

UN MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLÁSTICO PARA MATERIALES FRICCIONALES. PARTE - I : VARIABLES FUNDAMENTALES, FUNCIONES DE FLUENCIA Y POTENCIAL.

SERGIO OLLER*
JAVIER OLIVER**
J. LUBLINER***
y
EUGENIO OÑATE**

**Universidad Nacional de Salta
Facultad de Ciencias Tecnológicas
Buenos Aires 177 - (4400) Salta - Argentina.
En la actualidad investigador en ***

***Universidad Politécnica de Cataluña
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Jordi Girona Salgado, 31 - 08034 Barcelona, España*

****University of California
Department of Civil Engineering
Berkeley, California 94720, USA*

RESUMEN

En este artículo se presenta un modelo constitutivo elasto-plástico, que permite simular el comportamiento multiaxial del hormigón, utilizando funciones de fluencia plástica homogéneas de primer grado en las tensiones. En particular, se presenta una modificación del criterio de Mohr-Coulomb y un nuevo criterio de fluencia que concuerda bastante bien con los resultados experimentales. También se formulan las variables fundamentales que utiliza el modelo, como son las variables internas de daño plástico y cohesión, y las funciones de fricción y dilatación. Se trata además, el problema de la objetividad en la respuesta, y su relación con la energía específica.

SUMMARY

An elasto-plastic constitutive model, that permits the simulation of the multiaxial behaviour of concrete using homogeneous of first degree yield functions, is presented. A modification of Mohr-Coulomb criterion and new yield criterion, which agrees closely with the experimental results, are presented. Also, the fundamental variables used in the model, i.e.: the plastic damage and cohesion internal variables, and friction and dilatancy function, are formulated. The problems of objectivity in the response and its relation with the specific energy are studied too.

Recibido: Junio 1988

INTRODUCCION

Es bien conocido que el fenómeno de *fisuración* en hormigón tiene lugar a bajos niveles de tensión, debido a la *pérdida de cohesión entre partículas*^{15,20} que ha sufrido el hormigón por efecto de la *microfisuración previa*.

Experimentos llevados a cabo con probetas de mortero de cemento muestran que las microfisuras siguen caminos aleatorios, con orientaciones arbitrarias^{3,39}. Este hecho, está apoyado por numerosas investigaciones que coinciden en que la microfisuración, a nivel microscópico, puede considerarse un fenómeno adireccional, y que la propagación de ésta sigue un camino errático que depende de la distribución de las partículas (áridos) inmersa en la matriz de cemento. Sin embargo, a nivel macroscópico, se puede observar una dirección dominante que viene marcada por *el lugar geométrico que describen los puntos isotrópicamente dañados*. Este fenómeno de microfisuración, es el principal responsable del *comportamiento inelástico* del hormigón¹⁷.

Si se admite como hipótesis que la *microfisuración se produce por el deslizamiento entre las partículas de un material friccional*, a costa de una pérdida de cohesión entre ellas (fenómeno isótropo), es posible relacionar el comportamiento de éste material con un fenómeno *elasto-plástico*^{15,17}. En este caso, se puede considerar la energía disipada como una medida del daño en el punto —*daño plástico*—.

El uso de una formulación plástica-degradable *localmente isótropa*, combinada con el concepto de *localización del daño*, da lugar a un comportamiento *globalmente anisótropo*. En este sentido, el modelo que aquí se presenta considera la *direccionalidad del daño macroscópico*, a través del lugar geométrico de los puntos que se encuentran isotrópicamente dañados, no siendo necesario conocer durante el proceso de cálculo la dirección del *daño local* (daño en cada punto). Debido a esto, el modelo evita trabajar con formulaciones ortótropas.

El modelo contempla gran parte de los aspectos más importantes que caracterizan el comportamiento inelástico del hormigón, tales como la *respuesta diferenciada para cada proceso de tensión-deformación multiaxial*, la combinación de fenómenos de *fisuración con aplastamiento y degradación de rigidez* a través de un tratamiento unificado, y el control de la dilatación mediante una superficie de potencial plástico adecuada. Por otro lado, el modelo presenta objetividad en la respuesta respecto del tamaño de la zona de localización del daño plástico.

Para facilitar su presentación, se presenta el trabajo dividido en dos partes:

- Una primera parte (*parte - I*), que se trata en este artículo, donde se dan las bases del modelo, se presentan sus variables fundamentales, se formula una modificación de la superficie de fluencia de Mohr-Coulomb, y también se introduce una nueva superficie de fluencia plástica, homogénea de primer grado en las tensiones, cuya evolución durante el proceso de carga cuasi-estático depende de la ley de evolución de las variables internas de cohesión y de daño plástico.
- Una segunda parte (*parte - II*), que se trata en otro artículo, donde se presenta la generalización del modelo para incluir efectos de degradación de rigidez, así como otros conceptos de interés, tales como la integración de la ecuación constitutiva, y

diversos ejemplos de aplicación.

BREVE RESEÑA SOBRE LOS MODELOS CONSTITUTIVOS ELASTO-PLASTICOS PARA MATERIALES FRICCIONALES

Existen una gran cantidad de *modelos constitutivos* que permiten describir el comportamiento de los materiales friccionales ante diversos estados de cargas, y especialmente del hormigón. Estos modelos intentan simular el comportamiento de un *material ideal* que resulta de considerar ciertas hipótesis simplificativas en el *sólido real*. Distintos autores, con diferentes puntos de vista, han dedicado una gran cantidad de trabajo para clasificar, ordenar y analizar gran parte de estos modelos constitutivos^{4,11,15,17,61}. Sin embargo, parece adecuado presentarlos ordenados en cuatro grupos: 1) Modelos basados en las teorías de elasticidad lineal y no lineal, 2) Modelos basados en la teoría de la plasticidad, 3) Modelos basados en la teoría endocrónica de la plasticidad y 4) Modelos de fractura. Cada uno de estos grupos incluye modelos constitutivos que reproducen el comportamiento del hormigón dentro de ciertos rangos más o menos limitados. En la actualidad existen investigaciones de vanguardia en casi todos los grupos, sin que se pueda destacar en forma clara, por el momento, una mayor preponderancia de unos sobre otros.

Como se ha mencionado, resultados experimentales confirman que el comportamiento no-lineal del hormigón, se debe fundamentalmente a un fenómeno inelástico (micro-fisuración), donde sólo se puede recuperar una pequeña parte de la deformación total desarrollada. Por esto, la deformación puede ser desdoblada en una *componente recuperable y otra irrecuperable*, situación que indica que la teoría de la plasticidad puede proveer una estructura teórica para el estudio del comportamiento del hormigón. Los modelos constitutivos formulados para tratar el comportamiento del hormigón y que utilizan de alguna manera la *teoría de la plasticidad*⁴³, pueden agruparse de la siguiente forma:

- 1) **Modelos de plasticidad perfecta:** Estos modelos consideran que bajo carga monótona creciente, después que el estado tensional alcanza la superficie de fluencia plástica el material fluye indefinidamente (Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, Willam-Warnke¹⁵).
- 2) **Modelos de plasticidad con endurecimiento positivo o negativo, con o sin degradación de rigidez:** Son los más utilizados en la actualidad para simular el comportamiento del hormigón. Entre estos modelos, se encuentran algunos con endurecimiento negativo (Murray et al.⁴⁰), otros con endurecimiento positivo y posterior pérdida violenta de tensión (Chen-Chen^{15,16,17}), y otros que establecen una regla de endurecimiento plástico combinada con otra de degradación de rigidez, de donde resulta un comportamiento global con endurecimiento inicial y posterior ablandamiento (Bažant-Kim⁴, Han-Chen²⁸, Klisinski-Mroz³¹, Simo-Ju⁶⁰).
- 3) **Modelos de zona inerte, combinados con plasticidad con endurecimiento:** Este grupo está formado por distintos modelos que se utilizan en materiales metálicos

(Kleiber^{29,30}), y recientemente Frantziskonis-Desai²⁴ han extendido su formulación a materiales friccionales. El modelo se basa en descomponer el comportamiento del sólido en dos partes, una que considera una *respuesta elasto-plástica con endurecimiento*, y otra que considera una *respuesta inerte*, tal que ambos comportamientos combinados conducen a una respuesta con ablandamiento.

Del estudio de los modelos constitutivos mencionados anteriormente⁴⁶, se desprende que cada uno de ellos presenta una formulación eficiente para el tratamiento de algunos problemas particulares que presenta el comportamiento del hormigón, sin embargo su tratamiento global requiere una *formulación más general* para mejorar la simulación.

En este trabajo se desarrolla un *nuevo modelo constitutivo* basado en la teoría de la plasticidad, que permite ser implementado de forma sencilla en un programa de elementos finitos, y reproduce de forma correcta el comportamiento no lineal del hormigón, sometido a complejos estados de tensión. En los apartados siguientes se presentan las bases matemáticas del modelo, juntamente con detalles de una nueva función de fluencia, que se ajusta bastante bien a los resultados de ensayos experimentales^{37,46}.

MODELO DE DAÑO PLÁSTICO – PRESENTACION GENERAL

Como se ha comentado, la teoría de la plasticidad proporciona un marco adecuado para formular el comportamiento de los materiales friccionales. De la extensión de sus principios básicos y de la reinterpretación de sus variables fundamentales, ha surgido el *modelo de daño plástico*^{37,43} que aquí se presenta. Así, a partir de la *variable de endurecimiento plástico* κ utilizada en la plasticidad clásica, se ha definido la *variable de daño plástico* κ^p , que al igual que la anterior crece *si y solo si* hay deformaciones plásticas no llegando nunca a decrecer. Esta *variable interna* está definida como una magnitud adimensional, normalizada a la unidad, que varía entre $0 \leq \kappa^p \leq 1$, tal que para $\kappa^p = 0$ no hay daño plástico y para $\kappa^p = 1$ se tiene el estado de *daño total de el punto del sólido*. Este *estado último* puede ser interpretado desde el punto de vista de la mecánica de los medios continuos como una *pérdida total de tensión*, y desde un punto de vista físico como un desmembramiento de la masa del sólido en el punto de análisis (discontinuidad física), situación que correspondería a la aparición de una macrofisura en el punto considerado.

El criterio de *fluencia plástica* es tratado en este modelo a través de una expresión matemática que puede ser escrita en la siguiente forma general:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c) = f(\boldsymbol{\sigma}) - c = 0 \quad (1)$$

donde $f(\boldsymbol{\sigma})$ es una función escalar homogénea de primer grado en las componentes del tensor de tensiones, que permite definir la cohesión c , (tensión uniaxial escalada), como una *función de endurecimiento plástico*⁴⁶. Los criterios de plasticidad de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager también gozan de esta cualidad, pero no aproximan adecuadamente el comportamiento real de los hormigones^{15,37}, ni de los geomateriales en general¹⁹.

Numerosos criterios de fluencia plástica han tratado de mejorar esta aproximación para los materiales cohesivos-friccionales^{15,16,22,23,34,50,52}, pero sólo se ha logrado una mejora formulando funciones $f(\sigma)$ *no-homogéneas* en las componentes del tensor de tensiones, característica que impide definir una *función de endurecimiento plástico* con una interpretación física directa. Para el modelo constitutivo que se propone, se han definido dos criterios de fluencia: -una simple modificación del de Mohr-Coulomb^{46,49} que, a partir de un ángulo de rozamiento interno ϕ apropiado^{46,49}, permite obtener una relación entre resistencias uniaxiales iniciales a compresión y tracción $|\sigma_C^0|/|\sigma_T^0|$ que se encuentra dentro del rango real del hormigón, —y otro más general³⁷, definido como una función homogénea de primer grado en las tensiones, que concuerda bastante bien con el comportamiento experimental del hormigón.

La *cohesión* c , es tratada como una magnitud escalada respecto a la resistencia inicial a compresión uniaxial del hormigón σ_C^0 (*umbral de discontinuidad*), que es el nivel de tensiones para el cual la deformación volumétrica ϵ_v es máxima. Su magnitud *inicial*, o cohesión del material virgen, define la posición de la *función de discontinuidad inicial* (o primera superficie de fluencia) y vale $c = c^0 = \frac{1}{N} \sigma_C^0$, para $\kappa^P = \kappa^{P^0} = 0$, siendo N un factor que depende del tipo de función de fluencia que se utilice⁴⁶, y establece la escala entre la cohesión y la resistencia uniaxial de compresión. La *cohesión final*, o cohesión del material totalmente dañado, vale $c = c^u = 0$, para $\kappa^P = \kappa^{P^u} = 1$, situación que define la *posición final de la superficie de fluencia*. A diferencia de la plasticidad clásica con endurecimiento isotrópico, la cohesión no es una simple función de la *variable de endurecimiento plástico* $c(\kappa)$, sino que es una *variable interna* que depende del *estado* del proceso elasto-plástico.

El *ángulo de rozamiento interno* ϕ , ha sido considerado como una simple función explícita de la variable de daño plástico $\phi(\kappa^P)$. Con esta hipótesis se ha obtenido una buena aproximación al comportamiento real de los sólidos friccionales. Este ángulo vale $\phi = \phi^0 = 0$ al iniciar el proceso plástico, para $\kappa^P = 0$, y $\phi = \phi^{max}$ al finalizar el proceso para $\kappa^P = 1$. No obstante, se podría definir ϕ de una manera general como una variable interna más.

El *ángulo de dilatación* ψ , también ha sido considerado como una simple función de la variable de daño plástico $\psi(\kappa^P)$, dado que con esta hipótesis también se ha obtenido una buena aproximación al comportamiento real de los sólidos friccionales. Este ángulo vale $\psi = \psi^0 = 0$ al iniciar el proceso plástico, para $\kappa^P = 0$, y $\psi = \psi^{max}$ al finalizar el proceso para $\kappa^P = 1$. Al igual que el ángulo de rozamiento interno, también podría definirse como una variable interna.

En definitiva, y desde el punto de vista de una formulación en variables internas³⁸, el modelo adopta como *variable libre* la tensión σ y como *variables internas* el conjunto $q = (\epsilon^P, \kappa^P, c)$, cuyas variaciones vienen determinadas por sus correspondientes ecuaciones de evolución.

Dejando de lado, por el momento, el fenómeno de la degradación de la rigidez, se pueden expresar las ecuaciones que gobiernan el modelo en la siguiente forma^{37,43,46}:

- Un *criterio de fluencia plástica* como el definido por la ecuación (1).

