidez geométrica se han empleado los valores medios de los esfuerzos iniciales dentro de cada elemento. No se brindan los detalles para la construcción de estas matrices globales a partir de (16) y (25) ya que éstos son perfectamente conocidos<sup>22</sup>.

El presente elemento produce la teoría de Vlasov, como caso particular, imponiendo valores muy grandes para las rigideces de corte ( $K_w = K_y = K_z = 10^{15}$ ) en la matriz de rigidez y  $I_y = I_z = C_w = 0$  en la matriz masa.

Para el problema de vibraciones libres aquí considerado no existen fuerzas externas ( $\mathbf{Q} = 0$ ) y entonces puede suponerse que

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^* e^{i\Omega t} \quad (27)$$

donde  $\Omega = 2\pi f$ , siendo  $f$  la frecuencia natural en Hz.

La sustitución de (27) en (26) lleva al problema de autovalores

$$[(\mathbf{K} + \mathbf{K}_G) - \Omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{P}^* = 0 \quad (28)$$

La solución de esta ecuación produce las frecuencias naturales de vibración  $f_n$  y las correspondientes formas modales.

Siguiendo a Bažant y El-Nimieri<sup>23</sup>, esta formulación puede extenderse para analizar vigas con variación general de las propiedades seccionales transversales, pórticos y vigas curvas, debiendo en estos casos transformar los vectores de desplazamientos generalizados y las matrices de rigidez y de masa a un sistema de referencia global, ya que los centros de corte y de gravedad y las direcciones principales y longitudinales de los distintos elementos no serán coincidentes. Esto será mostrado en un trabajo posterior. De todas maneras en el caso de vigas rectas de sección transversal suavemente variable el presente enfoque es directamente aplicable, mientras los ejes principales sean invariables.

### Solución analítica para las vibraciones libres de vigas simplemente apoyadas

Se considera una VAPD uniforme de longitud  $L$  sin tensiones de corte iniciales. Como se ha señalado para esta situación la ecuación para el desplazamiento axial  $\zeta$  (19a) resulta desacoplada y su solución es bien conocida. Por lo tanto, en lo que sigue se presenta solamente la solución para el movimiento flexo-torsional (ecuaciones 19b-g). Se adoptan las condiciones de "apoyo simple"

$$\phi = \xi = \eta = 0; \quad EI_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} = EI_y \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = EC_w \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

Es inmediato observar que las condiciones de contorno (29) son satisfechas tomando soluciones en la forma

$$\begin{aligned} \phi &= \alpha_1 \tilde{S}_n(x) \beta(t); & \eta &= \alpha_3 \tilde{S}_n(x) \beta(t); & \xi &= \alpha_5 \tilde{S}_n(x) \beta(t) \\ \theta &= \alpha_2 \tilde{C}_n(x) \beta(t); & \theta_z &= \alpha_4 \tilde{C}_n(x) \beta(t); & \theta_y &= \alpha_6 \tilde{C}_n(x) \beta(t) \end{aligned} \quad (30a-f)$$

donde

$$\tilde{S}_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right); \quad \tilde{C}_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right); \quad \beta(t) = \cos(2\pi ft) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (31a-c)$$

Las  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) son constantes y  $f$  es la frecuencia natural (en Hz).

Sustituyendo las expresiones (30) en las ecuaciones (19b-g), una vez que en éstas se hayan reemplazado las relaciones constitutivas (12), y factorizando se llega a un sistema algebraico de la forma

$$\sum_{j=1}^6 [\mathbf{A}_{i,j} - (2\pi f)^2 \mathbf{B}_{i,j}] \alpha_j = 0; \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (32)$$

donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son matrices simétricas de  $6 \times 6$ . En el caso de utilizar las ecuaciones constitutivas simplificadas (12a-e, 14a-c), las componentes no nulas de estas matrices vienen dadas por

