

APLICACION DE METODOS DE ELEMENTOS FINITOS ADAPTATIVOS A PROBLEMAS DE CONVECCION-DIFUSION EN 2-D

RAFAEL ALEJANDRO MONTENEGRO *
GUSTAVO MONTERO *
GABRIEL WINTER *
y
LUIS FERRAGUT **

* *Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Canarias, E.T.S. de Ingenieros Industriales, 4º Pabellón Seminario Tafira, 35194-Las Palmas, España.*

** *Departamento de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid, E.T.S. de Ingenieros de Minas, c/Ríos Rosas 21, 28003-Madrid, España*

RESUMEN

En este trabajo se presentan formulaciones implícitas y explícitas para la resolución numérica del problema evolutivo de convección-difusión en 2-D, basadas en el método de las características. Se aborda un estudio comparativo sobre el comportamiento numérico de las distintas formulaciones propuestas. Se realizan diferentes aplicaciones numéricas utilizando varios indicadores de error para la resolución del problema mediante el método de elementos finitos adaptativo de refinamiento de mallado. Para la obtención directa de la solución estacionaria se combinan las técnicas adaptativas con el método de la difusión artificial. Este trabajo está basado en el estudio desarrollado en [13].

SUMMARY

In this paper implicit and explicit formulations are developed for numerical solving of the evolutive convection-diffusion problem in 2-D, based on the characteristics method. A comparative study about numerical behavior of these formulations is showed. Numerical applications are solved using several error indicators for adaptive finite element methods of mesh refinement. These techniques and artificial diffusion method are combined to get directly the stationary solution. This work is based on the study developed in [13].

Recibido: Mayo 1989

INTRODUCCION

En los últimos años se ha dedicado un considerable esfuerzo al estudio de la estimación a posteriori del error en los cálculos realizados mediante el método de los elementos finitos; ver por ejemplo *Babuska y otros*^{2,4}, *Zienkiewicz y otros*^{11,12}. Ello abre la posibilidad de modificar (refinar) automáticamente el tipo de aproximación inicialmente adoptada, a fin de mejorar la calidad de la aproximación. Estas técnicas reciben el nombre de adaptativas, y se pueden clasificar en tres tipos, según el método utilizado para conseguir una mejor aproximación que la inicial:

- a) Disminuir el diámetro de los elementos mediante una partición de éstos; técnica de refinamiento de mallado (*h*-convergencia).
- b) Aumentar el grado de los polinomios de aproximación mediante familias jerárquicas; técnica de refinamiento en *p* (*p*-convergencia).
- c) Modificar la posición de los nodos conservando la topología de la malla inicial; técnica de movimiento de nodos.

Las técnicas adaptativas poseen un especial interés en la resolución de problemas en los que no se conoce a priori las zonas del dominio donde la solución puede presentar singularidades. El método adaptativo de refinamiento de mallado es el utilizado en este trabajo, aplicándolo a la resolución numérica del problema evolutivo de convección-difusión en 2-D.

Uno de los puntos fundamentales en un método adaptativo es la estimación del error global y también el disponer de indicadores de error que nos señale, mediante una determinada estrategia, donde refinar la malla.

En cuanto a la resolución del sistema de ecuaciones asociado al método de elementos finitos adaptativo se utilizan métodos iterativos implementados elemento a elemento que permiten aprovechar la solución obtenida con un mallado, como aproximación de partida para las ecuaciones correspondientes al mallado refinado. Por otra parte, los métodos elemento a elemento evitan el ensamblaje de la matriz global, reduciendo considerablemente la memoria necesaria y siendo su eficacia independiente de la numeración de los nodos; ver referencia [14].

En cuanto a la implementación computacional de los métodos adaptativos, hay que resaltar la necesidad de gestionar dinámicamente la memoria, ya que los vectores generados a lo largo del proceso (tablas de coordenadas, de conexiones nodales, etc.) van aumentando de dimensión.

FORMULACIONES IMPLICITAS Y EXPLICITAS DEL PROBLEMA

Consideremos el siguiente problema de convección-difusión definido en un dominio Ω bidimensional, de frontera Γ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - \nabla \cdot (K \nabla u) = f \quad (1)$$

siendo $u = u(\mathbf{x}, t)$ la solución del problema, que puede ser por ejemplo, la temperatura

o concentración de un elemento de fluido en movimiento; ésta depende de su vector de posición, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$, y del tiempo, t . El fluido que transporta la magnitud, u , posee un campo de velocidades en régimen estacionario, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$. Consideraremos el estudio del modelo lineal, donde la difusión de la magnitud, u , viene determinada por $K = K(\mathbf{x})$; $f = f(\mathbf{x}, t)$ son las fuentes externas. Suponemos además conocido el valor inicial,

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \quad (2)$$

y unas condiciones de contorno en la frontera Γ de Ω , ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, tal que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$), de tipo Dirichlet en Γ_1 y de tipo mixta en Γ_2 , de forma que el problema tenga solución única;

$$u|_{\Gamma_1} = \bar{u}(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$-K(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial n} = h(\mathbf{x})u - G(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Gamma_2 \quad (4)$$

Desarrollaremos esta formulación clásica utilizando el método de las características, para posteriormente mediante la técnica de los elementos finitos obtener la solución numérica del problema evolutivo.

