

UN MODELO CONSTITUTIVO PARA EL ANÁLISIS DE SÓLIDOS ELASTOPLÁSTICOS SOMETIDOS A GRANDES DEFORMACIONES. Parte I: Formulación Teórica y aplicación a metales

CARLOS GARCÍA GARINO*
y
JAVIER OLIVER**

**Instituto Tecnológico Universitario, Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de Cuyo, Centro Universitario,
Parque Gral San Martín, 5500 Mendoza, Argentina*

***E.T.S. de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos,
Gran Capitán s/n, E-08034, Barcelona, España.*

RESUMEN

En el trabajo se presenta la formulación de un modelo constitutivo capaz de simular, de manera general, procesos elastoplásticos con grandes deformaciones. El desarrollo del modelo se basa en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$. Luego, la energía libre y las variables internas se escriben en la configuración intermedia, en la que se desarrolla el modelo. Mediante el empleo de la fórmula de Doyle y Ericksen se obtiene la expresión espacial del modelo. Finalmente se aplica el modelo general al caso de metales. En este caso se utiliza a posteriori la hipótesis de pequeñas deformaciones elásticas, típica de estos materiales. En otro trabajo que continúa y acompaña al presente se trata la implementación numérica y se presentan ejemplos de aplicación.

SUMMARY

In this paper a general finite strain elastoplastic constitutive model is presented. The model is based in the multiplicative decomposition of deformation gradient tensor. Consequently, the free energy function as well as the internal variables are written in the intermediate configuration, where the model is derived. The spatial expression of the model is obtained from the Doyle-Ericksen formula. Finally the general model is applied to the case of metals. In this case the small elastic strains hypothesis, typical of this kind of materials, is used a posteriori. In part II of this work, the computational implementation is provided and numerical simulations are studied.

Recibido: Enero 1994

INTRODUCCIÓN

La teoría de la Plasticidad constituye una herramienta fundamental para la simulación de procesos de deformación en sólidos, caracterizados por la aparición de *deformaciones irreversibles*. En la inmensa mayoría de los casos, el inicio de los fenómenos de plastificación se produce para pequeños valores de la deformación, pero el rango de deformaciones que debe ser considerado depende tanto del tipo de material como del proceso de deformación que se estudie. Así, en materiales frágiles (hormigón, cerámicas, rocas, etc...), la rotura se produce para pequeños valores de la deformación y el comportamiento plástico de interés puede ser modelado mediante modelos elastoplásticos con pequeñas deformaciones. La utilización de materiales más dúctiles, como el acero, en ciertas aplicaciones como las de la Ingeniería Civil limita, por consideraciones constructivas, el rango de deformaciones útiles o de servicio a pequeños valores, con lo que de nuevo pueden modelarse con la teoría de pequeñas deformaciones. En otros casos, sin embargo se utiliza un material dúctil en procesos en los que se producen grandes deformaciones; tal es el caso del acero en numerosas aplicaciones de la Ingeniería Mecánica (procesos de conformado de metales, análisis de problemas de impacto) cuya importancia hace necesaria la consideración no sólo de grandes desplazamientos sino también de grandes deformaciones en el sólido analizado.

La extensión de la Teoría de la Plasticidad en pequeñas deformaciones a los casos de deformaciones finitas se inicia, esencialmente, con los trabajos de Green y Naghdi ¹ que han sido continuados hasta nuestros días por numerosos autores ²⁻⁵, configurando un entorno consistente en el que situar un modelo elastoplástico de grandes deformaciones.

En este trabajo se presenta un modelo de dicho tipo desarrollado por el primer autor en su tesis doctoral ⁶, que sigue, en líneas generales las propuestas de Simo y Ortiz ³⁻⁵ cuyas características más importantes son:

- Descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación. Esta hipótesis cumple el rol de la clásica descomposición aditiva de los tensores de deformación típica de la teoría de pequeñas deformaciones, que puede recobrase para el problema de grandes deformaciones mediante una adecuada definición de los tensores de deformación elásticos y plásticos (Simo y Ortiz ³)
- Utilización de una ecuación constitutiva hiperelástica para el cálculo de la respuesta elástica. Frente a otras alternativas, del tipo hipoelástico de amplia utilización en la práctica ⁷, la consideración de ecuaciones constitutivas hiperelásticas resulta plenamente consistente con la termodinámica de los sólidos deformables. Además presenta importantes ventajas de tipo computacional al ser la cinemática totalmente explícita ³, que se emplea sin necesidad de recurrir a costosos esquemas de integración ⁷.
- La novedad introducida en por el primer autor en su Tesis Doctoral ⁶, y discutida en otros trabajos previos ⁸⁻¹⁰, consiste en utilizar *a posteriori* la hipótesis de pequeñas deformaciones elásticas. Esta idea junto con el empleo de un algoritmo de integración de la ecuación constitutiva elastoplástica, del tipo predictor elástico-corrector plástico ^{3,11}, permite la generalización del clásico algoritmo de retorno radial al caso con grandes deformaciones.

CINEMÁTICA

La cinemática del problema elastoplástico con grandes deformaciones es quizá uno de los aspectos más controvertidos del tema. En el trabajo se parte de la noción de la configuración intermedia, que conduce a la clásica descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación \mathbf{F} en sus componentes elástica y plástica ²:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (1)$$

Tensores de Deformación

Esta descomposición multiplicativa no es incompatible con otras *aditivas*, como puede verse en diferentes referencias ^{3,6,12-14}. Luego, en la configuración original ${}^o\Omega$ se define la componente plástica del tensor de Cauchy-Green derecho \mathbf{C}^p mediante:

$$\mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{pT} \mathbf{F}^p \quad (2)$$

De manera análoga a la definición del tensor de Green Lagrange $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G})$, se define su componente plástica:

$$\mathbf{E}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^p - \mathbf{G}) \quad (3)$$

donde \mathbf{G} es el tensor métrico en la configuración material. Luego en dicha configuración resulta la descomposición aditiva del tensor de Green Lagrange $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$ ^{1,12}. En el Cuadro 1 se resume la cinemática en la configuración original.

$\mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{pT} \cdot \bar{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}^p$ $\mathbf{E}^e = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{C}^p)$ $\mathbf{E}^p = \frac{1}{2} (\mathbf{C}^p - \mathbf{G})$ $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{G})$ $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$	(4)
--	-----

Cuadro 1. Tensores de deformación en la configuración original ${}^o\Omega$.