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 [G(J + K_w) + N^0 \frac{I_s}{A} + M_z^0 \beta_z + M_y^0 \beta_y + B^0 \beta_w] \\ A_{1,2} &= A_{2,1} = -GK_w \left(\frac{n\pi}{L}\right) \\ A_{1,3} &= A_{3,1} = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (M_y^0 + N^0 z_0); \quad A_{1,5} = A_{5,1} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (M_z^0 + N^0 y_0) \\ A_{2,2} &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EC_w + GK_w; \quad A_{3,3} = (GK_y + N^0) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ A_{3,4} &= A_{4,3} = -GK_y \left(\frac{n\pi}{L}\right); \quad A_{4,4} = EI_z \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + GK_y \\ A_{5,5} &= (GK_z + N^0) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2; \quad A_{5,6} = A_{6,5} = -GK_z \left(\frac{n\pi}{L}\right) \\ A_{6,6} &= EI_y \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + GK_z; \quad B_{1,1} = \rho I_s \\ B_{1,3} &= B_{3,1} = -\rho A z_0; \quad B_{1,5} = B_{5,1} = \rho A y_0; \quad B_{2,2} = \rho C_w \\ B_{3,3} &= \rho A; \quad B_{4,4} = \rho I_z; \quad B_{5,5} = \rho A; \quad B_{6,6} = \rho I_y \end{aligned} \quad (33)$$

La solución del problema de autovalores (32) para distintos valores de  $n$  permite determinar las frecuencias naturales y sus correspondientes modos de vibración. Otras soluciones analíticas como las desarrolladas en las referencias<sup>7,24</sup> son casos particulares de la presente.

## EJEMPLOS NUMÉRICOS

Con el propósito de ilustrar acerca de los efectos considerados se obtienen las frecuencias naturales para algunas situaciones en vigas I y U (Figura 2). Se adoptan las ecuaciones constitutivas (12a-e, 14a-c) para las determinaciones numéricas (éstas son exactas para la sección I y aproximadas para la sección U). La precisión del enfoque numérico propuesto se estudia por medio de la comparación entre los presentes resultados de elementos finitos con los obtenidos mediante la solución analítica y con valores disponibles en la literatura. Para el cálculo mediante elementos finitos se utilizan en todos los casos considerados 20 elementos. Las frecuencias correspondientes a la teoría de Vlasov son determinadas mediante el presente algoritmo de la manera como se ha explicado previamente. Tanto para la solución analítica como para la numérica se emplea el método de iteración inversa para resolver los problemas de autovalores.

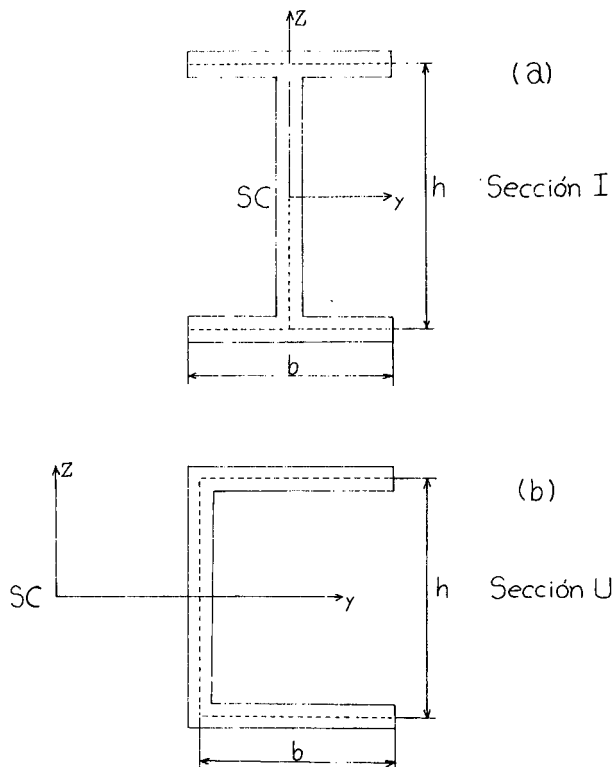


Figura 2. Ejemplos estudiados

Como primer ejemplo se consideran vibraciones torsionales de una viga I libre de tensiones iniciales con las siguientes características (Figura 2);  $h = b = 60$  cm,  $e = 3$  cm,  $E = 2,10 \times 10^7$  N/cm<sup>2</sup>,  $G = E/2,60$ ,  $\rho = 7,83 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>3</sup>. Las primeras cinco frecuencias naturales torsionales cuando la viga se encuentra "simplemente apoyada"