- Una *descomposición del vector de deformación total* ϵ en una *parte elástica* ϵ^e y otra *plástica* ϵ^p :

$$\epsilon = D_S^{-1} \sigma + \epsilon^p = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (2)$$

siendo D_S el tensor de rigidez elástica secante; y σ la tensión, que representa la *variable libre del problema*

- Una *regla de flujo plástica no asociada*, que proporciona la evolución de la deformación plástica, mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} H_{\epsilon^p}(\sigma, q) \equiv \dot{\lambda} \left[\frac{\partial \mathcal{G}(\sigma, c)}{\partial \sigma} \right] = \dot{\lambda} g \quad (3)$$

donde $\dot{\lambda}$ es el parámetro de consistencia plástica, y H_{ϵ^p} una función de estado vectorial, que depende de la función de potencial plástico $\mathcal{G}(\sigma, c)$ que se definirá más adelante.

- Una ecuación de evolución de la *variable de daño plástico* κ , definida por:

$$\dot{\kappa}^p = \dot{\lambda} H_{\kappa}(\sigma, q) \equiv \dot{\lambda} \left[h_{\kappa}(\sigma, \kappa^p, c) \cdot \frac{\partial \mathcal{G}(\sigma, c)}{\partial \sigma} \right] = h_{\kappa}(\sigma, \kappa^p, c) \cdot \dot{\epsilon}^p \quad (4)$$

donde H_{κ} es una función de estado escalar, que depende del vector $h_{\kappa}(\sigma, \kappa^p, c)$ que se definirá en este artículo, y del flujo plástico g .

- Y una ecuación de evolución de la *cohesión*, definida como:

$$\dot{c} = \dot{\lambda} H_c(\sigma, q) \equiv \dot{\lambda} \left[h_c(\sigma, \kappa^p, c) h_{\kappa}(\sigma, \kappa^p, c) \cdot \frac{\partial \mathcal{G}(\sigma, c)}{\partial \sigma} \right] = h_c(\sigma, \kappa^p, c) \dot{\kappa}^p \quad (5)$$

donde H_c es una función de estado escalar, que depende de la función $h_c(\sigma, \kappa^p, c)$ que será presentada más adelante, del vector $h_{\kappa}(\sigma, \kappa^p, c)$ y del flujo plástico g .

Finalmente, de la *condición de consistencia plástica de Prager*, y de las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (5), se obtiene la relación constitutiva incremental tangente, para los problemas *sin degradación de rigidez*:

$$\dot{\sigma} = D^{\epsilon^p} \cdot \dot{\epsilon} \quad (6)$$

siendo D^{ep} el tensor de rigidez tangente elasto-plástico, que resulta⁴⁶:

$$D_T^{ep} = D_S - \frac{\left[D_S \cdot \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right\} \right] \otimes \left[D_S \cdot \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\} \right]}{\underbrace{\left[h_c(\sigma, \kappa^p, c) \left(h_\kappa \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \right]}_A + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\} \cdot D_S \cdot \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right\} \right]} \quad (7)$$

donde A es el denominado *parámetro de endurecimiento plástico* y el símbolo \otimes indica producto tensorial. De la ecuación (7) se deduce que D_T^{ep} será simétrico, solamente para problemas de *plasticidad asociada*, cuando las funciones de fluencia y potencial coincidan ($\mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$).

VARIABLES FUNDAMENTALES DEL MODELO DE DAÑO PLÁSTICO

Variable de daño plástico: κ^p .

Introducción

La teoría de la plasticidad clásica define la variable interna de *endurecimiento plástico isotrópico* como una *deformación plástica efectiva* $\bar{\epsilon}^p$ que tiene la siguiente ley de evolución $\dot{\kappa} = \dot{\bar{\epsilon}}^p$; en cuyo caso se asocia el daño plástico de un punto del sólido, a la magnitud de $\bar{\epsilon}^p$ y se supone que, independientemente del tipo de proceso de deformación que se desarrolle (tracción, compresión, tracción-compresión), el estado de *daño total* sobreviene cuando se alcanza el valor último de la deformación plástica efectiva $\bar{\epsilon}^{pu}$. Sin embargo, los materiales cohesivo-friccionales tienen deformaciones últimas distintas para cada proceso mecánico^{15,62}, por ej.: los hormigones tienen deformaciones últimas entre 10 y 15 veces mayores a compresión uniaxial que a tracción uniaxial, situación que no puede representarse con una única deformación última (Una forma particular de solucionar este problema, ha sido propuesta por los autores en las referencias^{44,47}).

Otra alternativa que ofrece la teoría de la plasticidad clásica, es formular la variable interna de *endurecimiento plástico isotrópico* como un *trabajo plástico específico*, el cuál evoluciona durante el proceso plástico con la siguiente ley $\dot{\kappa} = \dot{w}^p = \sigma \cdot \dot{\epsilon}^p$. En este caso se asocia el daño de un punto del sólido a la energía específica disipada durante el proceso de carga w^p , y se supone que se ha alcanzado el nivel de daño total cuando el punto ha logrado disipar una energía específica igual a la *energía específica de daño plástico* g^p , (área total encerrada por la curva tensión-deformación para un proceso de carga uniaxial equivalente). Al igual que en el caso anterior, esta *variable de endurecimiento* constituye una magnitud única independiente del proceso de carga desarrollado, lo que no coincide con el comportamiento de los materiales friccionales que disipan distinta energía específica según sea el proceso mecánico desarrollado. Así, por ej.: en hormigones se disipa entre 100 y 150 veces más energía en un proceso a compresión uniaxial que a tracción uniaxial.

Debido a estos inconvenientes, surge la necesidad de formular una *nueva variable de endurecimiento* que dependa del tipo de proceso de carga que se desarrolle. Para ello se ha definido la *variable de daño plástico*, cuya formulación se basa considerar una *medida relativa de la energía que se disipa durante el proceso inelástico*. Por simplicidad y orden en la presentación, es conveniente definir esta variable para procesos uniaxiales simples, y luego generalizarla a procesos multiaxiales.

Definición de la variable de daño plástico para estados de tensión uniaxial.

De un ensayo experimental uniaxial a tracción y otro a compresión, pueden obtenerse los diagramas tensión-deformación, y a partir de ellos se pueden deducir las curvas $\sigma - \epsilon^p$ (Figura 1) que encierran las áreas g_T^p y g_C^p , respectivamente.

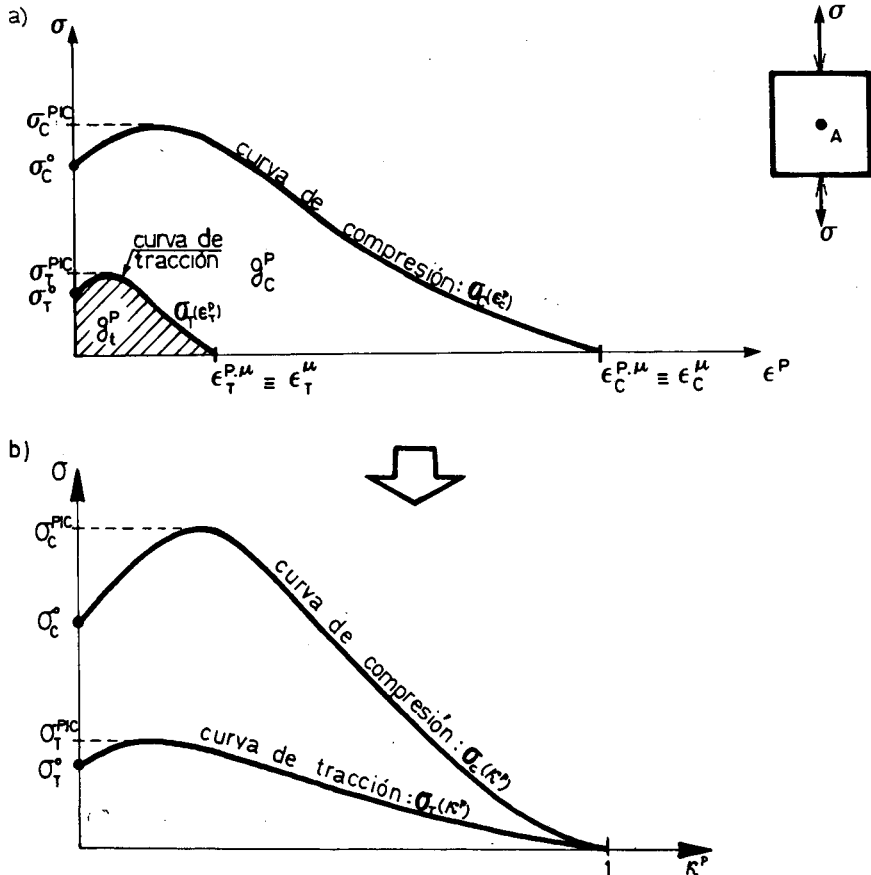


Figura 1. Ensayo uniaxial de tracción y compresión: a) Diagramas tensión-deformación plástica. b) Diagramas tensión-daño plástico.

$$g_T^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt \quad , \quad (8)$$

$$g_C^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p dt \quad , \quad (9)$$

siendo:

σ_T , σ_C : Tensión uniaxial de tracción y compresión, respectivamente

$\dot{\epsilon}_T^p$, $\dot{\epsilon}_C^p$: Deformación plástica uniaxial de tracción y compresión, respectivamente

y a partir de éstas se define la **variables de daño plástico** para un proceso cuasi-estático, de tracción y compresión uniaxial, como:

$$\kappa^p = \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^t \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt \quad , \quad \text{Para Tracción Uniaxial} \quad (10)$$

$$\kappa^p = \frac{1}{g_C^p} \int_{t=0}^t \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p dt \quad , \quad \text{Para Compresión Uniaxial} \quad (11)$$

De las ecuaciones (10) y (11) puede observarse que κ^p es el valor relativo entre la energía disipada en el instante t y la máxima a disipar al final del proceso de carga. Esta variable tomará valores comprendido entre 0 y 1 ($0 \leq \kappa^p \leq 1$) para el inicio y fin de cada proceso plástico, respectivamente. Con κ^p como variable independiente, se puede transformar el diagrama uniaxial de tensión-deformación plástica: $\sigma - \epsilon^p$, en otro: $\sigma - \kappa^{p46}$ (ver Figura 1b). Esto es :

$$\sigma_T = \sigma_T(\kappa^p) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_T^0 = \sigma_T(0) \\ 0 = \sigma_T(1) \end{cases} \quad (12)$$

$$\sigma_C = \sigma_C(\kappa^p) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_C^0 = \sigma_C(0) \\ 0 = \sigma_C(1) \end{cases} \quad (13)$$

De las ecuaciones (10) y (11) resulta una *variable de endurecimiento plástico isotropa*, y objetiva respecto a los dos procesos uniaxiales desarrollados, debido a que en cualquiera de los dos casos varía dentro de los mismos límites. De esta forma, el daño total en un punto se alcanza cuando $\kappa^p = 1$, y las energías disipadas a tracción g_T y a compresión g_C son distintas.

Definición de la variable de daño plástico para estados de tensión multiaxial.

De un modo general, para procesos de carga genéricos, se define la *variable de daño plástico* a partir de la ecuación (4):

$$\dot{\kappa}^p = h_{\kappa}(\sigma, \kappa^p, c) \cdot \dot{\epsilon}^p \quad (14)$$

donde $h_{\kappa}(\sigma, \kappa^p, c)$ es un vector que en los casos particulares de tracción y compresión uniaxial, da lugar a una variable de daño plástico κ^p que cumple con las ecuaciones (10) y (11), respectivamente, y para los restantes casos es capaz de desarrollar una magnitud de daño consistente con el proceso de carga. En su forma más simple podría ser igual al vector de tensiones: $h_{\kappa}(\sigma, \kappa) \equiv \sigma$. Para materiales isotrópicos la ecuación (14) puede ser definida utilizando las componentes principales de la tensión σ_i , quedando expresada como:

$$\dot{\kappa}^p = \sum_{i=1}^3 (h_{\kappa i} \dot{\epsilon}_i^p) \quad (15)$$

A partir de la forma general de la variable de daño plástico, se podrían formular distintas leyes de evolución con el fin de evaluar correcta y objetivamente la magnitud del daño en un punto del sólido, para cualquier proceso de carga cuasi-estático³⁷. Con el presente modelo, se propone una generalización de las definiciones uniaxiales (ecuaciones (10) y (11), considerando como hipótesis básica que *la energía total disipada durante un proceso multiaxial puede ser tratada como la suma ponderada de una energía a tracción más otra a compresión, disipadas durante procesos uniaxiales equivalentes* (otra expresión para el vector h_{κ} , puede consultarse en la referencia³⁷). En otras palabras, esta hipótesis admite que todo proceso multiaxial es susceptible de ser descompuesto en procesos uniaxiales desarrollados en las direcciones de principales. Esto es:

$$\dot{\kappa}^p = \dot{\kappa}_T^p + \dot{\kappa}_C^p = \sum_{i=1}^3 [(h_{\kappa i})_T + (h_{\kappa i})_C] \dot{\epsilon}_i^p \quad (16)$$

siendo:

$$(h_{\kappa i})_T = \frac{1}{g_T^{p*}} \langle \sigma_i \rangle \quad ; \quad (h_{\kappa i})_C = \frac{1}{g_C^{p*}} \langle -\sigma_i \rangle$$

$$\langle \pm x \rangle = \frac{1}{2} (x \pm |x|) \quad : \quad \text{Función rampa}^{38,60}$$

las magnitudes g_T^{p*} y g_C^{p*} son las energías específicas a tracción (ecuación 8) y compresión (ecuación 9), respectivamente, ponderadas de acuerdo con el estado tensional del punto. Esto es:

$$g_T^{p*} = g_T^p \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sigma_T} \quad ; \quad g_C^{p*} = g_C^p \frac{\sum_{i=1}^3 \langle -\sigma_i \rangle}{\sigma_C} \quad (17)$$

siendo σ_C y σ_T las tensiones uniaxiales de compresión y tracción, para el valor actual de κ (ver Figura 1b), y g_T^p y g_C^p las energías específicas inelásticas a tracción y compresión respectivamente (ver *Problema de objetividad en la respuesta* en el siguiente apartado). Sustituyendo en la ecuación (16) $(h_{\kappa i})_T$ y $(h_{\kappa i})_C$, por sus respectivas expresiones, resulta la variable de daño plástico según una forma *uniaxial equivalente*:

$$\dot{\kappa}^p = h_{\kappa}(\sigma, \kappa^p, c) \cdot \dot{\epsilon}^p = \frac{1}{g_T^p} \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p + \frac{1}{g_C^p} \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p \quad (18)$$

donde:

$$\dot{\epsilon}_T^p = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle \dot{\epsilon}_i^p}{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle} , \text{ y } \dot{\epsilon}_C^p = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle -\sigma_i \rangle \dot{\epsilon}_i^p}{\sum_{i=1}^3 \langle -\sigma_i \rangle} ,$$

son definiciones particulares de la deformación uniaxial equivalente a tracción y compresión, respectivamente.