Calculando el push-forward ϕ_* ¹⁵ de los tensores de deformación en la configuración original ${}^o\Omega$, se obtienen los tensores de deformación en la configuración deformada ${}^t\Omega$. Operando de manera análoga se obtienen los tensores que caracterizan la cinemática en la configuración intermedia ${}^t\Omega^e$, sólo que en este caso se emplea el push forward plástico ϕ_*^p . Una discusión detallada del tema puede encontrarse en el trabajo de Simo

y Ortiz ³, en la tesis doctoral del primer autor ⁶, y en los trabajos de Kleiber ^{13,14}. La cinemática de la configuración intermedia ${}^t\Omega^e$ se indica en el Cuadro 2.

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}^e \\
 \mathbf{b}^{p-1} &= \mathbf{F}^{p-T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}^{p-1} \\
 \bar{\mathbf{E}}^e &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{C}} - \bar{\mathbf{G}}) \\
 \bar{\mathbf{E}}^p &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{G}} - \mathbf{b}^{p-1}) \\
 \bar{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{C}} - \bar{\mathbf{G}}) \\
 \bar{\mathbf{E}} &= \bar{\mathbf{E}}^e + \bar{\mathbf{E}}^p
 \end{aligned}$$

Cuadro 2. Tensores de deformación en la configuración Intermedia ${}^t\Omega^e$.

El tensor $\bar{\mathbf{G}}$ indica el tensor métrico en la configuración intermedia. El tensor \mathbf{b}^{p-1} se denomina tensor plástico de Finger, y \mathbf{g} es el tensor métrico espacial. Los tensores $\bar{\mathbf{E}}^e$, $\bar{\mathbf{E}}$, y $\bar{\mathbf{E}}^p$ indican al tensor de deformación y a sus componentes elástica y plástica respectivamente.

En la configuración deformada ${}^t\Omega$ se definen el tensor de Finger \mathbf{b}^{-1} , su componente elástica \mathbf{b}^{e-1} , el tensor de Cauchy Green izquierdo $\mathbf{b}^{\#e}$. El tensor de deformación de Almansi \mathbf{e} , así como sus componentes elástica y plástica \mathbf{e}^e y \mathbf{e}^p , se obtienen a partir de los tensores definidos anteriormente y del tensor métrico espacial \mathbf{g} , como se muestra en el Cuadro 3.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}^{-1} &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \\
 \mathbf{b}^{e-1} &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{C}^p \cdot \mathbf{F}^{-1} \\
 \mathbf{b}^{\#e} &= \mathbf{F}^{eT} \cdot \bar{\mathbf{G}}^{\#} \cdot \mathbf{F}^e \\
 \mathbf{e}^e &= \frac{1}{2} (\mathbf{g} - \mathbf{b}^{e-1}) \\
 \mathbf{e}^p &= \frac{1}{2} (\mathbf{b}^{e-1} - \mathbf{b}^{-1}) \\
 \mathbf{e} &= \frac{1}{2} (\mathbf{g} - \mathbf{b}^{-1}) \\
 \mathbf{e} &= \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p
 \end{aligned}$$

Cuadro 3. Tensores de deformación en la configuración deformada ${}^t\Omega$.

La deducción de estos tensores se encuentra detallada en trabajos previos de los autores ^{6,8-10}. La relación entre los mismos se muestra en la Tabla I, y se ilustra en la Figura 1 ^{6,8-10}.

${}^0\Omega$	${}^t\Omega^e$	${}^t\Omega$
$C = F^T g F$	$\bar{C} = F^{eT} g F^e$	g
$C^p = F^{pT} \bar{G} F^p$	\bar{G}	$(b^e)^{-1} = (F^e)^{-T} \bar{G} (F^e)^{-1}$
G	$(b^p)^{-1} = (F^p)^{-T} G (F^p)^{-1}$	$b^{-1} = F^{-T} G F^{-1}$
$E = \frac{1}{2}(C - G)$	$\bar{E} = \frac{1}{2}(\bar{C} - (b^p)^{-1})$	$e = \frac{1}{2}(g - b^{-1})$
$E^p = \frac{1}{2}(C^p - G)$	$\bar{E}^p = \frac{1}{2}(\bar{G} - (b^p)^{-1})$	$e^p = \frac{1}{2}((b^e)^{-1} - b^{-1})$
$E^e = \frac{1}{2}(C - C^p)$	$\bar{E}^e = \frac{1}{2}(\bar{C} - \bar{G})$	$e^e = \frac{1}{2}(g - (b^e)^{-1})$
$E = E^e + E^p$	$\bar{E} = \bar{E}^e + \bar{E}^p$	$e = e^e + e^p$

Tabla I. Relación entre los tensores de deformación.

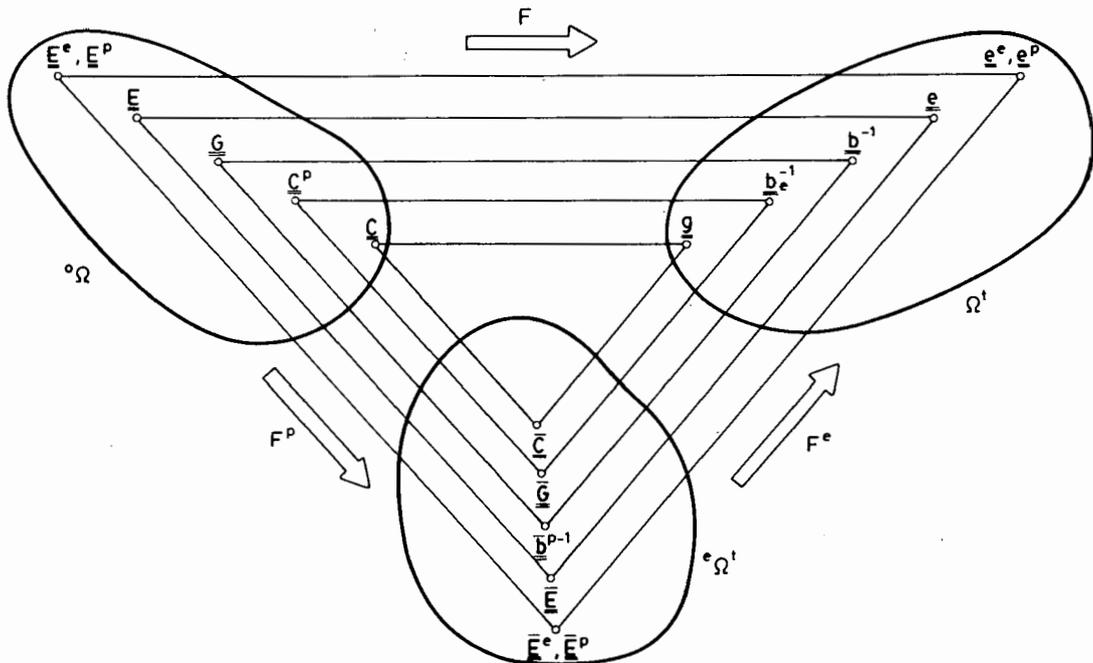
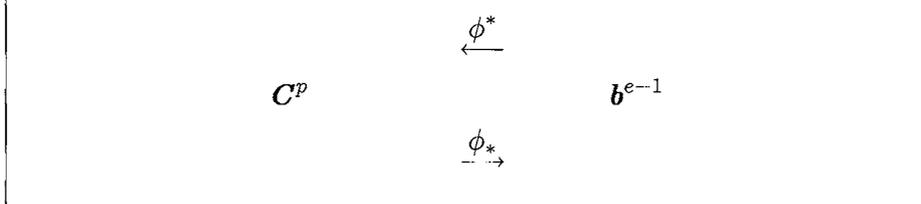