( $\phi = B = 0$ ) se muestran en la Tabla I para  $h/L = 0,05, 0,10, 0,15$  y  $0,20$ . También se muestran, a los efectos de comparación, los resultados según la teoría de Vlasov. Puede observarse que para  $h/L = 0,05$  (viga esbelta) las determinaciones mediante la presente teoría no difieren apreciablemente de los resultados de Vlasov. A medida que se consideran longitudes de vigas más cortas y modos superiores, los efectos de corte e inercia de alabeo adquieren importancia.

$h/L$	Caso	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
0,05	I.a	11,08	35,00	73,20	124,60	187,30
	I.b	11,08	35,00	73,30	124,70	188,00
	II.a	11,10	35,40	75,50	131,40	203,30
	II.b	11,10	35,40	75,50	131,40	203,30
0,10	I.a	35,04	124,60	259,80	427,40	616,20
	I.b	35,04	124,60	260,20	429,20	621,70
	II.a	35,48	131,40	291,20	514,80	802,30
	II.b	35,48	131,40	291,20	514,80	802,50
0,15	I.a	73,28	259,80	519,70	818,40	1135,70
	I.b	73,29	260,00	521,10	824,10	1150,90
	II.a	75,51	291,20	650,70	1153,60	1800,50
	II.b	75,51	291,20	650,50	1153,80	1801,00
0,20	I.a	124,60	427,40	818,40	1243,50	1679,60
	I.b	124,60	427,80	821,60	1254,80	1707,50
	II.a	131,40	514,80	1153,60	2048,10	3198,00
	II.b	131,40	514,80	1153,70	2048,30	3198,80

Características:  $h = b = 60$  cm,  $e = 3$  cm,  $E = 2,10 \times 10^7$  N/cm<sup>2</sup>,  
 $G = E/2,60$ ,  $\rho = 7,83 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>3</sup>

Casos: I. Consideración de efectos de corte e inercia de alabeo

II. Modelo de Vlasov

a) Método analítico, b) Método de elementos finitos

Tabla I. Frecuencias torsionales de vigas I simplemente apoyadas ( $\phi = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ )

Debe observarse que los resultados determinados mediante elementos finitos muestran muy buena concordancia con las predicciones analíticas, siendo la máxima diferencia del orden de 1 % aproximadamente.

En la Tabla II se muestran resultados de elementos finitos para otras condiciones de borde. Como puede apreciarse, los efectos de corte e inercia de alabeo son más notables para el caso de vigas doblemente empotradas. Así por ejemplo para  $h/L = 0,20$  la diferencia porcentual con respecto al modelo de Vlasov de las cinco primeras frecuencias de vibración es de 22, 46, 71, 96 y 120 %.



C.B.	$h/L$	Caso	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
E-E	0,05	I	19,70	50,80	95,20	151,30	217,80
		II	20,00	52,60	100,80	164,90	244,90
	0,10	I	70,10	178,40	322,60	492,00	680,20
		II	74,40	202,30	394,30	650,10	969,90
	0,15	I	145,40	352,20	610,00	898,30	1208,60
		II	164,90	451,90	883,50	1458,80	2178,20
	0,20	I	237,40	547,10	917,80	1321,90	1751,00
		II	291,60	801,20	1568,30	2591,00	3869,90
E-S	0,05	I	14,80	42,50	83,90	137,80	202,80
		II	14,90	43,50	87,60	147,60	223,60
	0,10	I	50,80	151,00	291,60	461,10	651,50
		II	52,60	164,80	340,70	580,40	884,20
	0,15	I	106,70	306,80	566,90	862,30	1180,50
		II	115,00	367,00	762,50	1301,80	1985,10
	0,20	I	178,30	489,90	871,60	1289,50	1729,70
		II	202,30	650,00	1353,00	2311,60	3526,30
E-L	0,05	I	5,63	22,30	53,00	97,30	154,00
		II	5,64	22,50	54,30	102,10	165,90
	0,10	I	15,20	73,20	184,70	333,60	509,50
		II	15,30	76,50	204,30	395,70	651,20
	0,15	I	29,50	150,50	370,60	642,30	945,50
		II	30,00	165,80	453,90	884,80	1459,90
	0,20	I	48,80	247,20	586,50	980,50	1405,60
		II	50,10	290,60	803,40	1569,70	2592,10