Si consideramos que los elementos de fluido se mueven a lo largo de las líneas de corriente con una velocidad \mathbf{v} , según la trayectoria $\mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{i} + x_2(t)\mathbf{j}$, en dichos elementos de fluido tenemos que:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u$$

y la ecuación (1) puede escribirse:

$$\frac{du}{dt} - \nabla \cdot (K\nabla u) = f \quad \text{en } \Omega \quad (5)$$

Un elemento de fluido que se encuentra en un instante t_n en un punto \hat{P} , de posición definida por $\hat{\mathbf{x}}$, al trasladarse con una velocidad \mathbf{v} , después de un tiempo Δt pasará a la posición P , definida por \mathbf{x} , en el instante t_{n+1} , tal que $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ y $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$.

Aproximando la derivada total de la magnitud u respecto del tiempo mediante la expresión:

$$\frac{du}{dt} \simeq \frac{u(\mathbf{x}, t_{n+1}) - u(\hat{\mathbf{x}}, t_n)}{\Delta t} = \frac{u^{n+1}(\mathbf{x}) - u^n(\hat{\mathbf{x}})}{\Delta t}$$

y sustituyendo ésta en la ecuación (5), según una aproximación de *Euler* implícita, se obtiene:

$$u^{n+1}(\mathbf{x}) - \Delta t \nabla \cdot [K(\mathbf{x})\nabla u^{n+1}(\mathbf{x})] = \Delta t f^{n+1}(\mathbf{x}) + u^n(\hat{\mathbf{x}}) \quad (6)$$

La ecuación anterior podría ser tratada mediante la técnica de los elementos finitos, pero se nos plantearía un problema en cada paso de tiempo en la evaluación de $u^n(\hat{\mathbf{x}})$, ya que tendríamos que buscar en qué elemento del dominio Ω discretizado se encontraba el elemento de fluido en un instante anterior. Este proceso llevaría una fuerte carga de tiempo de CPU, que se intenta evitar con el desarrollo que a continuación se expone. Pretendemos poner toda la ecuación (6) dependiente sólo de lo que ocurre en el punto P en todo instante. Para ello, comenzamos evaluando $\hat{\mathbf{x}}$ supuesto conocido \mathbf{x} . La aproximación escogida se obtiene por medio de un desarrollo de Taylor en torno al instante t_{n+1} de la posición en que se encuentra el elemento de fluido, incluyendo los términos de segundo orden. Para todo $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i &= x_i(t_n) = x_i(t_{n+1} - \Delta t) = \\ &= x_i(t_{n+1}) - \Delta t \frac{dx_i(t_{n+1})}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 x_i(t_{n+1})}{dt^2} + O(\Delta t^3)\end{aligned}$$

donde, al considerar un campo de velocidades estacionario,

$$\begin{aligned}\frac{dx_i(t_{n+1})}{dt} &= v_i(\mathbf{x}) \\ \frac{d^2 x_i(t_{n+1})}{dt^2} &= \frac{dv_i(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_i(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Con lo que nos queda determinado de forma aproximada \hat{x}_i , en función de lo que sucede en el punto P , mediante la expresión:

$$\hat{x}_i = x_i - v_i(\mathbf{x})\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_i(\mathbf{x}) + O(\Delta t^3) \quad (7)$$

de donde podemos obtener la expresión de $\Delta x_i = x_i - \hat{x}_i$, que utilizaremos para aproximar $u^n(\hat{\mathbf{x}})$ mediante otro desarrollo,

$$\begin{aligned}u^n(\hat{\mathbf{x}}) &= u^n(\mathbf{x} - \Delta \mathbf{x}) = u^n(x_1 - \Delta x_1, x_2 - \Delta x_2) = \\ &= u^n(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^2 \Delta x_i \frac{\partial u^n(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left[2\Delta x_1 \Delta x_2 \frac{\partial^2 u^n(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} + \sum_{i=1}^2 \Delta x_i^2 \frac{\partial^2 u^n(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} \right] + \\ &\quad + O(\|\Delta \mathbf{x}\|^3)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior las expresiones de Δx_i obtenidas a partir de (7), y despreciando a partir de los términos de tercer orden, resulta la expresión buscada para aproximar $u^n(\hat{\mathbf{x}})$, en función de lo que sucede en el punto \mathbf{x} en el instante anterior t_n :

$$u^n(\hat{\mathbf{x}}) = u^n(\mathbf{x}) - \Delta t \sum_{i=1}^2 v_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u^n(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i=1}^2 [\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_i(\mathbf{x})] \frac{\partial u^n(\mathbf{x})}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 v_i(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u^n(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + O(\Delta t^3) \quad (8)$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en la ecuación (6), obtenemos la formulación que nos aproxima implícitamente el régimen transitorio del proceso de convección-difusión; de forma simplificada tenemos,

$$\begin{aligned} u^{n+1} - \Delta t \nabla \cdot [K \nabla u^{n+1}] &= \Delta t f^{n+1} + u^n - \Delta t \mathbf{v} \cdot \nabla u^n + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \sum_i (\mathbf{v} \cdot \nabla v_i) \frac{\partial u^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i,j} v_i v_j \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned} \quad (9)$$

donde todos los términos están evaluados en un mismo punto P , definido por \mathbf{x} . El último término aportado en el segundo miembro equivale a una difusión artificial, y el penúltimo aparece debido a que hemos realizado una aproximación de segundo orden de la característica dada por la ecuación (7).