Figura 1. Cinemática del continuo elastoplástico.

Observación 1 La relación entre los tensores \mathbf{C}^p y \mathbf{b}^{e-1} , presentada en el Cuadro 3 resulta fundamental en la deducción de la implementación numérica del modelo que se discute en la continuación de este trabajo ¹⁶.



Derivadas de los Tensores de Deformación

En la definición de la regla de flujo del modelo, y también en la expresión incremental del mismo resulta necesario emplear los tensores denominados usualmente en la literatura como *tasas* o *velocidades de deformación*. En la configuración original ${}^t\Omega$ la geometría permanece fija y puede emplearse directamente la derivada material para obtener la variación temporal de los tensores de deformación.

Sin embargo tanto para la configuración intermedia ${}^t\Omega^e$ como la configuración deformada ${}^t\Omega$ es necesario tener en cuenta el cambio en la geometría del problema, y para ello deben utilizarse derivadas objetivas. En este trabajo se emplea la derivada de Lie L_v ¹⁵, y cuando corresponde la derivada plástica de Lie L_v^p . De esta manera en la configuración intermedia se obtienen los tensores $\bar{\mathbf{D}} = L_v^p(\bar{\mathbf{E}})$, $\bar{\mathbf{D}}^e = L_v^p(\bar{\mathbf{E}}^e)$, y $\bar{\mathbf{D}}^p = L_v^p(\bar{\mathbf{E}}^p)$. En la configuración deformada resulta: $\mathbf{d} = L_v(\mathbf{e})$, $\mathbf{d}^e = L_v(\mathbf{e}^e)$, y $\mathbf{d}^p = L_v(\mathbf{e}^p)$. Las relaciones entre los tensores velocidad de deformación se indican en la Tabla II.

${}^o\Omega$	${}^t\Omega^e$	${}^t\Omega$
$\dot{\mathbf{E}}$	$\bar{\mathbf{D}} = L_v^p(\bar{\mathbf{E}}) =$ $= \frac{1}{2}(\dot{\bar{\mathbf{C}}} + L_p^T \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}} L_p)$	$\mathbf{d} = L_v(\mathbf{e}) =$ $= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^e)^{-T}(\dot{\bar{\mathbf{C}}} + L_p^T \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}} L_p)(\mathbf{F}^e)^{-1}$
$\dot{\mathbf{E}}^e$	$\overset{\phi^{*(p)}}{\leftarrow} \bar{\mathbf{D}}^e = L_v^p(\bar{\mathbf{E}}^e) =$ $= \frac{1}{2}(\dot{\bar{\mathbf{E}}} + L_p^T \bar{\mathbf{E}}^e + \bar{\mathbf{E}}^e L_p)$	$\overset{\phi^{*(e)}}{\leftarrow} \mathbf{d}^e = L_v(\mathbf{e}^e) =$ $= (\mathbf{F}^e)^{-T}(\dot{\bar{\mathbf{E}}} + L_p^T \bar{\mathbf{E}}^e + \bar{\mathbf{E}}^e L_p)(\mathbf{F}^e)^{-1}$
$\dot{\mathbf{E}}^p$	$\overset{\phi^{*(p)}}{\rightarrow} \bar{\mathbf{D}}^p = L_v^p(\bar{\mathbf{E}}^p) =$ $= \frac{1}{2}(L_p^T \bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{G}} L_p)$	$\overset{\phi^{*(e)}}{\rightarrow} \mathbf{d}^p = L_v(\mathbf{e}^p) =$ $= (\mathbf{F}^e)^{-T}(L_p^T \bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{G}} L_p)(\mathbf{F}^e)^{-1}$
$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p$	$\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{D}}^e + \bar{\mathbf{D}}^p$	$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$

Tabla II. Relación entre los tensores tasa de deformación.

Observación 2 La derivada $\dot{\mathbf{E}}^p$ se puede reescribir en función de la derivada $\dot{\mathbf{C}}^p$ de la componente plástica del tensor de Cauchy Green derecho ⁶. Este es uno de los resultados más importantes de la cinemática del problema porque relaciona la componente plástica del tensor velocidad de deformación \mathbf{d}^p en la configuración deformada ${}^t\Omega$, con el cambio del flujo plástico $\dot{\mathbf{C}}^p$ en la configuración original Ω_o . La relación entre los tensores \mathbf{d}^p y $\dot{\mathbf{C}}^p$ se expresa mediante operaciones de push-forward ϕ_* y pull-back ϕ^* ⁶:

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\phi^*} & \\ \dot{\mathbf{C}}^p & & 2 \mathbf{d}^p \\ & \xrightarrow{\phi_*} & \end{array}$$

MODELO CONSTITUTIVO EN LA CONFIGURACIÓN INTERMEDIA

En este punto se formula el modelo constitutivo capaz de describir el comportamiento de sólidos elastoplásticos con grandes deformaciones. El desarrollo del modelo cumple con los postulados de la mecánica no lineal de los medios continuos, y en consecuencia debe satisfacer el Principio de Objetividad, Simetría Material, la Segunda Ley de la termodinámica, etc.. Además el modelo se desarrolla en el contexto de la Teoría de la Plasticidad con variables internas.