Características:  $h = b = 60$  cm,  $e = 3$  cm,  $E = 2,10 \times 10^7$  N/cm<sup>2</sup>,  
 $G = E/2,60$ ,  $\rho = 7,83 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>3</sup>

Casos: I. Consideración de efectos de corte e inercia de alabeo  
 II. Modelo de Vlasov

Condiciones de borde (C.B.): E—empotramiento ( $\phi = \theta = 0$ ),  
 S—apoyo simple ( $\phi = B = 0$ )  
 L—extremo libre ( $B = M_x = 0$ )

Tabla II. Frecuencias torsionales de vigas I con varias condiciones de borde

Como segundo ejemplo se analiza una viga I cantilever con las características:  $b = 6,00$  m,  $h = 3,00$  m,  $e = 0,20$  m,  $E = 3 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $E/G = 2,30$ ,  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup>. Este caso ha sido estudiado por Capuani, Savoia y Laudiero<sup>15</sup>. Como puede

observarse en la Tabla III, los resultados determinados por Capuani *et al.*<sup>15</sup>, muestran una muy pequeña diferencia con los presentes resultados. Esto era de esperarse ya que, aunque los elementos desarrollados son diferentes, la presente teoría para el caso de vigas libres de tensiones iniciales coincide con la de los investigadores mencionados.

También se observan en la Tabla III los resultados calculados en la referencia<sup>15</sup> de acuerdo al modelo de Vlasov. Nótese la gran disminución de los valores de las frecuencias debida a los efectos de corte e inercia de alabeo.

	Presente enfoque	Capuani <i>et al.</i> <sup>15</sup> 12 elementos	Capuani <i>et al.</i> <sup>15</sup> 24 elementos	Modelo de Vlasov <sup>15</sup>
$f_1$	57,80	57,70	57,70	66,20
$f_2$	252,10	252,20	250,40	384,90
$f_3$	545,30	549,90	540,50	1064,30
$f_4$	842,10	857,60	832,70	2079,60
$f_5$	1140,70	1167,20	1124,40	3433,80

Características:  $h = 3$  m,  $b = 6$  m,  $e = 0,2$  m,  $L = 15$  m,  
 $E = 3 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $G = E/2,30$ ,  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup>

Tabla III. Frecuencias torsionales de una viga I en voladizo de hormigón armado

	Gendy y Saleeb <sup>14</sup> Elemento HMC2	Noor <i>et al.</i> <sup>25</sup> Modelo Viga	Noor <i>et al.</i> <sup>25</sup> Modelo Lámina	Presente enfoque	
				a)	b)
$f_1$	11,42	11,38	11,42	11,43	11,39
$f_2$	23,15	23,15	23,15	23,15	23,14
$f_3$	42,67	42,57	42,67	42,73	42,55
$f_4$	58,05	57,67	58,17	58,32	57,98
$f_5$	107,88	106,50	107,20	107,42	106,32
$f_6$	145,12	144,50	144,60	145,13	144,37

Características:  $b = 0,0254$  m,  $h = b/2$  m,  $e = 0,000635$  m,  $L = 1,016$  m,  
 $E = 6,985 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $G = E/1,5151$ ,  $\rho = 2600$  kg/m<sup>3</sup>