A partir de la ecuación (9), podemos obtener la siguiente expresión para evaluar el régimen estacionario, haciendo que $u^{n+1} - u^n \rightarrow 0$, y por lo tanto $u^n \rightarrow u$, siendo u la solución estacionaria del problema:

$$- \nabla \cdot [K \nabla u] + \mathbf{v} \cdot \nabla u - \frac{\Delta t}{2} \sum_i (\mathbf{v} \cdot \nabla v_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\Delta t}{2} \sum_{i,j} v_i v_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f \quad (10)$$

esta ecuación es una aproximación de primer orden, $O(\Delta t)$, de la expresión (1) en régimen estacionario ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$).

Considerando funciones test, $w = w(x_1, x_2)$, dentro del espacio de funciones admisibles tales que se anulan en Γ_1 , y teniendo en cuenta la condición de contorno en Γ_2 , dada por la ecuación (4), se obtiene la siguiente formulación variacional asociada a la expresión (9):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{n+1} w d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} K \nabla u^{n+1} \cdot \nabla w d\Omega + \Delta t \int_{\Gamma_2} h u^{n+1} w d\Gamma &= \\ = \Delta t \int_{\Omega} f^{n+1} w d\Omega + \int_{\Omega} u^n w d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u^n) w d\Omega + \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_i \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla v_i) \frac{\partial u^n}{\partial x_i} w d\Omega - \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \frac{\partial u^n}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j w) d\Omega + \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i,j} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u^n}{\partial x_i} (v_i v_j w) n_j d\Gamma + \Delta t \int_{\Gamma_2} G w d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

Haciendo la restricción local a un elemento Ω_e de frontera Γ^e , según el método de los elementos finitos, los términos a_{ik}^e de la matriz elemental simétrica son:

$$a_{ik}^e = \int_{\Omega_e} \psi_k \psi_l d\Omega + \Delta t \int_{\Omega_e} K \nabla \psi_k \cdot \nabla \psi_l d\Omega + \Delta t \int_{\Gamma_2^e} h \psi_k \psi_l d\Gamma \quad (12)$$

siendo $\psi_i = \psi_i(x_1, x_2)$ la función de forma asociada al nodo i de Ω_e ; y $\Gamma_2^e = \Gamma^e \cap \Gamma_2$.

Si en lugar de haber realizado una aproximación de *Euler* implícita en la discretización temporal de la ecuación (5), realizamos una aproximación de *Euler* explícita, la formulación evolutiva (9) se transforma en:

$$u^{n+1} = \Delta t \nabla \cdot [K \nabla u^n] + \Delta t f^n + u^n - \Delta t \mathbf{v} \cdot \nabla u^n + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_i (\mathbf{v} \cdot \nabla v_i) \frac{\partial u^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i,j} v_i v_j \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i \partial x_j} \quad (13)$$

que da lugar a la siguiente formulación variacional:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{n+1} w d\Omega = & -\Delta t \int_{\Omega} K \nabla u^n \cdot \nabla w d\Omega - \Delta t \int_{\Gamma_2} h u^n w d\Gamma + \Delta t \int_{\Gamma_2} G w d\Gamma + \\ & + \Delta t \int_{\Omega} f^n w d\Omega + \int_{\Omega} u^n w d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u^n) w d\Omega + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_i \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla v_i) \frac{\partial u^n}{\partial x_i} w d\Omega - \\ & - \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \frac{\partial u^n}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j w) d\Omega + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i,j} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u^n}{\partial x_i} (v_i v_j w) n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

siendo el correspondiente sistema elemental simétrico al igual que con la formulación evolutiva implícita. Además, si realizamos integración reducida en el cálculo de los términos de las matrices elementales de la formulación explícita, obtenemos un sistema de ecuaciones diagonal; si en cambio, efectuamos integración consistente, podemos emplear un método iterativo, del tipo Jacobi, que utiliza la matriz diagonal obtenida con integración reducida, ver por ejemplo [16].

ESTUDIO NUMERICO DEL PROBLEMA EVOLUTIVO EN 1-D

Trabajamos con las formulaciones (9) y (13) como esquemas implícito y explícito, respectivamente. Dichas formulaciones particularizadas en 1-D, para coeficientes constantes y sin fuentes externas, serán el objeto de nuestro estudio, correspondientes a la formulación clásica:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (15)$$

* *Formulación explícita:*

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t K \frac{d^2 u^n}{dx^2} + \frac{\Delta t^2}{2} v^2 \frac{d^2 u^n}{dx^2} - \Delta t v \frac{du^n}{dx} \quad (16)$$

* *Formulación implícita:*

$$u^{n+1} - \Delta t K \frac{d^2 u^{n+1}}{dx^2} = u^n + \frac{\Delta t^2}{2} v^2 \frac{d^2 u^n}{dx^2} - \Delta t v \frac{du^n}{dx} \quad (17)$$

En cada una de estas formulaciones estudiamos diversas posibilidades según el tipo de integración (reducida o consistente) que se realice sobre los términos u^{n+1} y u^n . Exponemos a continuación los principales resultados obtenidos sobre estabilidad y consistencia, trabajando con una malla regular de elementos lineales de diámetro, h , con dos nodos.