Función de Energía Libre

La definición del modelo parte, de manera consistente con la cinemática adoptada, de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$. Consecuentemente el modelo se escribe en la configuración intermedia. Para ello se propone la siguiente función de energía libre:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, \hat{\alpha}) \tag{4}$$

en donde $\hat{\alpha}$ es un conjunto de variables internas que tiene en cuenta la distribución de defectos en la red cristalina o *dislocaciones* ¹⁷⁻¹⁸ y sus movimientos, que gobiernan la propiedad del material que se conoce más ingenierilmente como *endurecimiento*. Teniendo en cuenta la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación puede escribirse $\mathbf{F}^e = \mathbf{F}^e(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p)$, y la ecuación (4) admite el siguiente caso particular:

$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi}(\mathbf{F}^e, \hat{\alpha}) \tag{5}$$

La introducción de la hipótesis de elasticidad desacoplada ¹⁹ permite expresar a la

energía libre como la suma de dos componentes:

$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi}^e + \hat{\Psi}^p = \hat{\Psi}^e(\mathbf{F}^e) + \hat{\Psi}^p(\hat{\alpha}) \tag{6}$$

La sustentación física de esta hipótesis se basa en que los niveles de energía necesarios para distorsionar la red cristalina, que es la responsable de la deformación elástica, son diferentes de los niveles de energía necesarios para el deslizamiento intercristalino.

Fluencia y Potencial Plástico. Variables Internas.

Las funciones de Potencial y Fluencia Plásticas se escriben en el espacio de deformaciones. Con el fin de satisfacer el principio de equipresencia la función potencial se define empleando los mismos argumentos de la función de energía libre y así resultan:

$$\hat{G} = \hat{G}(\mathbf{F}^e, \hat{\alpha}) \quad \hat{F} = \hat{F}(\mathbf{F}^e, \hat{\alpha}) \tag{7}$$

En el contexto de la descomposición multiplicativa la regla de flujo se define mediante la evolución de la componente plástica del tensor gradiente de la deformación \mathbf{F}^p . El tensor gradiente de velocidad plástico $\mathbf{L}^p := \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1}$ tiene una interpretación física muy clara como puede verse, entre otros autores, en los trabajos de Asaro ¹⁷ y Kroner y Todosiu ¹⁸. La Figura 2, según Asaro ¹⁷, ilustra la cinemática de un sólido cristalino, y la deformación debida un deslizamiento cristalográfico.

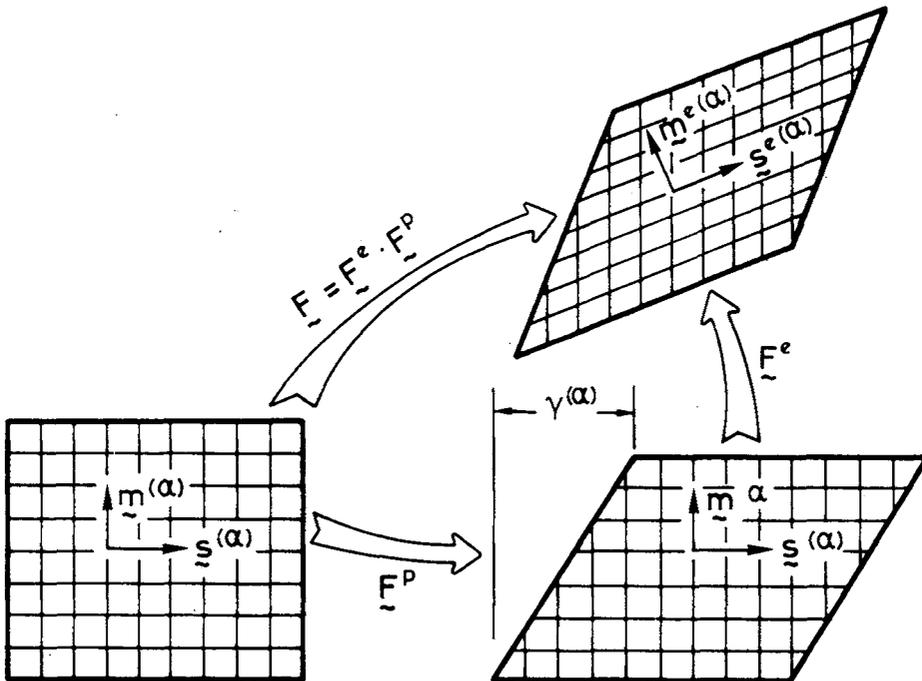


Figura 2. Cinemática de un sólido cristalino ¹⁷.

El movimiento del cristal puede expresarse en función del vector unitario \mathbf{s}^i que indica la dirección del deslizamiento y de su recíproco \mathbf{m}^i , para cada sistema elemental. La velocidad de deformación plástica, o velocidad de deslizamiento de las *dislocaciones* puede expresarse en función de la velocidad de deslizamiento de cada sistema elemental $\dot{\gamma}^i$ mediante:

$$\mathbf{L}^p \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}^i \mathbf{s}^i \otimes \mathbf{m}^i \quad (8)$$

El tensor gradiente de velocidad plástico admite la descomposición en una componente simétrica, el tensor velocidad de deformación plástica intermedia $\bar{\mathbf{D}}^p$ y una componente antisimétrica llamada velocidad de rotación plástica \mathbf{W}^p . Una simplificación usual en este caso consiste en despreciar la componente antisimétrica de la regla de flujo, es decir imponer $\mathbf{W}^p = 0$, y la ecuación (8) se escribe:

$$\mathbf{L}^p \cong \bar{\mathbf{D}}^p \quad (9)$$

Esta hipótesis simplificativa tiene el inconveniente de que la regla de flujo define la posición de la configuración intermedia salvo una rotación. Como el trabajo se reduce a modelos isótropos esta simplificación no acarrea inconvenientes, ya que los mismos son independientes de las rotaciones. La regla de flujo se relacionará posteriormente con la función potencial plástico y con la ecuación constitutiva. Las leyes que gobiernan el cambio o la evolución de las variables internas $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ se definen en función de la regla de flujo mediante un conjunto de tensores \mathbf{H} adecuados:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H}(\mathbf{F}^e, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) \cdot \bar{\mathbf{D}}^p \quad (10)$$

Las leyes de evolución de las variables internas se indican genéricamente mediante $(\dot{\cdot})$. Las variables internas pueden ser escalares, con lo cual la derivada material resulta objetiva, o tensores de segundo orden, para los cuales resulta deseable que la ley de evolución sea una derivada objetiva. Una manera de conseguir este propósito es emplear la derivada plástica de Lie $L_v^p(\cdot)$ en la configuración intermedia, o la derivada de Lie $L_v(\cdot)$, en la configuración deformada. Si se sigue este camino, entonces se acepta implícitamente la existencia de una variable interna tensorial definida en la configuración original $\boldsymbol{\Lambda}$ con una ley de evolución del tipo $\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \mathbf{H}(\mathbf{F}^p, \boldsymbol{\Lambda})$ ^{20,21}. Las variables internas tensoriales $\boldsymbol{\Lambda}$ y el tensor \mathbf{H} , deben definirse respetando la física del problema.