Casos: a) Modelo de Vlasov

b) Consideración de efecto de corte e inercias rotatoria y de alabeo

Tabla IV. Frecuencias flexo-torsionales de una viga U en voladizo

A continuación se estudian vibraciones acopladas de una viga de sección U empotrada libre. Los datos considerados son como sigue:  $E = 6,985 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $G = E/1,5151$ ,  $\rho = 2600$  kg/m<sup>3</sup>,  $b = 0,0254$  m,  $h = b/2$  m,  $e = 0,000635$  m,

$L = 1,016$  m. Este ejemplo fue analizado por Gendy y Saleeb<sup>14</sup> para probar su elemento finito HMC2. Una comparación entre los resultados de las referencias<sup>14,25</sup> y los aquí determinados se muestra en la Tabla IV. La concordancia es muy buena. No obstante la viga analizada es muy esbelta de manera tal que los efectos de corte e inercias rotatoria y de alabeo no son muy notables en este ejemplo.

Seguidamente se analiza una viga U cuyas características son (Figura 2):  $E = 2,10 \times 10^7$  N/cm<sup>2</sup>,  $G = E/2,60$ ,  $\rho = 7,83 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>3</sup>,  $h = b = 60$  cm,  $e = 3$  cm,  $L = 300$  cm, 400 cm, 600 cm y 1200 cm. Para las condiciones de apoyo simple se determinan frecuencias naturales mediante los métodos analítico y numérico. Las frecuencias desacopladas (movimiento en el plano  $xy$ ) no son consideradas. Como se aprecia en la Tabla V, existe muy buena concordancia entre los resultados analíticos y numéricos. La discrepancia con respecto a los valores según el modelo de Vlasov se hace más notable a medida que disminuye la esbeltez y que aumenta el modo de vibración como era de esperar.

$h/L$	Caso	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
0,05	I.a	6,09	20,40	26,20	43,00	72,50
	I.b	6,09	20,40	26,20	43,00	72,70
	II.a	6,13	20,90	27,00	45,40	79,60
	II.b	6,13	20,90	27,00	45,40	79,60
0,10	I.a	20,44	72,50	94,90	146,70	237,70
	I.b	20,44	72,60	95,00	147,10	234,40
	II.a	20,94	79,60	106,30	177,30	314,00
	II.b	20,94	79,60	106,30	177,30	314,10
0,15	I.a	43,03	146,70	191,40	278,00	417,50
	I.b	43,03	146,80	191,50	279,30	421,90
	II.a	45,40	177,30	238,50	397,10	704,80
	II.b	45,40	177,30	238,50	397,10	704,90
0,20	I.a	72,50	232,70	303,90	417,60	605,60
	I.b	72,50	233,10	304,00	420,00	612,00
	II.a	79,60	314,00	423,50	704,80	1251,80
	II.b	79,60	314,00	423,50	704,80	1252,00

Características:  $h = b = 60$  cm,  $e = 3$  cm,  $E = 2,10 \times 10^7$  N/cm<sup>2</sup>,  
 $G = E/2,60$ ,  $\rho = 7,83 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>3</sup>

Casos: I. Consideración de efectos de corte e inercias rotatoria y de alabeo  
 II. Modelo de Vlasov  
 a) Método analítico, b) Método de elementos finitos

Tabla V. Frecuencias flexo-torsionales de vigas U simplemente apoyadas

Resultados de elementos finitos para otras condiciones de contorno se dan en la Tabla VI. De igual manera que en el caso de vigas I, la mayor influencia del corte y de las inercias rotatorias y de alabeo se da en vigas doblemente empotradas.