Problema de objetividad en la respuesta.

Los sólidos friccionales sometidos a procesos de carga cuasi-estáticos, tienden a localizar (concentrar) la deformación en un "volumen infinitesimal" (plano de fractura)⁶⁴, donde se disipa casi la totalidad de la energía entregada al sólido (Figura 2). Para simular este comportamiento discontinuo por medio de la mecánica del sólido continuo, el *modelo de daño plástico* formula un *un comportamiento inelástico con ablandamiento que produce localización del daño en una zona de "volumen finito"* (zona dañada), que estará formada por el lugar geométrico de los puntos isótopamente dañados^{37,42,46} (Figura 2). En esta zona dañada, se admite una fuerte variación en el campo de los desplazamientos (lineal o no), con una discontinuidad entre el campo de deformaciones de la zona dañada y no dañada (ver más detalles en la referencia⁶⁴). Esta formulación con ablandamiento y localización de deformaciones, conduce a que el sólido disipe casi la totalidad de la energía a través del *volumen dañado*, por lo tanto esta energía disipada dependerá de las dimensiones de esta zona. Debido a que se trata de simular un fenómeno discontinuo mediante una formulación continua, es necesario exigir que la energía finita a disipar por el modelo continuo sea independiente del tamaño de la zona dañada (objetividad), y que a la vez coincida con la energía disipada en el proceso discontinuo real (exactitud en la respuesta).

Con el propósito de objetivizar la respuesta y disipar la energía correcta, el modelo que se presenta necesita considerar en su ley tensión-deformación una medida que depende de la relación que hay entre el *volumen de la zona dañada* V^p , y el área de fractura o discontinuidad A^p ⁴⁶. Para ello, se admite como hipótesis que la energía específica inelástica g^p no sólo depende de la energía por unidad de área dañada G^{p1} (considerada por hipótesis como *propiedad del material*, e igual a la energía de fractura G^f para un proceso de tracción simple^{3,5}, y a la energía de aplastamiento G^c para un proceso de compresión simple^{37,46}, sino que también depende de una *propiedad geométrica*, que en este caso se la define como la relación $L^p = V^p/A^p$. Consecuente con esta hipótesis, se formula la mencionada energía específica inelástica como: $g^p = g^{p0} + g^{p1}$; siendo: g^{p0} la energía específica inelástica desarrollada durante un proceso de microfisuración previo a la localización del daño, pudiendo expresarse a partir del área encerrada por la curva uniaxial experimental $\sigma_T - \epsilon_T^p$ para tracción simple, y $\sigma_C - \epsilon_C^p$ para compresión simple, desde el inicio del proceso hasta el punto donde se inicia la localización de deformaciones, ver Figura 2; y siendo: g^{p1} la energía específica desarrollada durante el proceso de localización, pudiendo expresarse a través

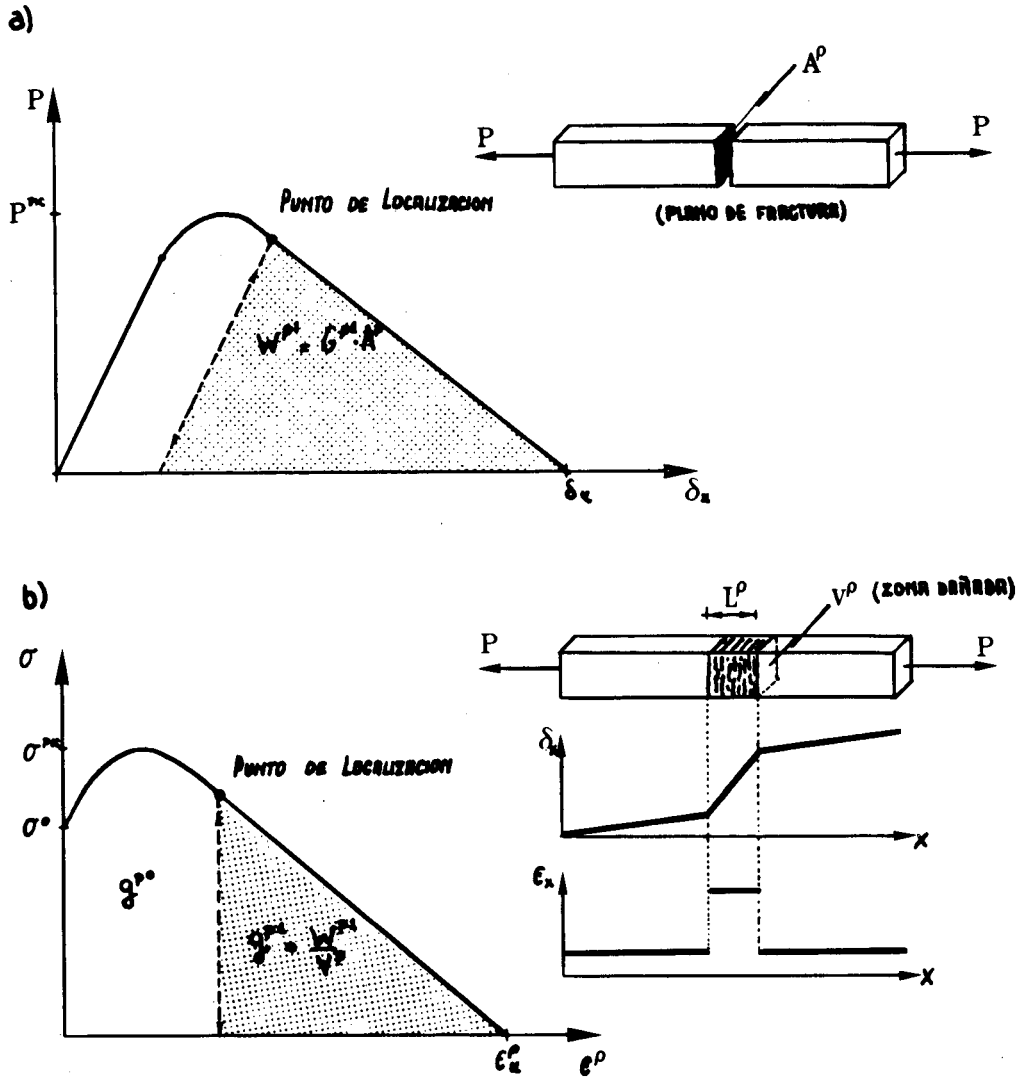


Figura 2. Fractura: a) Fenómeno real (discontinuidad en el sólido); b) Hipótesis realizada por el "modelo de daño plástico" (sólido continuo).

de la siguiente hipótesis particular:

$$g^{p1} = \frac{W^{p1}}{V^p} = \frac{G^{p1} A^p}{V^p} = \frac{G^{p1}}{L^p}$$

donde W^{p1} es la energía disipada en todo el sólido, desde el momento que se inicia la localización hasta el final del proceso de carga, y A^p el área de fractura o discontinuidad. L^p puede ser considerada como una longitud característica, que ha sido propuesta por distintos investigadores de muy diversa forma^{2,5,6,14,23,41,42,44,45}, y que debe ser una medida del ancho de la banda dañada o banda de localización. En este trabajo, se utiliza una expresión muy simple que ha sido propuesta por Bazant⁵, que da

resultados satisfactorios cuando se trabaja con elementos finitos con geometria regular: $L^p = L^{pe} = \sqrt{A^e} / \cos \vartheta$; siendo A^e el área del elemento finito donde queda contenida la banda de localización y ϑ el ángulo que hace esta banda con el eje de referencia global x_1 . Para una definición más rigurosa de éste parámetro, puede consultarse las referencias^{42,64} .

Definición de la ley de evolución de la cohesión - Relación: $c - \kappa^p$.

La ecuación de evolución de la cohesión c debe considerar, para cualquier proceso de carga cuasi-estático, que $c \rightarrow 0$ cuando $\kappa^p \rightarrow 1$, y $c = c^0$ cuando $\kappa^p = 0$ (ver Figura 3). En general, se puede escribir la ley de evolución de esta variable, como ecuación 5:

$$\dot{c} = h_c(\sigma, \kappa^p, c) \dot{\kappa}^p \tag{19}$$

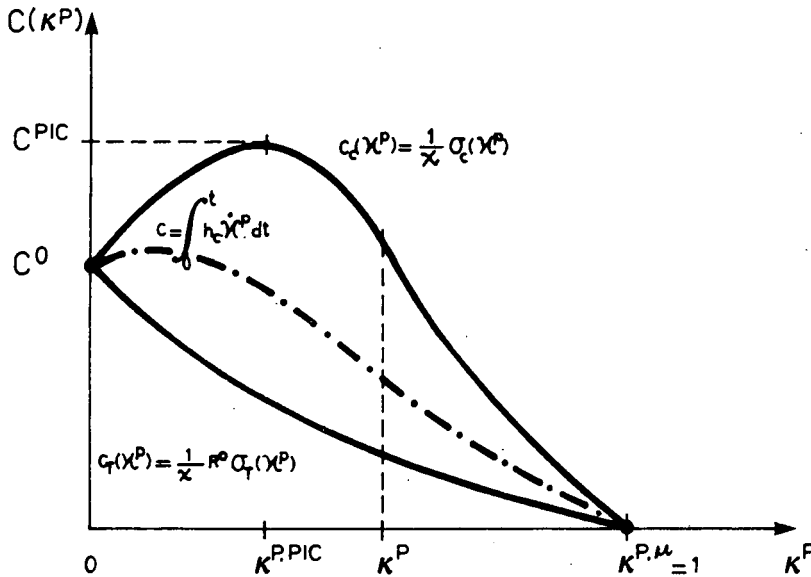


Figura 3. Función de cohesión a tracción y compresión uniaxial, y su evolución para un caso general de tensiones.

La cohesión, definida de esta forma, se convierte en una *variable interna dependiente del proceso plástico* (Figura 3), donde $h_c(\sigma, \kappa^p, c)$ es una función escalar del estado actual de las variables σ, κ^p, c , cuya finalidad es *definir la pendiente* de una curva $c - \kappa^p$ que está siendo desarrollada por el proceso mismo (Figura 3), tal que esta curva estará comprendida entre dos funciones explícitas extremas, que resultan de ensayos uniaxiales a tracción y compresión simple. Una forma posible de la función $h_c(\sigma, \kappa^p, c)$, es la siguiente:

$$h_c(\sigma, \kappa^p, c) = c \left[\frac{r(\sigma)}{c_T(\kappa^p)} \frac{dc_T(\kappa^p)}{d\kappa^p} + \frac{1-r(\sigma)}{c_C(\kappa^p)} \frac{dc_C(\kappa^p)}{d\kappa^p} \right] \tag{20}$$

donde las funciones $c_C(\kappa^P) = \frac{1}{N}\sigma_c(\kappa^P)$ y $c_T(\kappa^P) = \frac{1}{N}R^0\sigma_T(\kappa^P)$ están dadas en forma explícita y representan la evolución de la cohesión durante un ensayo experimental uniaxial de *compresión simple* y *tracción simple*, respectivamente (Figura 3); N es un factor de escala entre la cohesión y la resistencia uniaxial de compresión, y R^0 es la relación inicial que hay entre la resistencia uniaxial a compresión y a tracción. $r(\sigma)$ es una *función de peso* que depende del tipo de estado tensional que se produce en cada instante (tracción, compresión o tracción-compresión), y que varía entre $0 \leq r(\sigma) \leq 1$. Una forma de expresar $r(\sigma)$ es:

$$r(\sigma) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (21)$$

De esta forma, se tendrá $r(\sigma) = 1$ si $\sigma_i > 0$ para todo $i = 1, 2, 3$ (estado de tracción triaxial), y $r(\sigma) = 0$ si $\sigma_i \leq 0$ para todo $i = 1, 2, 3$ (estado de compresión triaxial). En particular para *carga radial*, $r(\sigma)$ se mantiene constante durante todo el proceso.

Algunos investigadores sostienen que las curvas de resistencia a tracción y compresión simple, que resultan de ensayos experimentales uniaxiales, tienen formas análogas^{15,61,62}, en cuyo caso, se tiene que la *relación entre las resistencias uniaxiales a compresión y tracción* $R(\kappa^P)$ se mantiene constante durante todo el proceso de carga cuasi-estático. Esto es:

$$R(\kappa^P) = \frac{\sigma_C(\kappa^P)}{\sigma_T(\kappa^P)} = \text{cte.} = R^0 \frac{c_C(\kappa^P)}{c_T(\kappa^P)} = R^0 \quad ; \quad \forall 0 \leq \kappa^P \leq 1 \quad (22)$$

en tal caso las funciones explícitas de la cohesión a tracción y compresión uniaxial coinciden. Esto es:

$$c(\kappa^P) = c_T(\kappa^P) = c_C(\kappa^P) = \frac{1}{N} \sigma_C(\kappa^P) \quad (23)$$

Para este caso particular, de una definición única de la cohesión, se puede formular una función de estado $h_c(\sigma, \kappa^P, c)$, más simple que la expresada en la ecuación (20):

$$h_c(\sigma, \kappa^P, c) = \left[\frac{dc(\kappa^P)}{d\kappa^P} \right] \quad , \quad (24)$$

por lo tanto, la ley de evolución de la cohesión \dot{c} ecuación (19), se reduce a una función explícita, no siendo necesario tratarla como variable interna:

$$\dot{c} = h_c(\sigma, \kappa^P, c) \dot{\kappa}^P = \left[\frac{dc(\kappa^P)}{d\kappa^P} \right] \dot{\kappa}^P$$

de donde resulta, luego de integrar:

$$c = c(\kappa^P) = \frac{1}{N} \sigma_C(\kappa^P) = \frac{R^0}{N} \sigma_T(\kappa^P) \quad (25)$$

Definición del ángulo de rozamiento interno ϕ - Relación: $\phi - \kappa^P$.

A medida que se aumenta la carga sobre un sólido cohesivo-friccional, en su interior se produce un deslizamiento entre partículas (micro-fisuración), que conduce a una pérdida de cohesión intergranular. Esta pérdida de cohesión implica una ganancia de fricción interna, provocando un comportamiento más dúctil a compresión^{6,8}, debido al incremento de la fuerza de rozamiento entre partículas, y una disminución de la resistencia a tracción por la pérdida de las fuerzas cohesivas (En las Figuras 5 y 6 se puede observar este fenómeno para el caso de la superficie de fluencia de Mohr-Coulomb). Esto inducirá a un crecimiento de la relación entre resistencias uniaxiales $R(\kappa^P) = \frac{\sigma_C(\kappa^P)}{\sigma_T(\kappa^P)}$ a medida que evolucione el proceso plástico.