Restricción impuesta por Objetividad

A los elementos del modelo constitutivo definidos anteriormente hay que imponerles la restricción que surge del principio de Objetividad ^{22,23}, y las ecuaciones (6-7) se reescriben ⁶, con $\mathbf{F}^{e*} = \mathbf{F}^e \mathbf{Q}$.

$$\hat{\Psi}^e(\mathbf{F}^{e*}) = \Psi^e(\bar{\mathbf{E}}^e) \quad (11)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{E}}^e, \bar{\boldsymbol{\Lambda}}) \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{E}}^e, \bar{\boldsymbol{\Lambda}}) \quad (13)$$

La hipótesis de elasticidad desacoplada permite escribir el llamado Segundo tensor de Tensiones de Piola-Kirchhoff en la configuración intermedia $\bar{\mathbf{S}}$ en función de la componente elástica del tensor de deformación en la configuración intermedia: $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{E}}^e)$. De esta manera la función potencial se puede escribir en el espacio de tensiones como:

$$\bar{G} = \bar{G}(\bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{E}}^e), \bar{\mathbf{\Lambda}}) \quad \bar{F} = \bar{F}(\bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{E}}^e), \bar{\mathbf{\Lambda}}) \quad (14)$$

La regla de flujo dada por la ecuación (9), puede escribirse en función del potencial plástico definida por la ecuación (12) mediante:

$$\bar{D}^p \propto \frac{\partial \bar{G}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{\Lambda}})}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \quad (15)$$

que a su vez permite reexpresar la ley de evolución de las variables internas $\bar{\mathbf{\Lambda}}$ mediante:

$$\dot{\bar{\mathbf{\Lambda}}} \propto \mathbf{H}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{\Lambda}}) \bar{D}^p \quad (16)$$

Si la variable interna $\bar{\mathbf{\Lambda}}$ tiene caracter tensorial su ley de evolución viene dada por $L_p^p(\bar{\mathbf{\Lambda}})$.

Cálculo de las tensiones y del tensor de Elasticidad tangente.

Empleando la noción de hiperelasticidad las tensiones se calculan a partir del Potencial hiperelástico definido por la ecuación (11) según:

$$\bar{\mathbf{S}} = \rho_o \frac{\partial \Psi^e(\bar{\mathbf{E}}^e)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^e} \quad (17)$$

El tensor de elasticidad tangente en la configuración intermedia resulta a partir de la ecuación(17):

$$\bar{\mathbf{A}}^e = \rho_o \frac{\partial^2 \Psi^e(\bar{\mathbf{E}}^e)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^e \otimes \partial \bar{\mathbf{E}}^e} \quad (18)$$

Observación 3 Es importante destacar que los resultados dados por las ecuaciones (17-18) se han obtenido imponiendo a la expresión general dada por la ecuaciones (4) o (5):

- Hipótesis de Elasticidad desacoplada
- Restricción de Objetividad

La restricción debida a la simetría material debe cumplirse para modelar correctamente el material que se estudia, pero no constituye una restricción constitutiva para los resultados obtenidos. Sin embargo la simplificación consistente en despreciar la velocidad de rotación plástica, restringe los materiales admisibles al caso isótropo.

Tensor Tangente Elastoplástico.

Imponiendo la condición de consistencia plástica de manera objetiva, para lo cual se emplea la derivada plástica de Lie resulta ⁶:

$$L_v^p(\bar{\mathbf{S}}) = \left[\bar{\mathbf{A}}^e - \frac{\left\{ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \bar{\mathbf{A}}^e \right\} \otimes \left\{ \bar{\mathbf{A}}^e : \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \right\}}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \bar{\mathbf{A}}^e : \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} + H} \right] : \bar{\mathbf{D}} \quad L_v^p(\bar{\mathbf{S}}) = \bar{\mathbf{A}} : \bar{\mathbf{D}} \quad (19)$$

Desigualdad de Clausius-Duhem. Disipación Plástica.

Finalmente queda por verificar que el modelo cumple con la segunda Ley de la Termodinámica. Para ello se escribe en la configuración intermedia la desigualdad de Clausius:

$$\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}} - \rho_o \dot{\Psi} \geq 0 \quad (20)$$

y de acuerdo con la hipótesis de elasticidad desacoplada resulta:

$$\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}} - \rho_o \left(\dot{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e) + \dot{\Psi}^p(\bar{\mathbf{\Lambda}}) \right) \geq 0 \quad (21)$$

Teniendo en cuenta la descomposición aditiva del tensor velocidad de deformaciones en la configuración intermedia $\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{D}}^e + \bar{\mathbf{D}}^p$ (ver Tabla II) la ecuación (21) se puede reescribir como:

$$\bar{\mathbf{S}} : (\bar{\mathbf{D}}^e + \bar{\mathbf{D}}^p) - \rho_o \left(\dot{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e) + \dot{\Psi}^p(\bar{\mathbf{\Lambda}}) \right) \geq 0 \quad (22)$$

La derivada $\dot{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e)$ se expresa en función del tensor $\bar{\mathbf{E}}^e$ según $\dot{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e) = \frac{\partial \Psi^e(\bar{\mathbf{E}}^e)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^e} : \dot{\bar{\mathbf{E}}^e}$. Para un movimiento *elástico* la configuración intermedia permanece fija y resulta $\dot{\bar{\mathbf{D}}^e} = \dot{\bar{\mathbf{E}}^e}$. Luego la derivada buscada se escribe $\dot{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e) = \frac{\partial \Psi^e(\bar{\mathbf{E}}^e)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^e} : \bar{\mathbf{D}}^e$.