C.B	$h/L$	Caso	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
E-E	0,05	I	11,40	29,60	53,10	55,20	86,00
		II	11,80	31,50	60,20	61,00	100,10
	0,10	I	40,30	98,70	163,50	177,60	254,90
		II	45,00	123,10	239,90	240,60	396,90
	0,15	I	80,10	183,80	289,50	319,10	438,70
		II	100,40	275,80	539,40	539,80	891,60
	0,20	I	125,00	272,90	421,50	462,50	624,10
		II	177,90	489,40	958,50	959,00	1584,10
E-S	0,05	I	8,40	24,80	38,80	48,90	79,40
		II	8,60	25,90	41,70	52,90	89,50
	0,10	I	29,60	85,70	130,50	160,50	245,20
		II	31,50	100,10	165,60	207,70	354,30
	0,15	I	60,80	165,70	244,30	294,60	431,10
		II	69,70	223,80	372,00	465,60	795,50
	0,20	I	98,60	253,30	366,40	434,00	618,80
		II	123,10	396,90	661,10	826,80	1413,10
E-L	0,05	I	2,83	9,93	12,68	30,80	54,30
		II	2,84	10,05	12,96	32,20	59,90
	0,10	I	8,40	36,30	42,30	104,80	174,10
		II	8,50	38,40	45,70	123,90	236,90
	0,15	I	16,90	75,70	85,70	201,00	314,90
		II	17,40	85,50	100,30	276,60	532,00
	0,20	I	28,20	123,10	138,60	306,40	458,80
		II	29,60	155,40	176,60	490,30	945,00

Características:  $h = b = 60$  cm,  $e = 3$  cm,  $E = 2,1 \times 10^7$  N/cm<sup>2</sup>,  
 $G = E/2,60$ ,  $\rho = 7,83 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>3</sup>

Casos: I. Consideración de efecto de corte e inercias de alabeo  
 II. Modelo de Vlasov

Condiciones de borde (C.B.): E- empotramiento ( $\phi = \theta = \xi = \theta_y = 0$ ),  
 S- apoyo simple ( $\phi = B = \xi = M_y = 0$ )  
 L- extremo libre ( $B = M_x = M_y = Q_z = 0$ )

Tabla VI. Frecuencias flexo-torsionales acopladas de vigas U con varias condiciones de borde

Finalmente se analiza una viga simplemente apoyada idéntica a la del ejemplo anterior sujeta a un esfuerzo axial inicial  $N^0 = 2EI_y/L^2$ . En la Tabla VII puede observarse el efecto rigidizador de este esfuerzo inicial. También se observa la excelente concordancia entre las predicciones numéricas y las analíticas, siendo la mayor diferencia del orden de 1 %. Debe notarse que a diferencia del efecto de corte, la influencia de los esfuerzos iniciales afecta en mayor medida a los modos más bajos.

$h/L$	Caso	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
0,05	I.a	9,07	24,40	27,10	47,50	77,30
	I.b	9,07	24,40	27,10	47,50	77,50
	II.a	6,09	20,40	26,20	43,00	72,70
0,10	I.a	33,70	90,20	98,60	167,20	256,20
	I.b	33,70	90,30	98,60	167,60	257,90
	II.a	20,44	72,50	94,90	146,70	237,70
0,15	I.a	74,10	189,90	200,30	331,60	482,20
	I.b	74,10	190,00	200,30	332,90	486,70
	II.a	43,03	146,70	191,40	278,00	417,50
0,20	I.a	129,50	316,20	321,30	526,80	741,10
	I.b	129,50	316,70	321,10	529,60	749,70
	II.a	72,50	232,70	303,90	417,60	605,60

Características:  $h = b = 60$  cm,  $e = 3$  cm,  $E = 2,10 \times 10^7$  N/cm<sup>2</sup>,  
 $G = E/2,60$ ,  $\rho = 7,83 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>3</sup>

Casos: I. Viga con esfuerzo normal  $N^0$   
 II. Viga libre de esfuerzos iniciales  
 a) Método analítico, b) Método de elementos finitos  
 Se considera efecto de corte e inercias rotatoria y de alabeo

Tabla VII. Frecuencias flexo-torsionales de vigas U simplemente apoyadas sometidas a un esfuerzo normal inicial  $N^0 = 2 EI_y/L^2$

## CONCLUSIONES

Se ha presentado una teoría general para el análisis dinámico de vigas no uniformes de sección abierta de pared delgada, tomando en consideración la flexibilidad de corte y la existencia de un estado arbitrario de tensiones iniciales.