El modelo que se presenta, permite formular una *variable de rozamiento interno*, con una ley de evolución del tipo $\dot{\phi} = \dot{\lambda} H_\phi(\sigma, q)$, que reproduzca el mecanismo antes mencionado durante todo el desarrollo del proceso de carga cuasi-estático. Sin embargo, los estudios realizados por De Borst y Vermeer⁸ sobre la propiedad cohesivo-friccional del hormigón, demuestran que la evolución del ángulo de fricción interna ϕ es una función directa del daño plástico κ^P que afecta la movilidad de la función de fluencia, provocando el efecto deseado de aumento de ductilidad a compresión y disminución de la resistencia a tracción⁶. Debido a estos estudios, se ha evitado la definición de una variable interna, utilizando la función explícita $\phi - \kappa^P$ propuesta en la referencia.⁸ (Figura 4):

$$\text{sen}\phi = \begin{cases} 2 \frac{\sqrt{\kappa^P \kappa^L}}{\kappa^P + \kappa^L} \text{sen}\phi^{\text{max}} & ; \forall \kappa^P \leq \kappa^L \\ \text{sen}\phi^{\text{max}} & ; \forall \kappa^P > \kappa^L \end{cases} \quad (26)$$

siendo κ^P la *variable de daño plástico* y κ^L el límite de daño, para el cual la cohesión se anula y el rozamiento interno se mantiene constante e igual a su valor máximo ϕ^{max} , por lo tanto este límite coincide con el de daño total: $\kappa^L = \kappa^P = 1$.

Utilizando la función de rozamiento interno expresada por la ecuación (26), y suponiendo en un primer momento la hipótesis de que la cohesión $c = \text{cte.}$, se puede observar que se desarrolla un proceso elasto-plástico que pasa de un estado inicial $\phi = \phi^0 = 0$ donde la presión hidrostática es despreciable, a otro final $\phi = \phi^{\text{max}}$ donde se hace muy importante su influencia, Figura 5. De esta forma, además de la *movilidad isotrópica* que adquiriría el criterio de fluencia por efecto de la evolución de la cohesión, aparece una *movilidad anisotrópica* provocada por el incremento del rozamiento interno. Este movimiento consiste en un acercamiento de la cúspide de la superficie hacia el origen, acompañada de un crecimiento de su base, presentándose como un fenómeno de *endurecimiento* para procesos de compresión y como un *ablandamiento* para procesos de tracción Figura 6. Así pues, bajo estados de compresión triaxial con presión de confinamiento, se obtiene un comportamiento dúctil para altas presiones hidrostáticas⁸, prevaleciendo inicialmente el efecto de endurecimiento por rozamiento sobre el ablandamiento por cohesión, y posteriormente crece la influencia del segundo fenómeno sobre el primero logrando un ligero ablandamiento.

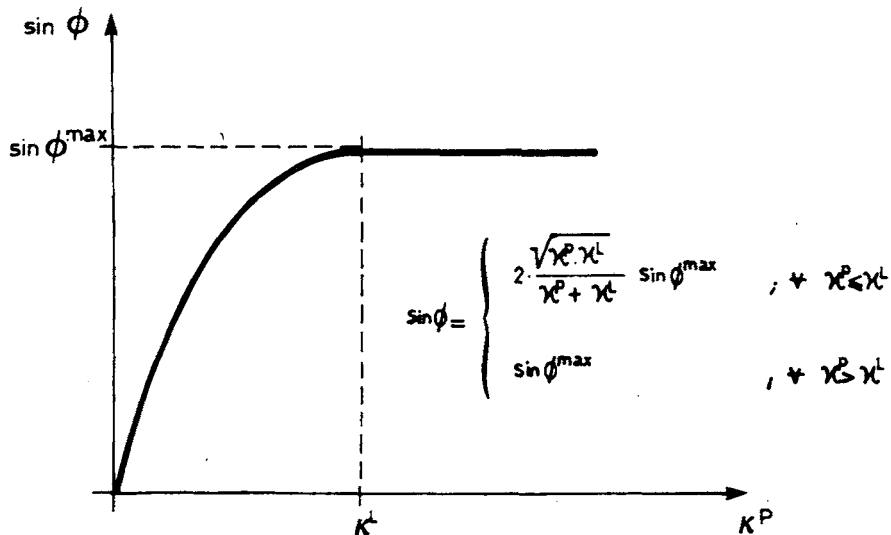


Figura 4. Función cuasi-empírica ^[23] que define la evolución del ángulo de rozamiento interno en función de la variable de daño plástico.

En materiales frágiles con alta cohesión inicial, como los hormigones, es posible utilizar durante todo el proceso plástico un rozamiento interno constante y máximo, sin que esto induzca a resultados insatisfactorios, al menos en la resolución de problemas biaxiales.

Definición del ángulo de dilatancia ψ - Relación: $\psi - \kappa^P$.

Debido a que los sólidos friccionales no exhiben un ángulo de dilatancia constante durante todo el proceso elasto-plástico, es necesario formular una función de evolución para esta variable. Este parámetro también podría ser definido como una *variable interna* del proceso inelástico con una regla de evolución del tipo $\dot{\psi} = \dot{\lambda} H_{\psi}(\sigma, q)$, pero dado que su variación puede ser descrita en forma simple y satisfactoria, mediante una función explícita de la variable de daño plástico $\psi = \psi(\kappa^P)$, no hace falta acudir a una formulación más compleja.

Entre las posibles formas de definir la evolución de la dilatancia a lo largo del proceso elasto-plástico, en este modelo se ha utilizado una modificación de la ecuación de Rowe⁵⁷, desarrollada por De Borst y Vermeer⁸, que se adapta muy bien al comportamiento de los hormigones. Esto es (ver Figura 7):

$$\psi(\kappa^P) = \arcsen \left[\frac{\text{sen} \phi(\kappa^P) - \text{sen} \phi_{cv}}{1 - \text{sen} \phi(\kappa^P) \text{sen} \phi_{cv}} \right] \quad (27)$$

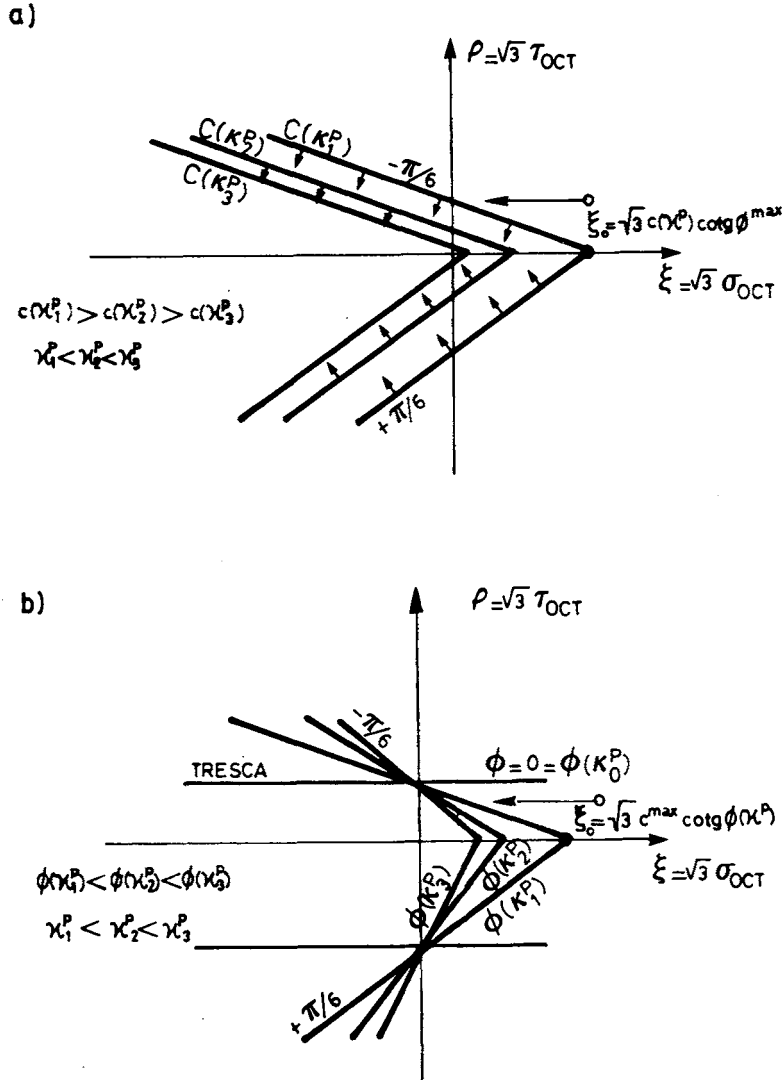


Figura 5. Movilidad del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb según sus planos meridianos: a) Movilidad isotrópica debido a la cohesión $c(\kappa^P)$; b) Movilidad anisotrópica debido al rozamiento interno $\phi(\kappa^P)$.

siendo:

$\phi(\kappa^P)$: función de rozamiento interno .

ϕ_{cv} : constante denominada "ángulo de rozamiento interno a volumen constante".

Su expresión surge a partir de ϕ^{\max} , y ψ^{\max} :

$$\text{sen } \phi_{cv} = \left[\frac{\text{sen } \phi^{\max} - \text{sen } \psi^{\max}}{1 - \text{sen } \phi^{\max} \text{sen } \psi^{\max}} \right]$$

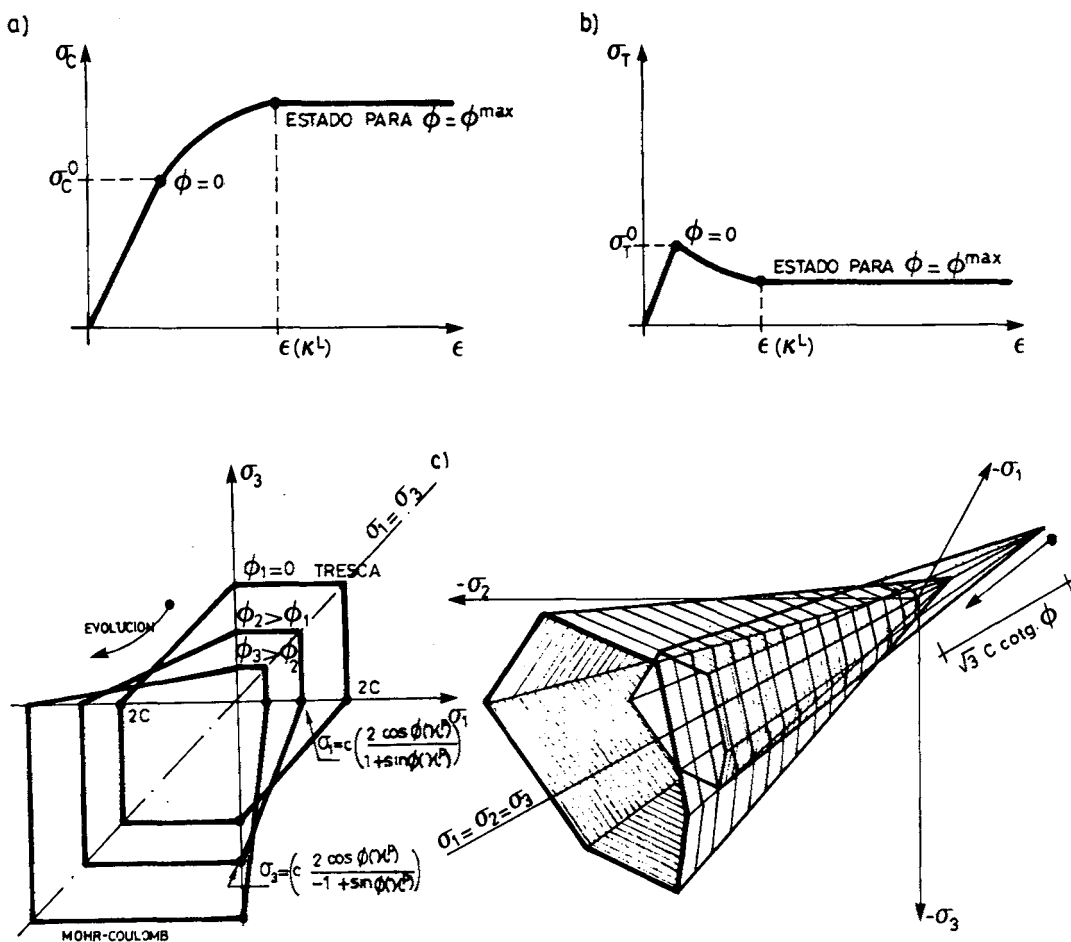


Figura 6. Movilidad del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb para una hipotética situación de cohesión constante: a) Caso de compresión simple; b) Caso de tracción simple; c) Movilidad anisotrópica debido al rozamiento interno $\phi(\kappa^P)$.