La derivada $\dot{\Psi}^p(\bar{\mathbf{\Lambda}}) = \frac{\partial \Psi^p(\bar{\mathbf{\Lambda}})}{\partial \bar{\mathbf{\Lambda}}} : \dot{\bar{\mathbf{\Lambda}}}$, puede expresarse en función del conjunto de las fuerzas termodinámicas $\bar{\mathbf{P}} = \{\bar{P}_i, \dots, \bar{P}_n\}$, conjugadas a las variables internas $\bar{\mathbf{\Lambda}}$ mediante: $\dot{\Psi}^p(\bar{\mathbf{\Lambda}}) = \bar{\mathbf{P}} : \dot{\bar{\mathbf{\Lambda}}}$.

A partir de este resultado la ecuación (22) se reescribe, reagrupando términos como:

$$\left(\bar{\mathbf{S}} - \rho_o \dot{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e) \right) : \bar{\mathbf{D}}^e + \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}}^p + \bar{\mathbf{P}} : \dot{\bar{\mathbf{\Lambda}}} \geq 0 \quad (23)$$

Para un incremento arbitrario de la variable libre $\bar{\mathbf{D}}^e$, el primer término de la Desigualdad:

$$\bar{\mathbf{S}} - \rho_o \dot{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e)$$

expresa la ecuación constitutiva y es por lo tanto una igualdad. Luego el término asociado al cambio de las variables internas conduce a la Disipación plástica \mathcal{D}^p :

$$\mathcal{D}^p = \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}}^p + \bar{\mathbf{P}} : \dot{\bar{\mathbf{A}}} \geq 0 \quad (24)$$

Observación 4 Es importante destacar que el argumento del primer término de la disipación es el flujo plástico definido a priori. Este resultado muestra que la ecuación constitutiva verifica o *satisface* la Segunda ley de la termodinámica. Sin embargo para justificar el resultado que refleja la ecuación (17) es suficiente emplear consideraciones de equilibrio de energía ²⁴, es decir la Primera Ley. En los últimos años algunos autores ⁴ obtienen el flujo plástico y la ecuación constitutiva utilizando directamente la desigualdad de Clausius-Duhem. Esta técnica bien puede considerarse como una forma alternativa de realizar el cálculo. En este último caso el flujo plástico se identifica *a posteriori* por inspección del primer término de la ecuación (24). Cabe mencionar que esta metodología es válida para problemas asociados. En cambio el camino seguido en el trabajo es general.

A partir de las definiciones de los elementos que caracterizan el modelo, y luego de imponer las restricciones y simplificaciones antes mencionadas, en el Cuadro 4 se resume la expresión del modelo en la configuración intermedia.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &= \bar{\mathbf{E}}^e + \bar{\mathbf{E}}^p \\ \bar{\mathbf{S}} &= \rho_o \frac{\partial \Psi^e(\bar{\mathbf{E}}^e)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^e} \\ \dot{\gamma} &\geq 0 \quad \bar{\mathbf{F}} \leq 0 \quad \dot{\gamma} \bar{\mathbf{F}} = 0 \\ \dot{\bar{\mathbf{E}}}^p &= \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \\ \mathcal{D}^p &= \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}}^p + \bar{\mathbf{P}} : \dot{\bar{\mathbf{A}}} \geq 0 \end{aligned}$$

Cuadro 4. Expresión del Modelo en la Configuración Intermedia.

MODELO CONSTITUTIVO EN LA CONFIGURACIÓN DEFORMADA

En este punto se deduce la expresión espacial del modelo a partir de los resultados obtenidos en la configuración Intermedia. Con este motivo se emplea la fórmula de Doyle-Ericksen ²⁵.

Para obtener el tensor de tensiones de Kirchhoff en la configuración deformada se parte de la función de energía libre dada por la ecuación (9), que se expresa en función

de argumentos espaciales mediante:

$$\bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e) = \bar{\Psi}^e(\mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{e}^e \cdot \mathbf{F}^e) = \bar{\psi}^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{F}^e) \quad (25)$$

teniendo en cuenta que mediante la la regla de la cadena resulta ²⁶:

$$\frac{\partial \bar{\psi}^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{F}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} = \mathbf{F}^e \cdot \frac{\partial \bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^e} \cdot \mathbf{F}^{eT} \quad (26)$$

El push-forward elástico de la ecuación (17) $\boldsymbol{\tau} = \phi_*^e \bar{\mathbf{S}}$ permite obtener, teniendo en cuenta la ecuación (26):

$$\boldsymbol{\tau} = \phi_*^e \bar{\mathbf{S}} = \rho_o \mathbf{F}^e \cdot \frac{\partial \bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^e} \cdot \mathbf{F}^{eT} = \rho_o \frac{\partial \bar{\psi}^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{F}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} \quad (27)$$

con lo que se ha obtenido un resultado alternativo al dado por la ecuación (17), solo que expresado en función del tensor elástico de Almansi \mathbf{e}^e , en la configuración deformada. En este punto es muy importante destacar que el empleo de la fórmula de Doyle-Ericksen obliga a incluir a la componente elástica \mathbf{F}^e como argumento de la energía libre, que resulta entonces una forma particular de la misma. Si no se incluye al tensor \mathbf{F}^e como argumento de la energía libre, entonces no es posible garantizar objetividad.

Calculando el push-forward elástico de la ecuación (18) se obtiene el tensor de elasticidad tangente espacial $\mathbf{a}^e = \phi_*^e \mathbf{A}^e$:

$$\mathbf{a}^e = \rho_o \frac{\partial^2 \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{F}^e)}{\partial \mathbf{e}^e \otimes \partial \mathbf{e}^e} \quad (28)$$

Para satisfacer el Principio de Equipresencia es necesario también incluir a \mathbf{F}^e como argumento de las funciones de Potencial Plástico y de Fluencia, además de las tensiones $\boldsymbol{\tau}$ y de las variables internas $\boldsymbol{\alpha}$. Luego se define:

$$g \stackrel{\text{def}}{=} g(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}^e) \quad (29)$$

$$f \stackrel{\text{def}}{=} f(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}^e) \quad (30)$$

Este requisito puede interpretarse a partir de la regla de flujo. Para ello recordando que $\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \propto \mathbf{d}^p$ y que $\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \propto \bar{\mathbf{D}}^p$, imponiendo que el multiplicador $\dot{\gamma}$ sea el mismo en las dos configuraciones y teniendo en cuenta, que las componentes plástica del tensor velocidad de deformación en las configuraciones intermedia y deformada satisfacen la relación $\mathbf{d}^p = \phi_*^e \bar{\mathbf{D}}^p$ resulta:

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \phi_*^e \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\mathbf{S}}}$$

para que esta igualdad se verifique es necesario que las funciones de fluencia y potencial respondan al formato de las ecuaciones (29) y (30).