El método de derivación está basado en una formulación variacional mixta de la teoría tridimensional de la elasticidad. Estas ecuaciones son unidimensionalizadas mediante un procedimiento tipo Kantorovich. El presente enfoque permite la determinación unificada de las ecuaciones unidimensionales de movimiento y de las

relaciones constitutivas en función de los esfuerzos (o resultantes de tensión) y de los desplazamientos generalizados. Es importante notar que las ecuaciones constitutivas obtenidas no requieren el uso de factores de corrección por corte ajenos a la teoría.

Las presentes ecuaciones constitutivas ponen de manifiesto el acoplamiento entre los esfuerzos de corte, el momento flexo-torsional y sus distorsiones generalizadas asociadas para secciones asimétricas. De todas maneras en vista de que este acoplamiento es débil se ha propuesto una versión simplificada no acoplada de estas relaciones constitutivas. Actualmente se está llevando a cabo una investigación para evaluar la diferencia entre estas dos versiones.

La presente teoría es más general que las presentadas en las referencias<sup>13-15</sup> en cuanto a que aquí es tenida en cuenta la existencia de un estado arbitrario de tensiones iniciales conjuntamente con la flexibilidad de corte y en cuanto al hecho de reconocer su aplicabilidad al caso de secciones no uniformes. No obstante, los modelos mencionados contemplan otros efectos, no considerados en este trabajo, a saber: la teoría de Muller tiene en cuenta de una forma promediada la distorsión de la sección transversal, el modelo de Gendy y Saleeb está desarrollado para vigas curvas teniendo a las vigas rectas como caso límite al considerar el radio de curvatura tendiendo a infinito y la teoría de Capuani, Savoia y Laudiero es aplicable a secciones cerradas. Luego el presente desarrollo teórico complementa a los mencionados. El objetivo futuro de los autores está centrado en desarrollar una teoría unificada que contemple todos los efectos señalados.

El presente modelo fue implementado computacionalmente mediante una formulación de elementos finitos, la cual ha sido usada para la determinación de frecuencias naturales de vibración. Se han realizado determinaciones independientes mediante una solución analítica de las ecuaciones diferenciales desarrolladas.

Los ejemplos numéricos realizados muestran que la influencia de la flexibilidad de corte y de las inercias rotatoria y de alabeo sobre la dinámica de VAPD es notable al considerar modos superiores de vibración y aún para los modos más bajos en el caso de vigas con poca esbeltez. También presenta una importancia crucial la consideración de tensiones iniciales.

Las comparaciones numéricas efectuadas muestran la muy buena precisión del elemento finito propuesto. Considerando la importancia de los efectos estudiados y el hecho de que el elemento desarrollado no es mucho más complejo que un elemento formulado según la teoría de Vlasov, es que se recomienda su uso para el análisis dinámico de este tipo de elementos estructurales.

El presente procedimiento numérico puede ser adaptado para analizar problemas de inestabilidad elástica, asimismo como para el análisis estático geoméricamente no lineal.

## AGRADECIMIENTOS

Es presente estudio ha sido auspiciado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional. V.H. Cortínez desea dedicar este trabajo a la querida memoria de su hija María Victoria (13-11-9996, 15-4-1997) q.e.p.d.