Como dato orientativo, para hormigones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^{\max} \sim 35^\circ \\ \psi^{\max} \sim 13^\circ \end{array} \right.$$

La ecuación (27) describe una evolución tal, que al iniciar el proceso plástico se produce una dilatación negativa, creciendo luego con el incremento de κ^P hasta alcanzar el valor de dilatación nula $\psi(\kappa^P) = 0$ para $\phi = \phi_{cv}$ (ángulo de rozamiento interno que permite un proceso inelástico a volumen constante), a partir de este estado, la dilatación crece hasta alcanzar su valor máximo $\psi(\kappa^P) = \psi^{\max}$, finalmente sigue un proceso con dilatación máxima constante Figura 7. Para los hormigones no deben utilizarse ángulos de dilatación negativos⁸, situación que exige considerar la siguiente

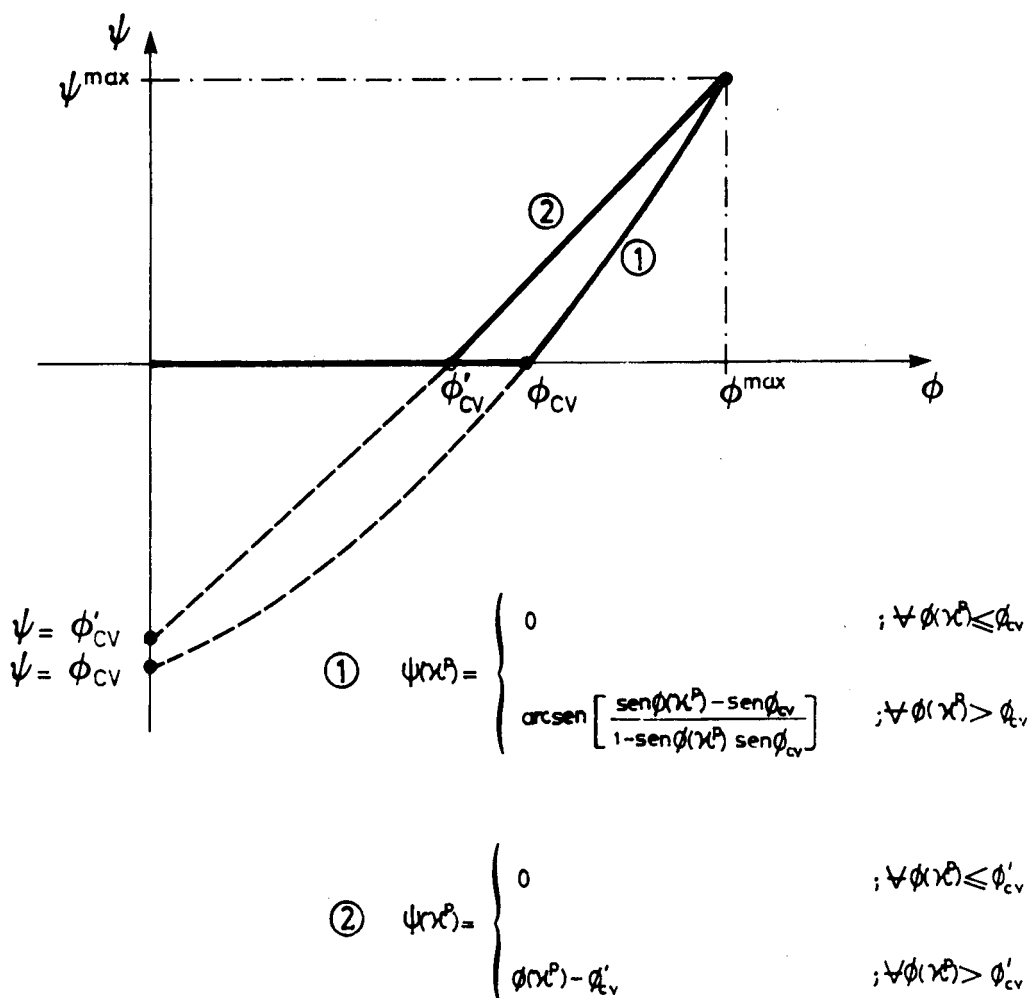


Figura 7. Evolución del ángulo de dilatancia ψ en función del ángulo de fricción interna ϕ .

limitación sobre la ecuación (27):

$$\psi(\kappa^p) = \begin{cases} 0 & ; \forall \phi(\kappa^p) \leq \phi_{cv} \\ \arcsen \left[\frac{\text{sen} \phi(\kappa^p) - \text{sen} \phi_{cv}}{1 - \text{sen} \phi(\kappa^p) \text{sen} \phi_{cv}} \right] & ; \forall \phi(\kappa^p) > \phi_{cv} \end{cases} \quad (28)$$

Se propone además, como una alternativa sencilla a esta función de dilatancia⁴⁶, otra que establece una relación lineal entre ψ y ϕ Figura 7, y que permite una buena

aproximación a la ecuación de Rowe. Esto es:

$$\psi(\kappa^p) = \begin{cases} 0 & ; \forall \phi(\kappa^p) \leq \phi'_{cv} \\ \phi(\kappa^p) - \phi'_{cv} & ; \forall \phi(\kappa^p) > \phi'_{cv} \end{cases} \quad (29)$$

Siendo $\phi'_{cv} = \phi^{\max} - \psi^{\max}$. Tanto la ecuación (28) como la ecuación (29) dan resultados similares para el hormigón, dentro el período que interesa $\phi_{cv} \leq \phi \leq \phi^{\max}$.

CRITERIO DE FLUENCIA PLASTICO

Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb modificado.

La utilización del criterio de fluencia clásico de Mohr-Coulomb para materiales del tipo del hormigón, presenta el inconveniente de no cumplir con la *relación inicial entre resistencias uniaxiales a compresión y tracción* $R^0 = |\sigma_C^0|/|\sigma_T^0|$ para ángulos de rozamiento interno ϕ comprendidos dentro de los valores experimentales del hormigón: $30^\circ \leq \phi \leq 35^\circ$ ⁴⁶. Entre las soluciones que se adoptan habitualmente, está la de aumentar este ángulo de fricción interna hasta alcanzar la relación de resistencia uniaxial requerida^{46,48,49}. Sin embargo, esta no es una solución si se trabaja con plasticidad asociada, pues el criterio de Mohr-Coulomb definido como superficie de potencial plástico con un gran ángulo de dilatancia $\phi = \psi$, produciría en el sólido un efecto excesivo del *fenómeno de dilatancia*. Para evitar esto, se presenta la necesidad de utilizar una regla de flujo no-asociada $\frac{\partial G}{\partial \sigma} \neq \frac{\partial F}{\partial \sigma}$ con el fin de controlar el incremento de deformación plástica volumétrica $\dot{\epsilon}_v^p$. Otra solución que se utiliza muy a menudo, consiste en limitar el dominio del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb en la zona de tracción total del espacio de tensiones principales, con un *criterio de barrera* que no es otra cosa que una *disminución de tensión* llevada a cabo mediante el criterio de Rankine^{15,46,58}. No obstante, esta combinación de criterios (Mohr-Coulomb con Rankine), adolece de algunos inconvenientes⁴⁶.

Con el fin de trabajar con plasticidad asociada, y evitar el inconveniente que presenta la utilización de la función de Mohr-Coulomb definido con un ángulo de rozamiento interno muy alto, se propone en este apartado una *simple modificación de este criterio* Figura 8, consistente en afectar la tensión principal es mayor σ_1 de un parámetro de ajuste α_R ⁴⁸ que permite regular la relación de resistencia uniaxial, hasta cumplir con el valor deseado. La superficie de fluencia que resulta de esta consideración es la siguiente:

$$\mathcal{F}(\sigma, c, \phi, \alpha_R) = \left(\frac{\alpha_R \sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\alpha_R \sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \text{sen} \phi - c \cos \phi = 0 \quad (30)$$

siendo $\sigma_1 = \sigma^{\max}$ y $\sigma_3 = \sigma^{\min}$, las tensiones principal mayor y menor respectivamente, c la cohesión interna del sólido, ϕ el ángulo de rozamiento interno entre partículas

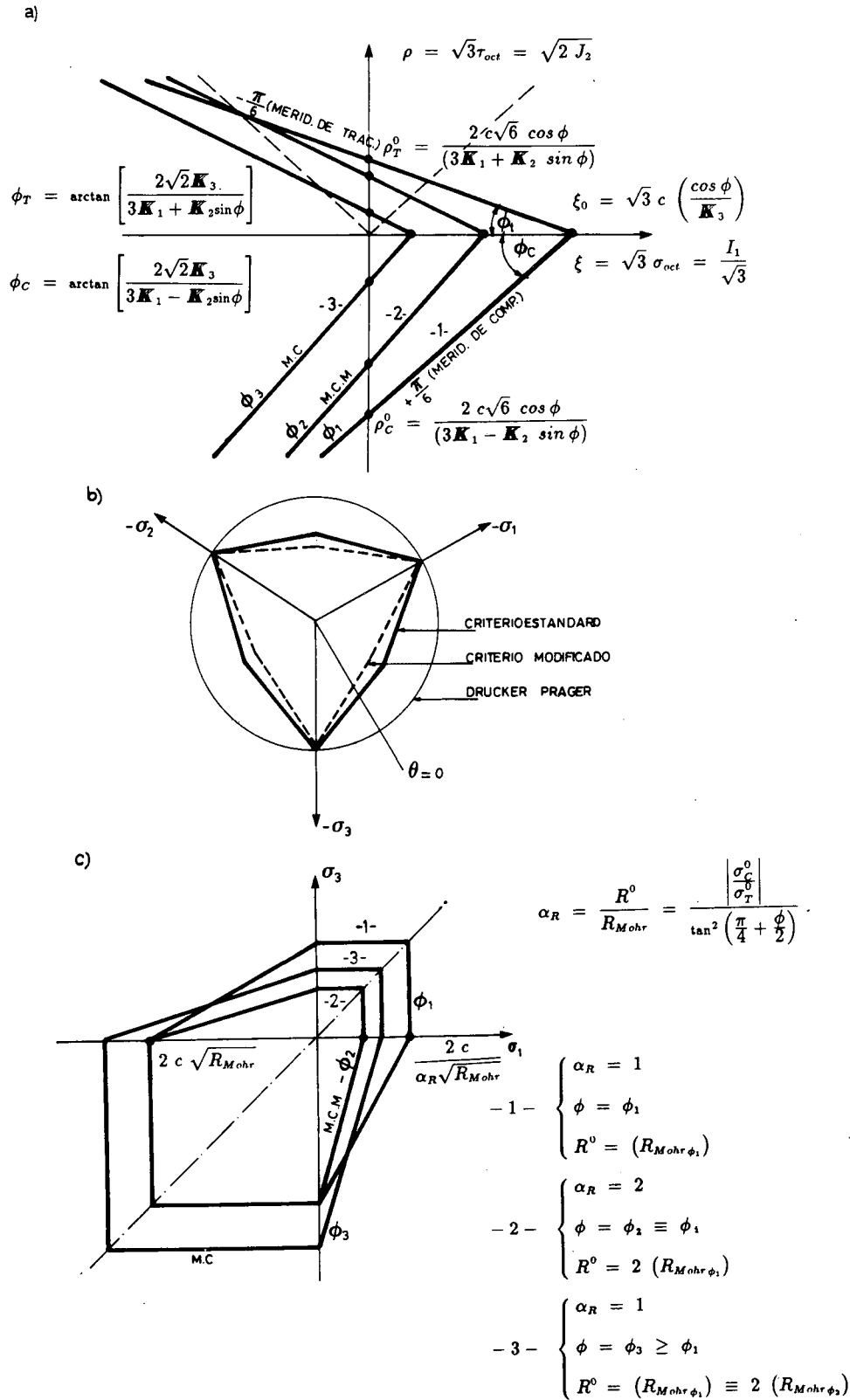


Figura 8. Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb modificado.

del sólido, y α_R el parámetro de ajuste de la tensión principal mayor. Operando algebraicamente con ésta, se tiene:

$$\mathcal{F}(\sigma, c, \phi, \alpha_R) = \left[\alpha_R \sigma^{\max} R_{\text{Mohr}} - \sigma^{\min} \right] - 2c \sqrt{R_{\text{Mohr}}} = 0 \quad (31)$$

donde:

$$R_{\text{Mohr}} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) ,$$

A partir de la ecuación (31) se puede obtener el valor de $\alpha_R = R^0 / R_{\text{Mohr}}$, necesario para cumplir con la relación de resistencia uniaxial requerida, cualquiera sea el ángulo de rozamiento interno ϕ que se proponga comprendido entre $0^\circ < \phi < 90^\circ$ ⁴⁶.

Para este criterio de fluencia, el factor de proporcionalidad entre la función de cohesión, correspondiente a un proceso de compresión, y la correspondiente tensión uniaxial⁴⁶, vale: $\lambda = 2 \sqrt{R^0}$.

Puede formularse la ecuación (30) en función de los invariantes del tensor de tensiones σ y de su desviador s , a partir de la expresión de las tensiones principales en función de dichos invariantes, llegando después de un simple tratamiento algebraico⁴⁶, a:

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \theta, c, \phi, \alpha_R) = \frac{I_1}{3} \mathbb{K}_3 + \sqrt{J_2} \left(\mathbb{K}_1 \cos \theta - \mathbb{K}_2 \frac{\text{sen} \theta \text{sen} \phi}{\sqrt{3}} \right) - c \cos \phi = 0 \quad (32)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_1 &= \frac{(\alpha_R + 1)}{2} - \frac{(1 - \alpha_R)}{2} \text{sen} \phi \\ \mathbb{K}_2 &= \frac{(\alpha_R + 1)}{2} - \frac{(1 - \alpha_R)}{2} \frac{1}{\text{sen} \phi} \\ \mathbb{K}_3 &= \frac{(\alpha_R + 1)}{2} \text{sen} \phi - \frac{(1 - \alpha_R)}{2} = \mathbb{K}_2 \text{sen} \phi \end{aligned}$$

Observese, que para $\alpha_R = 1$ la ecuación (32) coincide con la función de Mohr-Coulomb clásica.

Definición de un nuevo criterio de fluencia³⁷.

La modificación del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb, presentada en el apartado anterior, soluciona un único problema puntual, sin mejorar otras características del criterio. En el ámbito de un modelo que pretende obtener una simulación ajustada al comportamiento más general del hormigón, es necesario formular un nuevo criterio de fluencia, que brinde una solución más amplia.

Mientras en ensayos biaxiales de hormigones^{35,62} es usual encontrar que la *superficie de discontinuidad inicial* es similar en su forma a las sucesivas *superficies de carga plástica*, en estados de compresión triaxial no se disponen de ensayos experimentales para altas presiones hidrostáticas que permitan afirmar lo mismo. No obstante esta falta de conocimiento sobre el comportamiento del hormigón para estados de tensión

triaxial afectados por altas presiones hidrostáticas, existen criterios como el denominado *cap model*^{59,63}, que hacen la hipótesis de que la *superficie de discontinuidad inicial* se cierra sobre el eje de presiones hidrostáticas, mientras la *superficie de tensión máxima o segundo límite de falla* así como las *sucesivas superficies de carga* (incluida la *superficie límite de tensión última*), se encuentran abiertas hacia el infinito sobre el mencionado eje de presiones hidrostáticas en la zona de compresión triaxial. Esto implicaría, que para estos estados, donde $0 > \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, se desarrollaría un proceso de endurecimiento indefinido, sin alcanzar nunca la superficie de falla. Por otro lado, debido a que el presente modelo está orientado hacia el estudio del *daño total*, no se intenta formular un criterio de fluencia que considere el comportamiento en la *región diagonal* ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), donde aparentemente no se puede alcanzar la situación de daño total, por lo tanto se propone una función del tipo de la ecuación (1) que sólo será válida en la zona del espacio de tensiones donde se tiene la certeza que un proceso de carga radial conduce a un estado de daño total. Es por lo tanto un rasgo característico del presente modelo, que sea la misma función $\mathcal{F}(\sigma, c)$ la que describa el *límite de discontinuidad inicial*, y luego evolucione durante el proceso de carga, fijando los *sucesivos límites de falla*.