ESTABILIDAD

Realizamos dicho estudio en el sentido de *Von Neuman*, obteniendo las siguientes cotas del número de *Courant*, C , en función del número de *Peclet*, P_e ,

$$\begin{cases} C = \frac{v \Delta t}{h} \\ P_e = \frac{v h}{K} \end{cases} \quad (18)$$

$$C \leq \left(\frac{1}{P_e^2} + \rho \right)^{\frac{1}{2}} + (-1)^m \frac{1}{P_e} \quad (19)$$

según la formulación e integración que realicemos resulta:

A) FORMULACION EXPLICITA: $m = 1$

- A.1) Integración reducida en u^{n+1} y u^n : $\rho = 1$
- A.2) Integración reducida en u^{n+1} y consistente en u^n : $\rho = \frac{2}{3}$
- A.3) Integración consistente en todos los términos: $\rho = \frac{1}{3}$

B) FORMULACION IMPLICITA: $m = 2$

- B.1) Integración reducida en u^{n+1} y u^n : $\rho = 1$
- B.2) Integración reducida en u^{n+1} y consistente en u^n : $\rho = \frac{2}{3}$
- B.3) Integración consistente en todos los términos: $\rho = \frac{1}{3}$

Se puede observar que fijado un determinado valor de la velocidad, v , y la difusión, K , al ir disminuyendo el diámetro de los elementos, h , en los procesos adaptativos de refinamiento de mallado, decrece el valor del número de *Peclet* local de los elementos refinados; lo cual hace que en los esquemas explícitos sean necesarios números de *Courant* máximos muy bajos. En cambio, en los esquemas implícitos este efecto sucede al contrario. Por esta razón desde el punto de vista de la estabilidad serán mejores los métodos implícitos que los explícitos, para ser combinados con técnicas adaptativas. También se puede ver que los esquemas (A.1) y (B.1) para números de *Peclet* altos tienden a tomar una cota máxima en el número de *Courant* igual a la unidad; los correspondientes al (A.2) y (B.2) tienden a $(2/3)^{1/2}$; y los estudiados en (A.3) y (B.3)

tienden a $(1/3)^{1/2}$. De todo lo anterior podemos deducir que el método que posee un mejor comportamiento, en cuanto a estabilidad, es el (B.1).

CONSISTENCIA

Este análisis lo realizamos comparando el orden de aproximación de los desarrollos de factores de amortiguamiento numéricos, $G(\xi_m)$, de las formulaciones estudiadas con el factor de amortiguamiento analítico, $G_e(\xi_m)$, asociados a un modo de *Fourier* de ambas soluciones, de número de onda ξ_m . Este planteamiento para estudiar la consistencia de un esquema numérico es empleado por *Peraire, Zienkiewicz y Morgan*¹⁶. Tal que,

$$G_e(\xi_m) = G_e(\eta) = e^{-\left(\frac{C}{P_e}\eta^2 + iC\eta\right)}$$

donde,

$$\eta = \xi_m h = 2\Pi \left(\frac{h}{\lambda_m} \right) = \frac{2\Pi}{g}$$

siendo λ_m la longitud de onda del modo de Fourier, y $g = \lambda_m/h$ el número de elementos del mallado que contiene la longitud de onda asociada al modo. Este valor aumenta a medida que se realizan las etapas de refinamiento. Según esto, tenemos:

$$G_e(\eta) = 1 - iC\eta - \left(\frac{C}{P_e} + \frac{C^2}{2} \right) \eta^2 + i \left(\frac{C^2}{P_e} + \frac{C^3}{6} \right) \eta^3 + O(\eta^4)$$

Comparando el desarrollo anterior del factor de amortiguamiento analítico, con los numéricos obtenidos en el estudio de estabilidad de las formulaciones, resulta que:

- Para los esquemas (A.1), (A.3), (B.1) y (B.3):

$$G(\eta) = G_e(\eta) + O(\eta^3)$$

diremos, por lo tanto, que estos esquemas son globalmente exactos de segundo orden.

- Para los esquemas (A.2) y (B.2):

$$G(\eta) = G_e(\eta) + O(\eta^2)$$

con lo que son globalmente exactos de primer orden.

ESTABILIDAD DEL PROBLEMA EVOLUTIVO EN 2-D

Al igual que en el estudio realizado en 1-D trabajamos con las formulaciones (9) y (13) como esquemas implícito y explícito, respectivamente, para coeficientes constantes y sin fuentes externas, correspondientes a la formulación clásica:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - K \Delta u = 0 \quad (20)$$

*Formulación explícita:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t K \Delta u^n - \Delta t \mathbf{v} \cdot \nabla u^n + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i,j} v_i v_j \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i \partial x_j} \quad (21)$$

*Formulación implícita:

$$u^{n+1} - \Delta t K \Delta u^{n+1} = u^n - \Delta t \mathbf{v} \cdot \nabla u^n + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i,j} v_i v_j \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i \partial x_j} \quad (22)$$

Se comprueba que un modo de Fourier de la solución analítica de la ecuación (20) es de la forma:

$$U_m = F_m e^{i(\boldsymbol{\xi}_m \cdot \mathbf{x} - \Omega_m t)} e^{-\delta_m t} \quad (23)$$

donde:

$$\begin{cases} \Omega_m = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\xi}_m \\ \delta_m = K |\boldsymbol{\xi}_m|^2 \end{cases} \quad (24)$$

y $\boldsymbol{\xi}_m = \xi_{1m} \mathbf{i} + \xi_{2m} \mathbf{j}$ es el vector de onda, cuya dirección define la de propagación del modo.