En la deducción del cálculo del tensor de tensiones de Kirchhoff mediante la fórmula de Doyle-Ericksen, no se ha tenido en cuenta la restricción que significa la simetría

material. En este caso la dependendencia de \mathbf{F}^e se debe tener en cuenta mediante $\mathbf{F}^{e*} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{Q}$, con $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}$, donde \mathcal{G} es el grupo de simetría del sólido. Si el sólido es isótropo resulta $\mathcal{G} = \Theta$, donde Θ es el grupo ortogonal completo. Luego, a partir de la descomposición multiplicativa $\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e \cdot \mathbf{R}^e$, y haciendo $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{eT}$, la dependendencia de \mathbf{F}^e se expresa mediante el tensor de estiramiento izquierdo \mathbf{V}^e , o bien mediante otro tensor simétrico derivado del mismo como el tensor izquierdo de Cauchy-Green elástico $\mathbf{b}^{\#e}$, o bien mediante el tensor elástico de Finger \mathbf{b}^{e-1} . De esta manera la función de energía libre y las funciones de fluencia y potencial plástico resultan:

$$\psi = \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e-1}) + \psi^p(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b}^{e-1}) \quad (31)$$

$$g = g(\tau, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b}^{e-1}) \quad (32)$$

$$f = f(\tau, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b}^{e-1}) \quad (33)$$

El tensor de tensiones de Kirchhoff y el tensor de elasticidad tangente se escriben en este caso:

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_0 \frac{\partial \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e-1})}{\partial \mathbf{e}^e} \quad (34)$$

$$\mathbf{a}^e = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e-1})}{\partial \mathbf{e}^e \otimes \partial \mathbf{e}^e} \quad (35)$$

Observación 5 Es importante destacar que los resultados expresados por las ecuaciones (34-35) se han obtenido a partir de la expresión general dada por la ecuaciones (4) o (5), empleando las siguientes restricciones o hipótesis:

- Elasticidad desacoplada
- Objetividad
- Formula de Doyle-Ericksen
- Simetría Material

La expresión espacial del tensor tangente elastoplástico \mathbf{a} se obtiene calculando el push-forward elástico de la ecuación (19), con lo que se obtiene en la configuración espacial ${}^t\Omega$:

$$L_v(\boldsymbol{\tau}) = \left[\mathbf{a}^e - \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{a}^e \right\} \otimes \left\{ \mathbf{a}^e : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right\}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{a}^e : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} + H} \right] : \mathbf{d} \quad L_v(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{a} : \mathbf{d} \quad (36)$$

La disipación plástica se obtiene mediante un razonamiento análogo al de la configuración intermedia, y en este caso se expresa mediante:

$$\mathcal{D}^p \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p + \mathbf{p} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \quad (37)$$

donde $\mathbf{p} = \phi_*^e \bar{\mathbf{P}}$ resultan las fuerzas termodinámicas conjugadas a las variables internas espaciales $\boldsymbol{\alpha} = \phi_*^e \bar{\boldsymbol{\Lambda}}$.

La expresión espacial del modelo se reume en el Cuadro 5:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p \\ \boldsymbol{\tau} &= \frac{\partial \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e-1})}{\partial \mathbf{e}^e} \\ \dot{\gamma} &\geq 0 \quad f \leq 0 \quad \dot{\gamma} f = 0 \\ \mathbf{d}^p &= \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \\ \mathcal{D}^p &= \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p + \mathbf{p} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \end{aligned}$$

Cuadro 5. Expresión del Modelo en la Configuración Deformada.

APLICACIÓN AL CASO DE METALES

Para muchos materiales de interés práctico, como los metales, las deformaciones elásticas son pequeñas, el tensor \mathbf{F}^e se aproxima a la unidad, y los tensores \mathbf{b}^{e-1} y $\mathbf{b}^{\#e}$ tienden al tensor métrico espacial \mathbf{g} . Para este caso la distinción entre las configuraciones intermedia y deformada carece de importancia. En las ecuaciones (29-33) ya no hace falta incluir el tensor \mathbf{b}^{e-1} .

Además, como las deformaciones *elásticas* son pequeñas, es suficiente con caracterizar la componente elástica de la función de energía libre mediante una función cuadrática del tensor elástico de Almansi \mathbf{e}^e y de las constantes del material λ y μ según:

$$\psi^e = \frac{1}{\rho_o} \left[\frac{1}{2} \lambda \text{tr}(\mathbf{e}^e)^2 + \mu (\mathbf{e}^e : \mathbf{e}^e) \right] \quad (38)$$

que ha sido empleada por los autores⁸⁻¹⁰ como una alternativa a los modelos neohookeanos utilizados por otros autores³⁻⁵.

El modelo es asociado, y para este caso resultan, en la configuración deformada ${}^t\Omega$, $g = f$, y la regla de flujo es proporcional a la normal al criterio de fluencia en el espacio de tensiones de Kirchhoff. Se adopta para caracterizar la plasticidad un Modelo de Von Mises o $J2$ ²³, y el invariante $J2$ se escribe como:

$$J2 = \text{tr} \left(\tau'_{ij} \tau'^{kl} g_{ik} g_{jl} \right) \quad (39)$$

en donde se ha simplificado la expresión general al reemplazar a \mathbf{b}^{e-1} por \mathbf{g} y el criterio de fluencia resulta:

$$f(\boldsymbol{\tau}, \bar{e}^p) = \sqrt{J2(\boldsymbol{\tau})} - \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_y(\bar{e}^p) \quad (40)$$

El endurecimiento adoptado en este caso es isótropo, y la componente plástica de la función de energía libre que gobierna el endurecimiento resulta una función de la deformación plástica efectiva \bar{e}^p :

$$\psi^p = \psi^p(\bar{e}^p) \quad (41)$$

donde la deformación plástica efectiva es un escalar que se define mediante: $\bar{e}^p = \mathbf{d}^p : \mathbf{d}^p$.

En este trabajo se emplean dos tipos de endurecimiento. El caso más sencillo modela endurecimiento isótropo lineal, y para este caso la tensión de fluencia uniaxial viene dada por:

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + H\bar{e}^p \quad (42)$$

en donde H es el parámetro de endurecimiento.

Para este caso la componente plástica de la energía libre resulta:

$$\psi^p = \frac{1}{2}H\bar{e}_p^2 \quad (43)$$

y es inmediato observar que la fuerza termodinámica conjugada de \bar{e}^p es la tensión de fluencia σ_y .