Se ha mencionado anteriormente que este modelo elasto-plástico adopta el uso de funciones de fluencia homogéneas de primer grado en las componentes del tensor de tensiones. Esta decisión permite definir una *función de endurecimiento plástico* simple y con un claro sentido físico, en este caso la cohesión c , tratada como una tensión escalada respecto de la tensión de compresión uniaxial σ_C (ver apartado anterior). No obstante esta aparente ventaja, los criterios de fluencia que gozan de esta característica no pueden simular el comportamiento de los sólidos friccionales a muy altas presiones hidrostáticas, donde se exige que los meridianos se curven hasta hacerse paralelos al eje de presión hidrostática⁵⁰. Sin embargo, no hay evidencias experimentales de que esto ocurra en hormigones, pues los resultados experimentales aprovechables^{15,50,52}, que surgen de ensayos triaxiales a compresión, no alcanzan tan altas presiones hidrostáticas, indicando solamente una leve curvatura en los meridianos sin que lleguen a ser paralelos al eje de presión hidrostática Figura (9e). En consecuencia, los meridianos rectos pueden ser una buena aproximación dentro del dominio de trabajo al que normalmente se somete al hormigón. Esta circunstancia, conduce a la adopción de funciones de fluencia homogéneas de primer grado, y en particular a la formulación del siguiente criterio:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\sigma, c) = \frac{1}{(1 - \alpha)} \left[\sqrt{3} J_2 + \alpha I_1 + \beta \langle \sigma^{\max} \rangle - \gamma \langle -\sigma^{\max} \rangle \right] - c = 0 \quad (33)$$

donde α , β y γ son constantes adimensionales que determinan la forma de la función de fluencia, σ^{\max} es la tensión principal mayor: $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 = \sigma^{\max} = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) + \frac{I_1}{3}$ y c es la función de cohesión o endurecimiento plástico. Para este criterio de fluencia, el factor de proporcionalidad entre la funciones de cohesión, a compresión simple y la respectiva tensión uniaxial, es⁴⁶: $\aleph = 1$.

Si en la ecuación (33) se hace $\sigma^{\max} = 0$ (estado de compresión biaxial:

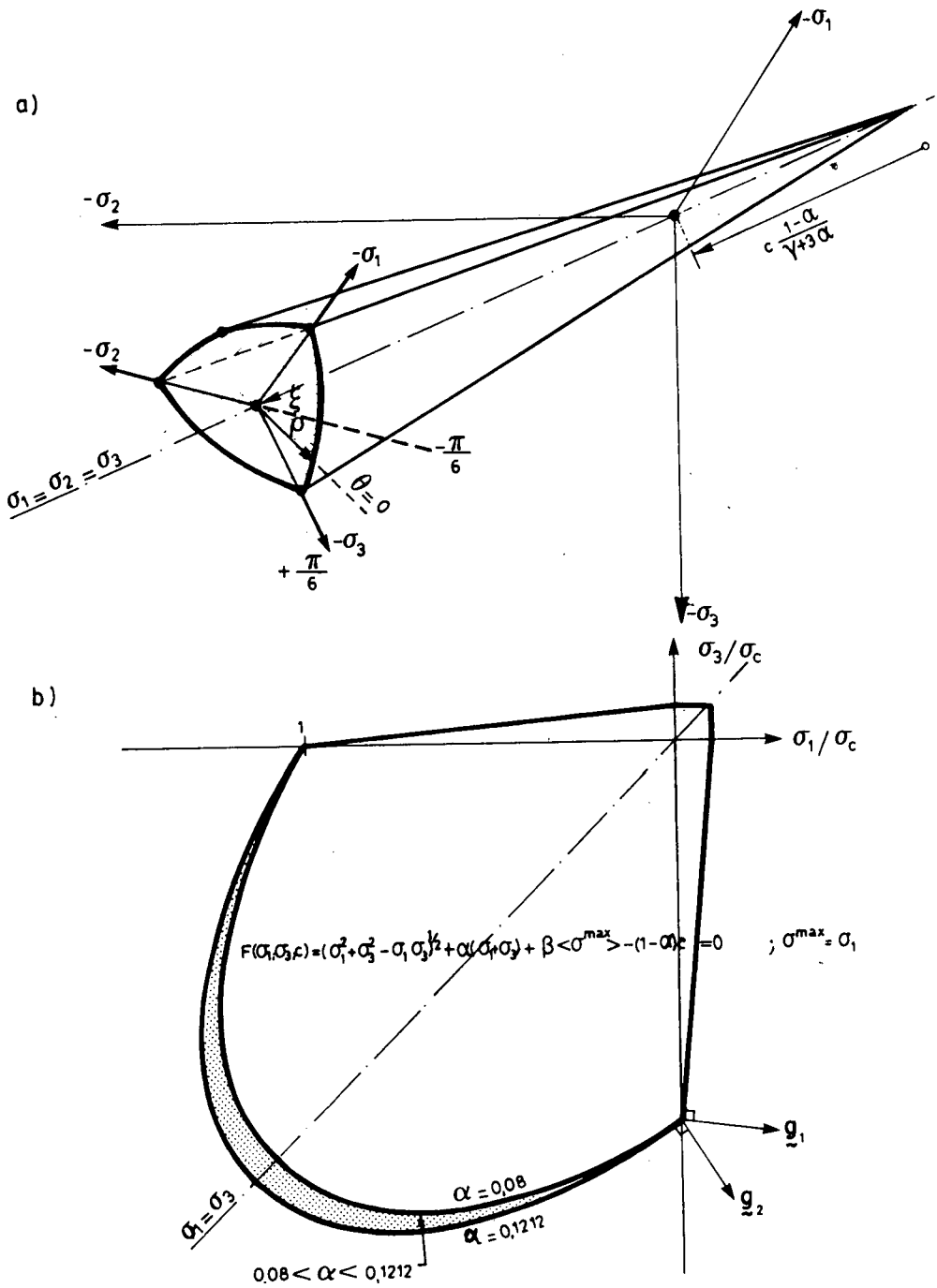


Figura 9. Criterio de fluencia propuesto: a) En el espacio de tensiones principales o espacio de Westergard; b) Según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

$\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 = 0$), este criterio toma la forma del criterio de Drucker-Prager en

c)

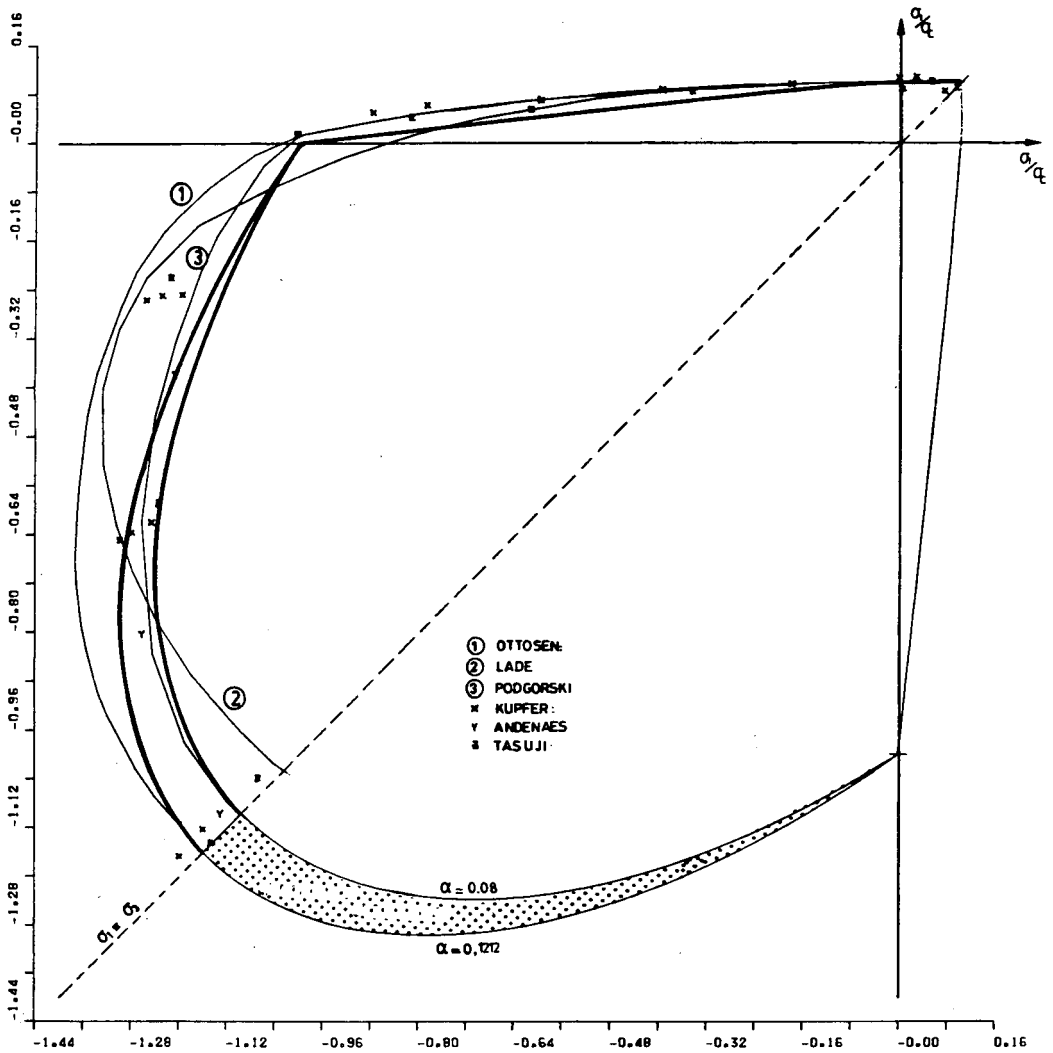


Figura 9. Criterio de fluencia propuesto: c) Comparación, en el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$, con los criterios de fluencia plástica de: Ottofen⁵⁰, Lade³⁶, Podgorski⁵²; y con los ensayos de: Kupfer³⁵, Andenaes¹, Tasuji⁵².

la zona de compresión total, salvo el valor de sus constantes de ajuste^{37,46}. Esto es:

$$F = F(\rho, \xi, c) = \rho + \alpha' \sqrt{6} \xi - \sqrt{2} K' = 0 \tag{34}$$

siendo:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \quad , \quad K' = \frac{(1 - \alpha)}{\sqrt{3}} c$$

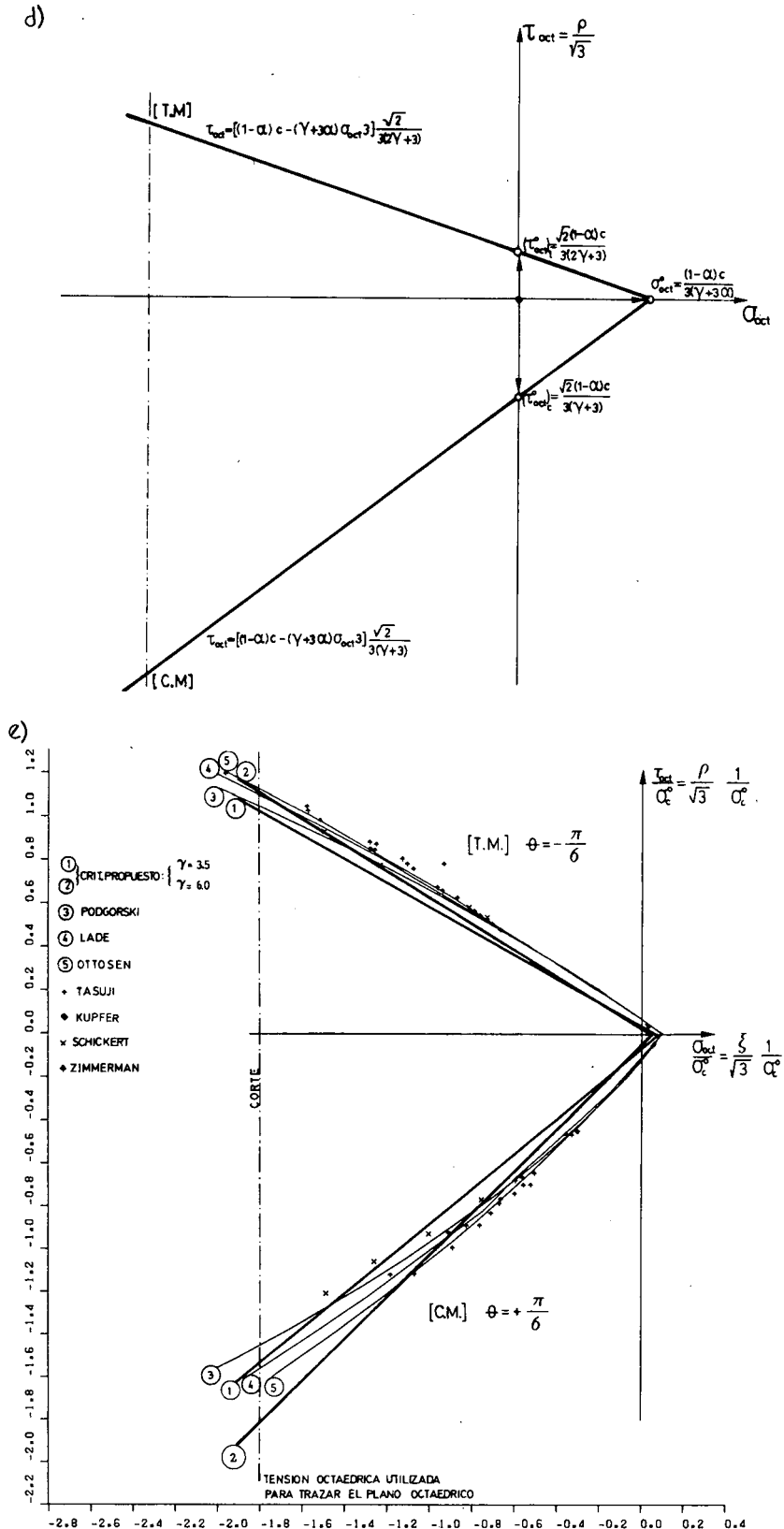


Figura 9. Criterio de fluencia propuesto: d) Según los meridianos de tracción y compresión máxima. e) Comparación, en los planos meridianos, con los criterios de fluencia plástica de: Podgorski⁵², Lade⁵⁶, Ottosen⁵⁰; y con los ensayos de: Tasuji⁶², Kupfer⁵⁶, Schickert³⁰, Zimmerman⁵².

A continuación, se hace una breve presentación de los parámetros de ajuste de este criterio.