Pretendemos realizar un estudio de estabilidad numérica para los esquemas a que dan lugar las formulaciones explícita e implícita en 2-D, en los casos que se realice integración reducida o consistente en los términos u^{n+1} y u^n , correspondientes a los apartados (A.1), (A.3), (B.1) y (B.3) del estudio realizado en 1-D. Excluimos por tanto los esquemas surgidos de una integración mixta en estos términos, correspondientes a (A.2) y (B.2), que poseen un peor comportamiento en cuanto a consistencia, según el estudio en 1-D.

Un estudio general de estabilidad en 2-D sería muy complejo, dadas las múltiples combinaciones de elementos que se nos pueden presentar en un proceso adaptativo. Por ello, consideramos un caso particular; trabajamos sobre la malla regular de triángulos rectángulos que se representa en la Figura 1; se indica la numeración de los nodos y las dimensiones de los elementos. Comenzaremos exponiendo el estudio de la formulación implícita con integración consistente en todos los términos, para posteriormente indicar, de forma más resumida, los resultados principales obtenidos para el resto de las formulaciones propuestas:

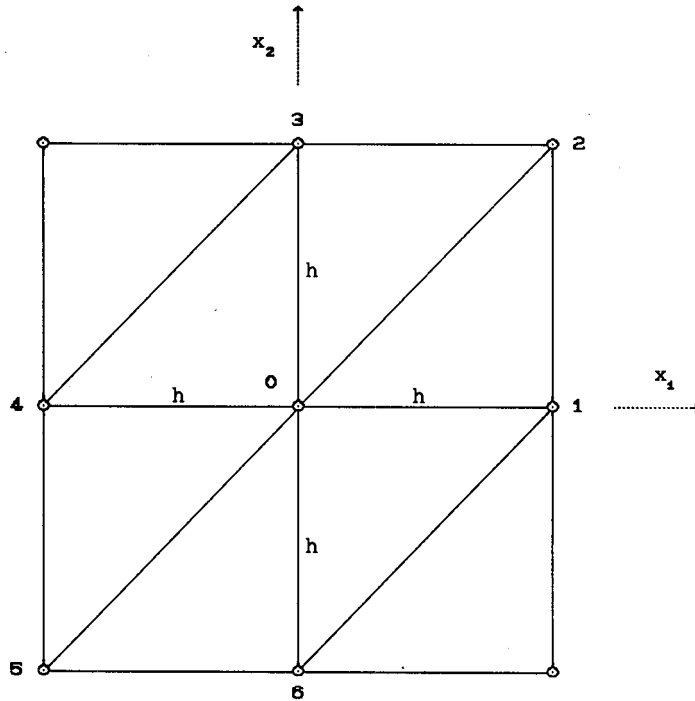


Figura 1. Modelo de malla para el estudio de estabilidad.

I) *Formulación implícita con integración consistente en todos los términos:*

Multiplicando toda la ecuación (22) por la función base asociada al nodo 0, ϕ_0 , e integrando en el dominio Ω en la forma indicada, obtenemos el esquema en diferencias a que da lugar el método de los elementos finitos:

$$\begin{aligned} & \frac{h^2}{12}(6u_0^{n+1} + u_1^{n+1} + u_2^{n+1} + u_3^{n+1} + u_4^{n+1} + u_5^{n+1} + u_6^{n+1}) + \\ & + \Delta t K(4u_0^{n+1} - u_1^{n+1} - u_3^{n+1} - u_4^{n+1} - u_6^{n+1}) = \\ & = \frac{h^2}{12}(6u_0^n + u_1^n + u_2^n + u_3^n + u_4^n + u_5^n + u_6^n) - \\ & - \Delta t \frac{h}{6} [v_1(2(u_1^n - u_4^n) + u_2^n - u_3^n + u_6^n - u_5^n) + v_2(2(u_3^n - u_6^n) + u_2^n - u_1^n + u_4^n - u_5^n)] - \\ & - \frac{\Delta t^2}{2} [v_1^2(2u_0^n - u_1^n - u_4^n) + v_1 v_2(u_1^n - u_2^n + u_3^n + u_4^n - u_5^n + u_6^n - 2u_0^n) + \\ & + v_2^2(2u_0^n - u_3^n - u_6^n)] \end{aligned}$$

siendo u_j ($j = 0, 1, 2, \dots, 6$) la solución numérica en los nodos, y h el parámetro de la discretización. Sea ν es el ángulo formado por la velocidad \mathbf{v} constante con el eje x_1 . Considerando $v = |\mathbf{v}|$, definiremos los números de Courant y Peclet mediante (18). Para realizar el análisis de estabilidad introducimos un modo de Fourier genérico de la

solución numérica de la forma análoga a (23), considerando valores numéricos de los parámetros. Si designamos,