Además del caso descrito se emplea una función de endurecimiento no lineal:

$$\sigma_y = a(b + c\bar{e}^p)^n \quad (44)$$

en el que a , b , c y n son constantes que dependen del material.

Para este caso la componente plástica de la energía libre se escribe:

$$\psi^p = \frac{a}{c(n+1)}(b + c\bar{e}^p)^{n+1} \quad (45)$$

Debe mencionarse que este modelo, en ausencia de plasticidad, es capaz de modelar problemas con grandes desplazamientos pero pequeñas deformaciones. Esta limitación se debe al tipo de función de elegida para modelar la energía libre elástica ψ^e . Este hecho no invalida de ninguna manera la formulación general ya que las simplificaciones se han introducido *a posteriori*, luego de obtener las expresiones generales del modelo, y no como una hipótesis de partida.

CONCLUSIONES

En el trabajo se han presentado los elementos de un modelo constitutivo capaz de tratar sólidos sometidos a grandes deformaciones. El modelo resulta totalmente consistente con la Mecánica de los medios continuos, y su deducción se ha hecho de manera general.

Las hipótesis más importantes del modelo propuesto pueden resumirse en el empleo de una forma cuadrática para la función de energía libre elástica, escrita en función del tensor elástico de Almansi, y en la omisión del tensor elástico de Finger en la definición de la energía libre dada por ecuación (38). Estas simplificaciones, que se realizan a *posteriori* de la formulación general, se basan en la evidencia reconocida que los metales poseen pequeñas deformaciones elásticas.

En ausencia de plasticidad, el modelo es capaz de tener en cuenta problemas de elasticidad con grandes desplazamientos, pero no puede simular problemas elásticos con grandes deformaciones debido a las hipótesis realizadas.

El modelo resultante posee una estructura bastante simple, que se asemeja a la de la plasticidad con deformaciones infinitesimales. Esta característica resulta muy útil a la hora de desarrollar la implementación numérica del modelo, que se discute en la parte II de este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), y a la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, las facilidades y el apoyo económico recibido durante la elaboración de este trabajo.

REFERENCIAS

1. A.E. Green y P.M. Naghdi, "A General Theory of an Elastic Plastic Continuum", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 18, pp. 251-281, (1965).
2. E.H. Lee, "Elastic-Plastic deformation at finite strains", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, pp. 1-6, (1969).
3. J.C. Simo y M. Ortiz: "A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 49, pp. 221-245, (1985).
4. J.C. Simo: "A Framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I Continuum Formulation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 66, pp. 199-219, (1988).
5. J.C. Simo: "A Framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part II", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 68, pp. 1-31, (1988).
6. C. García Garino, *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*, Tesis Doctoral, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, (1993).
7. T.J.R. Hughes, "Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate-Independent Deviatoric Plasticity", en *Theoretical Foundations for Large-Scale Computations for Nonlinear Material Behaviour*, S.Nemat-Nasser, R.J.Asaro and G.A.Hegemier Editores, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Holanda, (1984).

8. C. García Garino C. y J. Oliver, "A numerical model for elastoplastic large strain problems. Fundamentals and applications", en "*Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*", R. Owen, E. Oñate and E. Hinton Editores., Pineridge Press-CIMNE, Vol. **1**, pp. 117-129, (1992).
9. C. García Garino y J. Oliver: "Use of a frictional finite strain elastoplastic model for the simulation of sheet metal forming processes", en "*Numerical Methods in Engineering 92*", Ch. Hirsch, O.C. Zienkiewicz and E.Oñate Editores, pp. 185-192, (1992) .
10. C. García Garino y J. Oliver: "Use of a large strain elastoplastic model for simulation of metal forming processes", en "*Numerical Methods in Industrial Forming Processes*", J.L. Chenot et al Editores, pp. 467-472, Balkema, (1992).
11. J.C. Simo y T.J.R. Hughes: "General Return Mapping Algorithms for Rate-Independant Plasticity", en "*Constitutive Equations for Engineering Materials: Theory and Applications*", C.S. Desai Editor., Elsevier, (1987).
12. A.E. Green y P.M. Naghdi: "Some Remarks on Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains", *International Journal of Engineering Sciences*, Vol. **9**, pp. 1219-1229, (1971).
13. M. Kleiber: "Kinematics of deformation processes in material subjected to finite elastic-plastic strains", *International Journal of Engineering Science*, Vol. **13**, pp. 155-166, (1975).
14. M. Kleiber: "A note on finite strain theory of elastoplasticity", "*Acta Mechanica*", Vol. **50**, pp 291, (1984).
15. J.E. Marsden y T.J.R. Hughes: "*Mathematical Foundations of Elasticity*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.,(1983).
16. C. García Garino y J. Oliver: "Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones. Parte II: Implementación numérica y ejemplos de aplicación.", *Revista Internacional de Métodos Numéricos y sus aplicaciones en Ingeniería*, enviado para su publicación.
17. R.J. Asaro: "Crystal Plasticity", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **50**, pp. 1-12, (1984).
18. Kroner E. y Teodosiu C.: "Lattice defect approach to plasticity and viscoplasticity", en "*Problems of Plasticity*", A. Sawczuk Editor., Noordhoff International Publishing, pp. 45-88, 1974.
19. J. Lubliner: "On the thermodynamic foundations of non-linear solids mechanics.", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. **7**, pp. 237-254, (1972).
20. R.A. Eve, T. Gultop y B.D. Reddy: "An Internal variable finite-strain theory within the framework of Convex Analysis", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol **XLVIII**, pp. 625-643, (1990).
21. P.M. Pinsky, M. Ortiz y R.L. Taylor, "Operator Split methods in the numerical solution of the finite deformation elastoplastic dynamic problem", *Computer and Structures*, Vol. **17**, pp. 345-359, (1983).
22. L.E. Malvern, "*Introduccion to Mechanics of a Continuous Medium*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1969).
23. J. Lubliner, it "Plasticity Theory", Macmillan Publishing Company, New York, (1990).
24. S.C. Desai y H.J. Siriwardane, "*Constitutive Laws For Engineering Materials*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1984).
25. T.C. Doyle y J.L. Ericksen: "Nonlinear Elasticity", en *Advances in Applied Mechanics*, Vol. **4**, (1956).
26. J. Lubliner J. "*Thermomechanics of deformable bodies*", Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, (1985).