Parámetro α : Este parámetro, es el encargado de ajustar la función de discontinuidad inicial en la zona de compresión, con el fin de obtener la relación deseada entre la resistencia a compresión uniaxial σ_C y la resistencia equibiaxial σ_{Cb} Figura 9b. Debido a que la ecuación (34) describe la función de fluencia en el plano $\sigma_2 - \sigma_3$, es posible deducir de ella la magnitud de α . Para ello, sustituyendo un estado de compresión plano y simétrico $\sigma_{cb} = \sigma_3 = \sigma_2 \leq \sigma_1 = 0$ en la ecuación (34), y operando algebraicamente, se tiene:

$$\frac{\sigma_{cb}}{\sigma_C} = \frac{1 - \alpha}{1 - 2\alpha} \tag{35}$$

resultando de aquí la expresión del parámetro α :

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma_{cb}}{\sigma_C} - 1}{2\frac{\sigma_{cb}}{\sigma_C} - 1} \tag{36}$$

donde σ_C y σ_{cb} representan la resistencias de compresión uniaxial y equibiaxial para el *límite de discontinuidad inicial* $\kappa^p = 0$, respectivamente. Según estudios experimentales sobre el comportamiento de hormigones^{35,50,62}, la relación $\frac{\sigma_{cb}}{\sigma_C}$ oscila entre 1.10 y 1.16, de donde se obtienen valores de α comprendidos entre 0.08 y 0.1212...

Parámetro β : Conocido α , y sustituyendo para un estado de tracción simple $0 = \sigma_3 = \sigma_2 \leq \sigma_1 = \sigma_T$ en la ecuación (33), se tiene:

$$\frac{1}{(1 - \alpha)} [\sigma_T + \alpha \sigma_T + \beta \sigma_T] = c_T \tag{37}$$

y debido a que en este criterio de fluencia, la relación entre la función de cohesión a tracción simple y la respectiva tensión uniaxial viene dada por:

$$c_T(\kappa^p) = \frac{1}{N} [R^0 \sigma_T(\kappa^p)] = R^0 \sigma_T(\kappa^p) \tag{38}$$

tal que sustituido en la ecuación (37), resulta:

$$\beta = (1 - \alpha)R^0 - (1 + \alpha) \tag{39}$$

donde R^0 representa la relación que hay entre la resistencia uniaxial de compresión y tracción cuando se alcanza el *primer límite de discontinuidad*, para $\kappa^p = 0$. Según estudios experimentales sobre el comportamiento de hormigones^{35,62}, la relación R^0 es del orden de 10.0, que junto a un $\alpha = 0.1212$, da valores de β del orden de 7.66.

Parámetro γ : De acuerdo con la ecuación (33), este parámetro función de la relación de radios octaédricos máximos a tracción y compresión r_{oct}^{max} , aparece

f) PLANO OCTAEDRICO para: $\sigma_{oct} = -1.8$

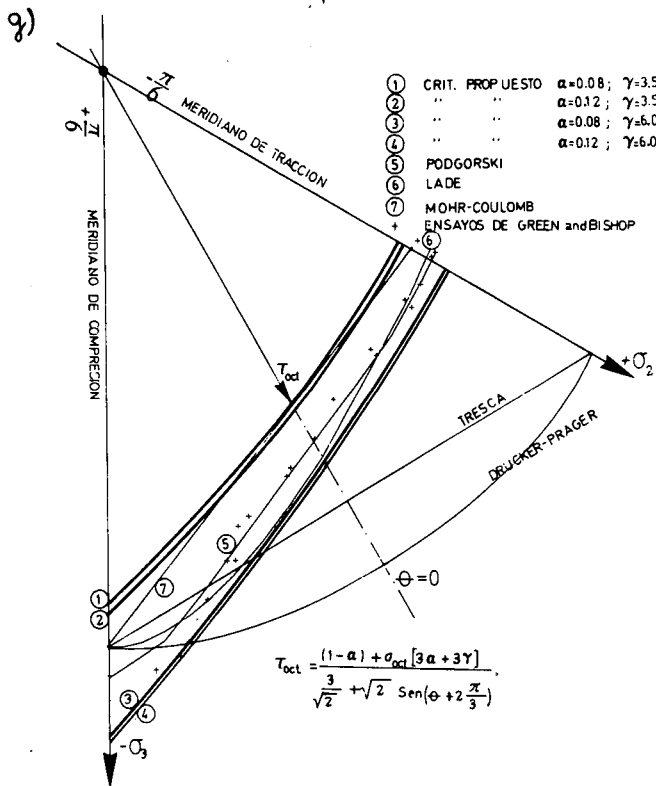
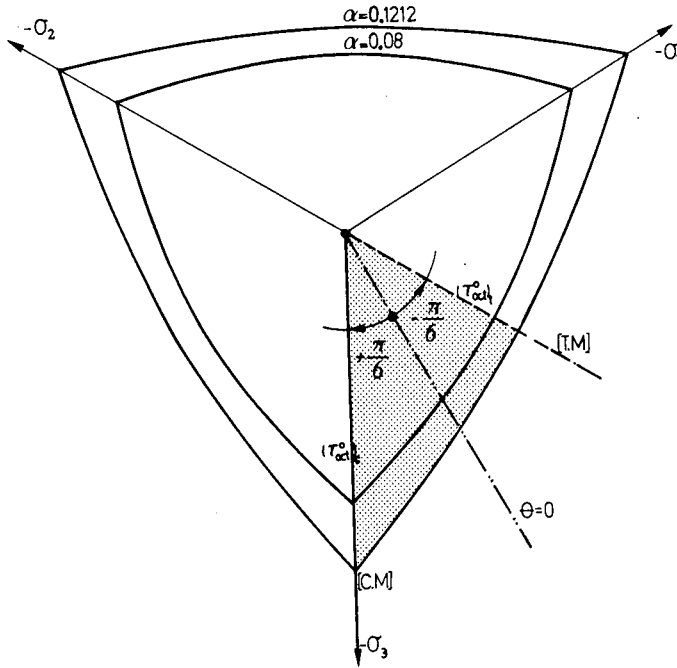


Figura 9. Criterio de fluencia propuesto: f) Según el plano octaédrico $\sigma_{oct} = -1.8$. g) Comparación, en el plano octaédrico: $\sigma_{oct} = -1.8$, con los criterios de fluencia plástica de: Podgorski⁵², Lade⁵⁶, Mohr-Coulomb y Green-Bishop⁶⁵.

solamente para estados de compresión triaxial, o sea cuando $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 = \sigma^{\max} \leq 0$. Designando con [M.T.] y [M.C.] los meridianos a tracción ($\sigma_3 = \sigma_1 < \sigma_2$; o bien $\theta = -\frac{\pi}{6}$) y compresión ($\sigma_3 < \sigma_2 = \sigma_1$; o bien $\theta = \frac{\pi}{6}$), de la superficie de fluencia plástica, respectivamente, y expresando las tensión máxima, como:

$$\text{para [M.T.]: } \theta = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sigma^{\max} = \frac{1}{3} (I_1 + 2\sqrt{3}J_2) \quad (40)$$

$$\text{para [M.C.]: } \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sigma^{\max} = \frac{1}{3} (I_1 + \sqrt{3}J_2) \quad (41)$$

tal que, sustituyendo éstas en la ecuación (33) con $\sigma^{\max} < 0$, resultan las siguientes ecuaciones que describen meridianos rectos de tracción y compresión:

$$\text{para [M.T.]: } (2\gamma + 3)\sqrt{3J_2} + (\gamma + 3\alpha)I_1 = 3(1 - \alpha)c \quad (42)$$

$$\text{para [M.C.]: } (\gamma + 3)\sqrt{3J_2} + (\gamma + 3\alpha)I_1 = 3(1 - \alpha)c \quad (43)$$

donde c es el valor actual de la cohesión. Considerando la relación de radios octaédricos máximos a tracción y compresión r_{oct}^{\max} , en un plano octaédrico cualquiera $I_1 = cte.$, se tiene de las ecuaciones (42) y (43):

$$r_{\text{oct}}^{\max} = \frac{\rho_T}{\rho_C} = \frac{(\sqrt{2J_2})_T}{(\sqrt{2J_2})_C} = \frac{(\sqrt{J_2})_T}{(\sqrt{J_2})_C} = \frac{3(1 - \alpha)c - (\gamma + 3\alpha)}{(2\gamma + 3)\sqrt{3}} = \frac{\gamma + 3}{3(1 - \alpha)c - (\gamma + 3\alpha)} = \frac{\gamma + 3}{(\gamma + 3)\sqrt{3}} = cte. \quad (44)$$

resultando de aquí la expresión del parámetro γ , que es constante debido a que los meridianos son rectos. De las ecuaciones (42) y (43):

$$\gamma = \frac{3(1 - r_{\text{oct}}^{\max})}{2r_{\text{oct}}^{\max} - 1} \quad (45)$$

Según Ottosen^{15,50,51}, la *relación máxima entre radios octaédricos* r_{oct}^{\max} , debe ser una función de la presión hidrostática I_1 , variando desde $r_{\text{oct}}^{\max} = 0.5$ para: $I_1 \rightarrow 0$, hasta $r_{\text{oct}}^{\max} = 1.0$ para: $I_1 \rightarrow \infty$, esto significa que se pasa de una sección octaédrica triangular, a una circular, respectivamente. No obstante esto, los ensayos experimentales no muestran tal incremento⁵², sino que tiende a una constante que oscila alrededor de $r_{\text{oct}}^{\max} \sim 0.65$. De esto último, se obtiene un valor de $\gamma = 3.5$. El criterio de fluencia plástica de Willam-Warnke¹⁵, al igual que el que se propone, mantiene la *relación máxima entre radios octaédricos* constante durante todo el proceso inelástico, y comprendida entre $0.5 \leq r_{\text{oct}}^{\max} \leq 1.0$ según sean las constantes de ajuste que se utilizan.

Los parámetros α , β y γ , también podrían formularse en función del ángulo de rozamiento interno ϕ ($\alpha = f_{\alpha}(\phi)$, $\beta = f_{\beta}(\phi)$, y $\gamma = f_{\gamma}(\phi)$).

Forma de la función de fluencia

La función de fluencia, describe en el *espacio de tensiones principales*, o espacio de Westergard, una pirámide como la que muestra la Figura 9a. Los *meridianos de tracción máxima y compresión máxima* Figura 9d, debido a que dependen forma lineal de ρ y de ξ , son dos rectas con una relación de radios octaédricos como la expresada en la ecuación (44). En el *plano octaédrico* Figura 9f describe una curva con tres vértices, por donde pasan los tres meridianos de compresión máxima y donde presenta uno de los tipos de singularidad que produce una definición múltiple del vector normal a la superficie de fluencia f . Por último, en el *plano principal* Figura 9b [$\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$], en la zona de compresión total, presenta una función similar a la de Drucker-Prager ecuación (34), y en la intersección con el octante de compresión total, presenta el otro tipo de singularidad que también produce definición múltiple del vector normal a la superficie⁴⁶.

Del análisis de las Figuras 9 se puede deducir que, tanto en el *plano octaédrico* como en los *planos meridianos* y en el *plano principal* [$\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$] el criterio propuesto aproxima bien los resultados experimentales^{1,35,52,61}. Además, se puede observar que para los valores de tensión octaédrica comprendidos entre:

$\sim -2.0 \leq \frac{\sigma_{\text{oct}}}{|\sigma_C(\kappa^P = 0)|} \leq \frac{\sigma_{\text{oct}}^0}{|\sigma_C(\kappa^P = 0)|}$, (dominio donde se encuentran una gran cantidad de ensayos experimentales para los hormigones), las funciones meridianas rectas aproximan bastante bien el comportamiento real de este material.

CRITERIO DE POTENCIAL PLASTICO

De la regla de flujo expresada mediante la ecuación (3), resulta obvio que el incremento de deformación plástica $\dot{\epsilon}^P$ queda definido a partir del criterio de potencial plástico \mathcal{G} , quedando así establecida la cuota de dilatación admitida en el *material ideal propuesto*, durante el desarrollo de un proceso de carga elasto-plástico⁴⁶. En otras palabras, la definición de la función de potencial plástico establece indirectamente la magnitud del efecto de la dilatación que se producirá en el sólido ideal que se modeliza. La variación de este ángulo de dilatación, a lo largo del proceso de carga inelástico, ha sido presentada con anterioridad, y mediante esta función se puede dar movilidad al criterio de potencial plástico con el fin de lograr una mejor simulación del fenómeno de dilatación.

Existe una gran cantidad de funciones de potencial plástico \mathcal{G} , definidas con el fin de lograr la dilatación deseada para cada material friccional ideal^{26,36}. En este modelo constitutivo se ha utilizado la *idea* propuesta por Radenkovic^{8,53}, consistente en adoptar como criterio de potencial plástico el criterio de fluencia de Mohr-Coulomb con un ángulo igual al de dilatación. De esta forma, se ha utilizado la *superficie de fluencia de Mohr-Coulomb modificado*^{48,49} ecuación (32), con un ángulo de fricción interna igual al de dilatación $\phi = \psi$. Esto es:

$$G(I_1, J_2, \theta, \psi, \alpha_R) = \frac{I_1}{3} K_3 + \sqrt{J_2} \left(K_1 \cos \theta - K_2 \frac{\text{sen} \theta \text{sen} \psi}{\sqrt{3}} \right) - \text{cte.} = 0 \quad (46)$$

donde K_i son constantes que dependen de la relación entre resistencias uniaxiales a compresión y tracción (32). La ecuación (46) provee un vector de flujo plástico que se acerca a los resultados experimentales obtenidos, sobre morteros de cemento y hormigones, por Andenaes y otros¹ Figura (10). En esta misma Figura se puede observar el error cometido en considerar un flujo asociado a la función de fluencia propuesta en el apartado anterior, y la ventaja que proporciona el uso de la propuesta de Radenkovic aplicada a la función de Mohr-Coulomb modificada. Esta última, puede presentar una discrepancia con los resultados experimentales obtenidos por Andenaes¹ para la relación de tensión $\sigma_3/\sigma_1 = 0/3$ (punto singular), pudiendose solucionar mediante la definición del flujo plástico de Köiter^{32,46}.