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \cos \nu = \frac{v_1}{v} \\ \theta_2 &= \operatorname{sen} \nu = \frac{v_2}{v} \\ \chi_k &= \operatorname{sen} \xi_{km} h \\ \zeta_k &= \cos \xi_{km} h \\ \chi_{12} &= \operatorname{sen} (\xi_{1m} + \xi_{2m}) h \\ \zeta_{12} &= \cos (\xi_{1m} + \xi_{2m}) h\end{aligned}\quad (k = 1, 2)$$

podemos obtener el factor de amortiguamiento numérico para el nodo 0, $G(\xi_m)$, como el cociente entre el modo de la solución numérica en el instante t_{n+1} y t_n :

$$\begin{aligned}G(\xi_m) &= \frac{\frac{1}{6}(3 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_{12}) - C^2 [1 - \theta_1^2 \zeta_1 - \theta_2^2 \zeta_2 + \theta_1 \theta_2 (\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_{12} - 1)]}{\frac{1}{6}(3 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_{12}) + \frac{2C}{P_e}(2 - \zeta_1 - \zeta_2)} - \\ &- i \frac{C}{3} \frac{\theta_1(2\chi_1 + \chi_{12} - \chi_2) + \theta_2(2\chi_2 + \chi_{12} - \chi_1)}{\frac{1}{6}(3 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_{12}) + \frac{2C}{P_e}(2 - \zeta_1 - \zeta_2)}\end{aligned}\quad (25)$$

Puesto que el estudio general de estabilidad para unas direcciones cualesquiera de propagación de la onda y de la velocidad es muy complejo, estudiaremos las condiciones de estabilidad en dos casos que nos conducirán a unos resultados de estabilidad bastante interesantes comparándolos con los obtenidos en el estudio en 1-D. En ambos casos consideraremos que la velocidad, v , posee una dirección cualquiera como hemos definido inicialmente. Y en cuanto a la dirección de propagación de la onda definida por el vector de onda, ξ_m , se tratará en un primer apartado cuando el ángulo formado por ξ_m y el eje x_1 sea nulo, y posteriormente el caso que este ángulo sea $3\pi/4$.

I.1) Caso que $\xi_{1m} = \xi$ y $\xi_{2m} = 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^+$:

Particularizando (25), podemos expresar el factor de amortiguamiento como:

$$G(\xi_m) = G(\xi, 0) = \frac{1 - q \operatorname{sen}^2 \frac{\xi h}{2} - i s \operatorname{sen} \xi h}{1 - \rho \operatorname{sen}^2 \frac{\xi h}{2}}\quad (26)$$

$$\text{siendo: } \begin{cases} q = \frac{2}{3} + 2C^2 \cos^2 \nu \\ s = C \cos \nu \\ \rho = \frac{2}{3} - \frac{4C}{P_e} \end{cases}\quad (27)$$

Imponiendo la condición de estabilidad, $|G(\xi_m)|^2 \leq 1$, obtenemos que es necesario:

$$C \leq \frac{1}{\cos^2 \nu} \left[\left(\frac{1}{P_e^2} + \frac{\cos^2 \nu}{3} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{P_e} \right] \quad (28)$$

Se comprueba fácilmente que esta cota sobre el número de *Courant* es más favorable que la obtenida en 1-D; salvo cuando $\nu = 0$ ó $\nu = \pi$ (iguales direcciones de la velocidad y propagación), en cuyo caso coinciden las cotas en 1-D y 2-D.

I.2) Caso que $\xi_{1m} = \xi$ y $\xi_{2m} = -\xi$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^-$:

Particularizando (25), podemos expresar el factor de amortiguamiento de la misma forma que (26), sólo que ahora tenemos:

$$\begin{cases} q = \frac{2}{3} + 2C^2(1 - \operatorname{sen} 2\nu) \\ s = C(\cos \nu - \operatorname{sen} \nu) \\ \rho = \frac{2}{3} - \frac{8C}{P_e} \end{cases} \quad (29)$$

de donde obtenemos como condición de estabilidad:

$$C \leq \frac{1}{1 - \operatorname{sen} 2\nu} \left[\left(\frac{4}{P_e^2} + \frac{1 - \operatorname{sen} 2\nu}{3} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{P_e} \right] \quad (30)$$

La cota más desfavorable en este caso se obtiene cuando $\operatorname{sen} 2\nu = -1$, es decir, $\nu = 3\pi/4$ ó $\nu = -\pi/4$, (igualdad en direcciones de la velocidad, \mathbf{v} , y de la propagación del modo, definida por ξ_m), dicha cota es:

$$C \leq \left(\frac{1}{P_e^2} + \frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{P_e} \quad (31)$$

Si comparamos la cota anterior con la obtenida en el estudio realizado en 1-D, resulta ser más desfavorable en cuanto a la obtención del paso de tiempo, Δt , el resultado obtenido en 2-D, interpretando el parámetro de la discretización, h , como se ha definido en ambos casos para las expresiones de C y P_e . Pero podemos comprobar fácilmente que si en la cota obtenida en 1-D considero como el parámetro de la discretización la longitud de los catetos dividida por $\sqrt{2}$ (distancia máxima entre dos puntos del elemento en la dirección de la velocidad y de propagación), obtendría la cota dada por (31). Esto mismo ocurría en el caso anterior en que la distancia máxima entre dos puntos de un elemento en la dirección de la velocidad y de propagación (caso más desfavorable cuando coinciden) era precisamente la longitud de los catetos, y por ello llegábamos a la misma cota que en 1-D. De todo esto podemos intuir que, para el modelo de malla representado en la Figura 1, el caso más desfavorable será cuando las direcciones de la velocidad y propagación coincidan con la de la bisectriz del

segundo y cuarto cuadrante. Según esto, indicamos como cota más desfavorable para la formulación (I) la dada por (31).