## REFERENCIAS

1. S.P. Timoshenko, "Theory of Bending, Torsion and Buckling of Thin Walled Members of Open Cross Section", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. **239**, 3,4,5, pp. 201-219, 248-268, 343-361, (1945).
2. F. Bleich, "*Buckling Strength of Metal Structures*", Mc.Graw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London (1952).
3. J.N. Goodier, "The Buckling of Compressed Bar by Torsion and Flexure", Bulletin No. 27 of Cornell University, Engineering Experiment Station, (1941).
4. V. Vlasov, "Thin Walled Elastic Beams", Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, (1961).
5. P. Christiano y L. Samela, "Frequencies of Beams with Elastic Warping Restraint", American Society of Civil Engineers", *Journal of the Structural Division*, Vol. **97**, 6, pp. 1835-1840, (1971).
6. M. Eisenberger y R. Cohen, "Flexural-Torsional Buckling of Variable and Open Cross-Section Members", American Society of Civil Engineers, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. **121**, 2, pp. 244-254, (1995).
7. S.P. Timoshenko y D.H. Young, "Vibration Problems in Engineering", 3ª edición, D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, N.J., (1955).
8. R.E.D. Bishop y W.G. Price, "Coupled Bending and Twisting of a Timoshenko Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **50**, 4, pp. 469-477, (1977).
9. D. Dubigeon y C.B. Kim, "A Finite Element for the Study of Coupled Bending-Prevented Torsion of a Straight Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **81**, 2, pp. 255-270, (1982).
10. R.D. Ambrosini, J.D. Riera y R.F. Danesi, "Dynamic Analysis of Thin Walled and Variable Open Section Beams with Shear Flexibility", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **38**, pp. 2867-2885, (1995).
11. H.R. Agarwall y E.T. Cranch, "A Theory of Torsional and Coupled Bending Torsional Waves in Thin-Walled Open Section Beams", *Journal of Applied Mechanics*, June, pp. 337-343, (1967).
12. S. Ali Hasan y A.D.S. Barr, "Linear Vibrations of Thin Walled Beams of Equal Angle Section", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **32**, pp. 3-23, (1974).
13. P. Muller, "Torsional-Flexural Waves in Thin Walled Open Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **87**, 1, pp. 115-141, (1983).
14. A.S. Gendy y A.F. Saleeb, "Vibration Analysis of Coupled Extensional/Flexural/Torsional Modes of Curves Beams with Arbitrary Thin-Walled Sections", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **174**, 2, pp. 261-274, (1994).
15. D. Capuani, M. Savoia y F. Laudiero, "A Generalization of the Timoshenko beam Model for Coupled Vibration Analysis of Thin Walled Beams", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **21**, pp. 859-879, (1992).
16. Y.C. Fung, "*Foundations of Solid Mechanics*", Prentice Hall of India Limited, New Delh, (1968).
17. V.H. Cortínez y P.A.A. Laura, "Analysis of Vibrating Rectangular Plates of Discontinuously Varying Thickness by means of the Extended Kantorovich Methods", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **137**, 3, (1990).
18. W.D. Pilkey, U. Schramm y W. Kang, "Consideration of Shear in Beams of Arbitrary Cross Section", *Proceedings of the IV. Pan American Congress of Applied Mechanics (PACAM IV)*, Buenos Aires, Argentina, Vol. **I**, pp. 311-316, (1995).

19. G. Romano, L. Rosati y G. Ferro, "Shear Deformability of Thin Walled Beams with Arbitrary Cross Sections", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **35**, pp. 283-306, (1992).
20. P.A.A. Laura y R.H. Gutiérrez, "Analysis of Vibrating Circular Plates of Nonuniform Thickness by the Method of Differential Quadrature", *Ocean Engineering*, Vol. **22**, 1, pp. 97-100, (1995).
21. J.S. Archer, "Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis using Finite Element Techniques", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. **3**, pp. 1910-1918, (1965).
22. O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science", Mc.Graw-Hill Publishing Co., London, (1971).
23. Z.P. Bažant y M. El Nimieri, "Large-Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames", American Society of Civil Engineers, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. **99**, 6, pp. 1259-1281, (1973).
24. T.M. Roberts, "Natural Frequencies of Thin-Walled Bars of Open Cross-Section", American Society of Civil Engineers", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. **113**, 10, pp. 1584-1593, (1987).
25. A.K. Noor, J.M. Peters y B.J. Min, "Mixed Finite Elements Models for Free Vibrations of Thin Walled Beams", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. **5**, pp. 291-305, (1989).