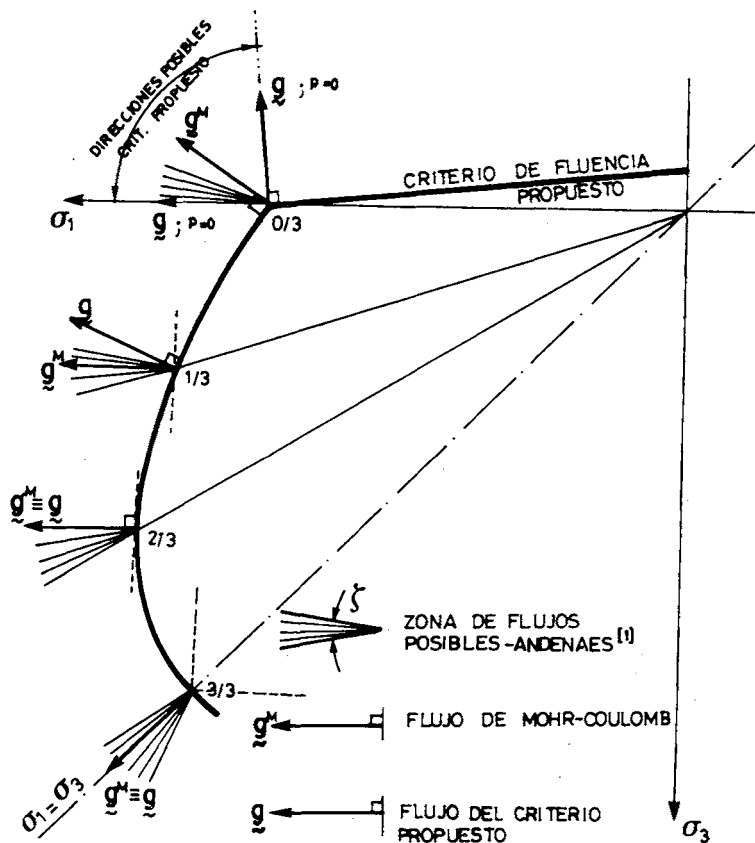


Figura 10. Flujo plástico producido por el criterio de fluencia propuesto en este trabajo; flujo plástico obtenido por E. Andenaes y otros¹, y flujo según la propuesta de D. Radenkovic^{8,53}.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un *modelo constitutivo de daño plástico* que permite simular, dentro de un rango de aplicación muy amplio, el comportamiento de los materiales cohesivos friccionales, con especial orientación hacia el hormigón. El modelo surge de una generalización de los conceptos clásicos de la teoría de la plasticidad, permitiendo tratar el comportamiento del hormigón bajo complejos estados tensionales que resultan de procesos de carga cuasi-estáticos radiales y no-radiales, pudiendo también controlar el fenómeno de la dilatancia.

Se presenta una nueva función de fluencia plástica que aproxima bastante bien los resultados experimentales, se considera también una modificación de la función de fluencia de Mohr-Coulomb que permite obtener una adecuada relación inicial entre resistencias uniaxiales a compresión y tracción, se presentan las variables fundamentales del modelo, y una hipótesis que permite objetivizar su respuesta.

En la *parte -II* de este artículo, se presentará una generalización del modelo que posibilita tratar procesos inelásticos con degradación de la rigidez elástica y plástica.

REFERENCIAS

1. E. Andenaes, K. Grestle y H. Ko, "Response of mortar and concrete to biaxial compression", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. **103**, no. EM4, pp. 515-526, (1977).
2. Z. Bažant, "Fracture in concrete and reinforced concrete", *Mechanics of Geomaterials*, Editado por Z. Bažant, pp. 259-303, (1985).
3. Z. Bažant, "Mechanics of distributed cracking", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. **39**, no. 5, pp. 675-705, (1986).
4. Z. Bažant y S. Kim, "Plastic fracturing theory for concrete", *Jour. Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. **105**, no. EM3, pp. 407-428, (1979).
5. Z. Bažant y B. Oh, "Crack band theory for fracture of concrete", *Mat. Construct.*, Vol. **16** (93), pp. 155-177, (1983).
6. R. De Borst, "Non linear analysis of frictional materials", *Ph. D. Thesis*, Delft, The Netherlands, (1986).
7. R. De Borst y P. Nauta, "Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model", *International Report inst. TNO for building material and building structures*, Delft, Netherlands, (1984).
8. R. De Borst y P. Vermeer, "Non associated plasticity for soils, concrete, and rock", *Heron*, Vol. **29**, Delft, Netherlands, (1984).
9. R. De Borst y P. Vermeer, "Possibilities and limitations of finite elements for limit analysis", *Geotechnique*, Vol. **34**, no. 2, pp. 199-210, (1984).
10. C.A. Brebbia y J.J. Connor, *Método de los elementos finitos en ingeniería civil*, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, (1975).
11. O. Buyukozturk y S. Shareef, "Constitutive modeling of concrete in finite element analysis", *Computers and Structures*, Vol. **21**, no. 3, pp. 581-610, (1985).
12. E. Cedolin, R. Crutzen y S. Dei Poli, "Triaxial stress-strain relationship for concrete", *Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. **103**, no. EM3, pp. 423-439, (1977).
13. M. Cervera y E. Hinton, "Nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells using a

- three dimensional model", *Internal Report*, Department of Civil Engineering, Univ. College of Swansea, U.K., (1985).
14. M. Cervera, E. Hinton y O. Hassan, "Non linear analysis of reinforced plate and shell structures using 20-nodes isoparametric brick elements", *Computer and Structures*, Vol. 25, no. 6, pp. 845-870, (1987).
 15. W.F. Chen, *Plasticity in reinforced Concrete*, Mc Graw Hill, (1982).
 16. A. Chen y W.F. Chen, "Constitutive Relations for Concrete", *Journal of The Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 101, no. EM4, pp. 465-481, ASCE, (1975).
 17. W.F. Chen y E. Ting, "Constitutive models for concrete structures", *Journal of The Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 106, no. EM1, pp. 1-18, (1980).
 18. A. Delibes, "Microfisuración del hormigón por compresión, ¿Estamos del lado de la seguridad?", *Informes de la Construcción*, Vol. 37, no. 379, pp. 43-47, (1986).
 19. C. Desai y H. Siriwardane, *Constitutive laws for engineering materials, with emphasis on geologic materials*, Prentice Hall, (1984).
 20. A. Ditommaso, "Evaluation of concrete fracture - *Fracture Mechanics of Concrete: Material characterization and testing*", Ed. por A. Carpinteri y A. Ingraffea, pp. 31-65, Martinus Nijhoff Publishers, (1984).
 21. J.W. Dougill, "Constitutive Relations for concrete and Rock: Applications and extensions of elasticity and plasticity Theory", *Mechanics of Geomaterials*, Editado por Z. Bažant, pp.21-46, (1985).
 22. E. Dvorkin E., R. Torrent y A. Alvaredo, "A constitutive relation for concrete", *Proceedings of the International Conference of Computational Plasticity*, Editado por D.R.J. Owen, E. Hinton y E. Oñate, Part 2, pp. 1415-1430, Pineridge Press, (1987).
 23. M.N. Fardis y E.S. Chen, "A cyclic multiaxial model for concrete", *Computational Mechanics*, Vol. 1, pp. 301-305, (1986).
 24. G. Frantziskonis y G.S. Desai, "Constitutive model with strain softening", *Int. Jour. Solids structures*, Vol. 23, no. 6, pp. 733-750, (1987).
 25. G. Frantziskonis y G.S. Desai, "Analysis of strain softening constitutive model", *Int. Jour. Solids structures*, Vol. 23, no. 6, pp. 751-767, (1987).
 26. G. Frantziskonis, G. S. Desai y S. Somasundaram, "Constitutive Model for non-associative behaviour", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 112, no. 9, (1986).
 27. R. Glemberg, "Dynamic analysis of concrete structures", *Ph. D. Thesis*, Department of structural mechanics, chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, (1984).
 28. D.J. Han y W.F. Chen, "Strain space plasticity formulation for hardening-softening material with elastoplastic coupling", *Int. Jour. Solids structures*, Vol. 22, no. 8, pp. 935-950, (1986).
 29. M. Kleiber, "Influence of nucleation and growth of void limit load capacity of a thick cylinder", *Arch. Mech.*, Vol. 35, no. 2, pp. 307-312, Warszawa, Poland, (1983).
 30. M. Kleiber, "On plastic localization and failure in plane strain and round void containing tensile bars", *Int. Jour. of Plasticity*, Vol. 2, pp. 205-221, (1986).
 31. M. Klisinski y Z. Mroz, "Description of inelastic deformation and degradation of concrete", *Internal report*, Institute of fundamental technological research, Warszawa, Poland, (1987).
 32. W.T. Koiter, "General theorems for elastic-plastic solids", *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 1, pp. 165-221, North Holland Publishing Co. Amsterdam, (1960).
 33. M.D. Kotsovos y J.B. Newman, "Generalized stress-strain relations for concrete", *Jour. of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 104, no. EM4, pp. 845-856, (1978).
 34. H.B. Kupfer y K.H. Gerstle, "Behaviour of concrete under biaxial stress", *Jour.*

- Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 99, pp. 852-866, (1973).
35. H.B. Kupfer, H. Hilsdorf y H. Rusch, "Behaviour of concrete under biaxial stresses", *Journal ACI*, Vol. 66, no. 8, (1969).
 36. P.V. Lade y J.M. Duncan, "Elasto plastic stress-strain theory for cohesionless soil", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 101, no. GT10 - pp. 1037, 1053 - 1975.
 37. J. Lubliner, S. Oller, J. Oliver y E. Oñate, "A plastic damage model for non linear analysis of concrete", *Internal report, Paper submitted to: "Solids and structures"*, (1988).
 38. J. Lubliner, *Thermomechanics of deformable bodies*, Editado por Department of Civil Engineering University of California, Berkeley, U.S.A., (1985).
 39. S. Mindess, *Fracture toughness testing of cement and concrete. Fracture mechanics of concrete: Material characterization and testing*, Ed. por A. Carpinteri and A. Ingrassia - pp. 67-110, Martinus Nijhoff Publishers, (1984).
 40. D.W. Murray, L. Chitnuyanondh, Y. Khazal y Chung Wong, "Concrete Plasticity theory of biaxial stress analysis", *Jour. Eng. Mechanics Division*, ASCE, Vol. 105, no. EM6, pp. 989-1106, (1979).
 41. J. Oliver y J.R. Fernandez Roure, "Análisis no lineal de estructuras bidimensionales de hormigón por el método de los elementos finitos", *II Simposium de Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería*, Eds. E. Oñate, B. Suarez, J. Miquel Canet, Vol. 1, pp. 447-463, Barcelona, (1986).
 42. J. Oliver y J.R. Fernandez Roure, "Consideraciones sobre los modelos numéricos de distribución para el análisis de la fisuración de hormigón", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 3, no. 4, pp. 343-368, (1987).
 43. J. Oliver, S. Oller y E. Oñate, "Modelos elasto-plásticos para simulación numérica de procesos de fractura", *Métodos Numéricos Aplicados a la Mecánica de Fractura*, Editores J. Oliver, M. Elices, E. Oñate y M. Astiz, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, pp. 27-60, Barcelona, (1988).
 44. S. Oller, J. Oliver y E. Oñate, "Simulación numérica de procesos no lineales de fractura y aplastamiento en hormigón, mediante un modelo plástico", *I Jornadas Ibéricas de fractura*, Ed. L. Farias, pp. 223.1-223.12, Braga, Portugal, (1987).
 45. S. Oller, E. Oñate y J. Oliver, "Un modelo de fisuración del hormigón basado en la teoría incremental de la plasticidad", *II Simposium de Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería*, Eds. E. Oñate, B. Suarez, J. Miquel Canet, Vol. 1, pp. 393-416, Barcelona, (1986).
 46. S. Oller, "Un modelo de "daño continuo" para materiales friccionales", *Tesis Doctoral*, Departamento de Estructuras, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España, (1988).
 47. E. Oñate, S. Oller, J. Oliver y J. Lubliner, "A constitutive model for cracking of concrete based on de incremental theory of plasticity", *Proceedings of the International Conference of Computational Plasticity*, Editado por D.R.J. Owen, E. Hinton, E. Oñate, Parte 2, pp. 1311-1327, Pineridge press, Barcelona, (1987).
 48. E. Oñate, S. Oller, J. Oliver y J. Lubliner, "A fully elastoplastic constitutive model for non linear analysis of concrete", *Proceedings of the Second International Conference on Advances in Numerical Methods in Engineering, Theory and Applications*, NUMETA, Eds. G. Pande y J. Middleton, Martinus Nijhoff Publishers, Swansea, U.K., (1987).
 49. E. Oñate, S. Oller, J. Oliver y J. Lubliner, "A constitutive model of concrete based on the incremental theory of plasticity", *Engineering Computations*, Vol. 5, no. 2, (1988).
 50. N.S. Ottosen, "A failure criterion for concrete", *Journal of Engineering Mechanics*

- Division*, ASCE, Vol. 103, no. EM4, pp. 527-535, (1977).
51. N.S. Ottosen, "Theoretical framework for modelling the behaviour of frictional material", *Int. J. Solis Structures*, Vol. 22, no. 11, pp. 1325-1342, (1986).
 52. J.Podgorski, "General failure criterion for isotropic media", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 111, no. 2, (1985).
 53. D. Radenkovic, "Theoremes limites pour un materau de Coulomb a dilatation non standardisee", *C.R.Ac.Sc.*, Vol. 252, Paris, (1961).
 54. Y.R. Rashid, "Analysis of prestressed concrete pressure vessels", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 7, no. 4, (1968).
 55. J.G. Rots, P. Nauta, G. Kusters y J. Blaauwendraad, "Smearred crack approach and fracture localization in concrete", *Heron*, Vol. 30, Delft, Netherlands, (1985).
 56. J.G. Rots, "Strain softening analysis of concrete fracture specimens", *Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete*, pp. 133, Ed. por F.H. Wittman, Amsterdam, (1986).
 57. P.W. Rowe, "Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil", *Proc. Rascoe Memorial Symp. on Stress-Strain Behavior of Soils*, Cambridge, (1972).
 58. G. Sacchi Landreani y R. Riccioni, *Computamento delle strutture Murarie*, Clup, Milán, (1982).
 59. J.C. Simó y J.M. Ju, "On continuum damage - elastoplasticity at finite strains: a computational framework", *Paper submitted to: "Computational Mechanics"*, (1987).
 60. J.C. Simó y J.M. Ju, "Strain and stress based continuum damage model - Part I : Formulation", *Solids and Structures*, Vol. 23, no. 7, pp. 281-841, (1987).
 61. *State of the art report on: Finite Element Analysis of Reinforced concrete*, ASCE, (1982).
 62. E. Tasuji, F. Slate y A. Nilson, "Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading", *Journal ACI*, Vol. 75, no. 7, pp. 306-312, (1978).
 63. P.A. Vermeer, "A modified initial strain method for plasticity problems", *third Int. Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, Aachen, pp. 377-387, (1979).
 64. J. Oliver, "A consistent characteristic length for smearred cracking models", *Paper submitted to: "Comunications in Applied Numerical Method"*, (1988).
 65. G.E. Green y A.W Bishop, "A note on the drained strength of sands and generalized strain conditions", *Geotechnique*, Vol. XIX, no. 1, pp. 144-149, (1969).