II) *Formulación implícita con integración reducida en los términos u^{n+1} y u^n :*

En este caso sólo vamos a exponer directamente los resultados principales obtenidos para las direcciones de propagación consideradas. Los cálculos, que omitiremos, se efectúan siguiendo los pasos indicados en el apartado (I).

II.1) *Caso que $\xi_{1m} = \xi$ y $\xi_{2m} = 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^+$:*

$$C \leq \frac{1}{\cos^2 \nu} \left[\left(\frac{1}{P_e^2} + \cos^2 \nu \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{P_e} \right] \quad (32)$$

II.2) *Caso que $\xi_{1m} = \xi$ y $\xi_{2m} = -\xi$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^-$:*

$$C \leq \frac{1}{1 - \sin 2\nu} \left[\left(\frac{4}{P_e^2} + 1 - \sin 2\nu \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{P_e} \right] \quad (33)$$

La cota más desfavorable en este caso se obtiene también cuando coinciden las direcciones de la velocidad y de propagación:

$$C \leq \left(\frac{1}{P_e^2} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{P_e} \quad (34)$$

III) *Formulación explícita con integración consistente en todos los términos:*

III.1) *Caso que $\xi_{1m} = \xi$ y $\xi_{2m} = 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^+$:*

$$C \leq \frac{1}{\cos^2 \nu} \left[\left(\frac{1}{P_e^2} + \frac{\cos^2 \nu}{3} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{P_e} \right] \quad (35)$$

III.2) *Caso que $\xi_{1m} = \xi$ y $\xi_{2m} = -\xi$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^-$:*

$$C \leq \frac{1}{1 - \sin 2\nu} \left[\left(\frac{4}{P_e^2} + \frac{1 - \sin 2\nu}{3} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{P_e} \right] \quad (36)$$

Análogamente se obtiene la cota más desfavorable:

$$C \leq \left(\frac{1}{P_e^2} + \frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{P_e} \quad (37)$$

IV) *Formulación explícita con integración reducida en los términos u^{n+1} y u^n :*

IV.1) *Caso que $\xi_{1m} = \xi$ y $\xi_{2m} = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^+$:*

$$C \leq \frac{1}{\cos^2 \nu} \left[\left(\frac{1}{P_e^2} + \cos^2 \nu \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{P_e} \right] \quad (38)$$

IV.2) *Caso que $\xi_{1m} = \xi$ y $\xi_{2m} = -\xi, \forall \xi \in \mathbb{R}^-$:*

$$C \leq \frac{1}{1 - \sin 2\nu} \left[\left(\frac{4}{P_e^2} + 1 - \sin 2\nu \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{P_e} \right] \quad (39)$$

La cota más desfavorable es:

$$C \leq \left(\frac{1}{P_e^2} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{P_e} \quad (40)$$

Se puede comprobar que con las tres formulaciones anteriores se presentan análogas propiedades que en la (I).

INDICADORES DE ERROR

El estudio de la estimación del error dependerá en general del tipo de problema a resolver, y es un tema abierto en la actualidad. Autores tales como *Babuska* y *Rheinboldt*^{2,3,4}, o *Zienkiewicz, Kelly* y *Gago*^{11,12} han realizado un considerable esfuerzo en este estudio, proponiendo estimadores de error para problemas en 1-D, y problemas elípticos de segundo orden en general.

Nuestro problema de convección-difusión evolutivo que puede tener carácter hiperbólico o parabólico según que predomine más o menos el término de convección frente al de difusión, no está claramente resuelto en cuanto a la estimación del error; salvo en el caso unidimensional, *Szymczak* y *Babuska*²⁰. Por ello, nuestro trabajo va a ser enfocado en el análisis de posibles indicadores de error ε_i que nos muestren de forma efectiva los elementos que deben ser refinados en cada etapa del proceso adaptativo. Fundamentalmente, consideramos cuatro indicadores:

• *Indicador 1:*

$$\varepsilon_i = \left[\frac{h_i^2}{24 K_{\min}} \int_{\Omega_i} r^2 d\Omega + \frac{h_i}{24 K_{\min}} \int_{\Gamma_i} \left[\left[K \frac{\partial u_h}{\partial n} \right]^2 d\Gamma \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde h_i es el diámetro del elemento Ω_i de frontera Γ_i ; K_{\min} es el valor mínimo de la difusión $K = K(x)$ en Ω_i ; $\left[\left[K \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right]$ representa el salto de flujo de la solución numérica $u_h = u_h(x)$, obtenida en la malla a refinar, en la frontera Γ_i de Ω_i ; $r = r(x)$ es el residuo

de la ecuación. Este indicador de error fue introducido para problemas elípticos; ver referencias [11] y [12]. Nosotros tomaremos:

$$r(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot (K \nabla u_h) + \mathbf{v} \cdot \nabla u_h - f$$

con lo que los indicadores de error en cada elemento serán calculados en función del error cometido en $u_h(\mathbf{x})$ con respecto a la solución estacionaria del problema planteado.

- *Indicador 2:*

$$\varepsilon_i = \left[\frac{h_i^2}{24 K_{\min}} \int_{\Omega_i} r^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}$$

Se considera este indicador para ver su comportamiento al tener en cuenta exclusivamente la aportación del residuo de la ecuación.

- *Indicador 3:*

$$\varepsilon_i = h_i |\mathbf{v} \cdot \nabla u_h|$$

Su valor es proporcional al residuo de la ecuación en problemas estacionarios de convección pura (o con fuerte convección con respecto a la difusión) sin fuentes externas.

- *Indicador 4:*

$$\varepsilon_i = h_i |\nabla u_h|$$

Nos mide la máxima variación experimentada por la solución numérica en el elemento Ω_i , ya que $|\nabla u_h|$ es constante en todo Ω_i al trabajar con elementos triangulares de tres nodos, e interpolación lineal.

En las aplicaciones numéricas realizadas se compara el comportamiento de estos indicadores; se puede adelantar que el Indicador 4 es el más selectivo en cuanto a la localización de las capas límites provocando mayores refinamientos en torno a éstas.

ESTRATEGIAS DE REFINAMIENTO

Una vez conocida la distribución de los indicadores de error ε_i ($i = 1, 2, \dots, N$), siendo N el número de elementos de la malla M_n , estamos en disposición de determinar los elementos que deben ser refinados, utilizando criterios estadísticos de dicha distribución, o mediante la utilización de un parámetro $\gamma \in [0, 1]$, propuesto por diferentes autores, véase por ejemplo *Zienkiewicz y Craig*¹. Este valor se fija normalmente a priori para todas las etapas del proceso de refinamiento, tal que se refinan aquellos elementos cuyo indicador de error ε_i sea superior o igual que γ veces el valor máximo de los indicadores de los elementos de la malla.

Para la resolución del problema trabajamos con elementos triangulares de tres nodos e interpolación lineal. Utilizaremos el algoritmo de refinamiento propuesto por *Rivara*^{18y19}, que divide el triángulo a refinar en cuatro subtriángulos introduciendo tres

nuevos nodos en el punto medio de los lados, y uniendo el nodo situado en el lado mayor con el vértice opuesto y con los otros dos nuevos nodos. Una vez refinados todos los elementos que indique la estrategia, realizamos un refinamiento adicional según la técnica de *Rivara* para asegurar la conformidad del mallado.

APLICACIONES NUMERICAS

Nos planteamos la resolución mediante el método de elementos finitos adaptativo, utilizando las diversas formulaciones, del problema modelo de convección-difusión, definido sobre un dominio Ω bidimensional de forma cuadrada de lado unidad, ver Figura 2, en el que existe un medio en movimiento con un campo de velocidades, \mathbf{v} , representado en la Figura 3, de divergencia nula, cuyas componentes son:

$$\begin{cases} v_1 = \omega x_1(1-x_1)(x_2-0.5) \\ v_2 = \omega x_2(0.5-x_1)(1-x_2) \end{cases}$$

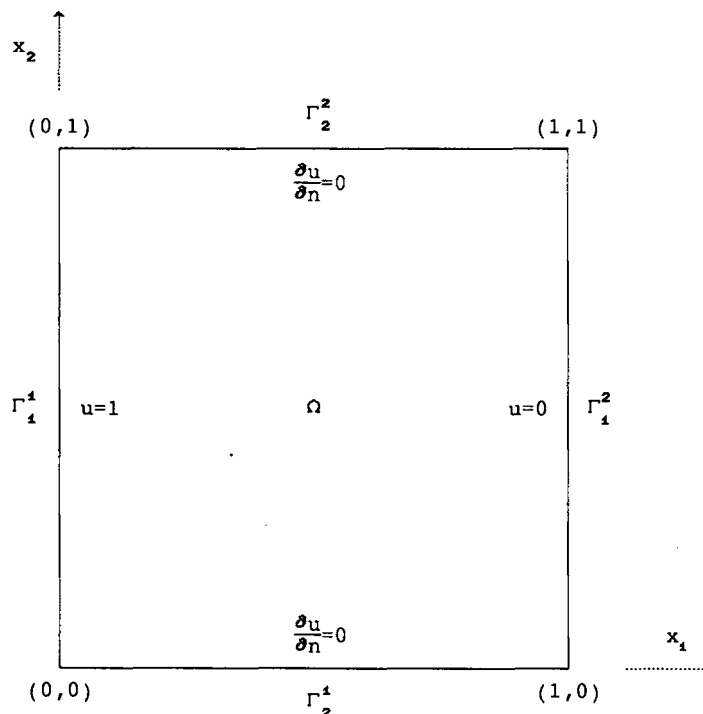


Figura 2. Región de estudio y condiciones de contorno.

donde ω es un parámetro conocido que utilizaremos para tener la posibilidad de resolver problemas con mayor o menor convección frente al término de difusión. Consideramos que dicho medio posee una difusión $K = 1$, y que no está sometido a fuentes externas; $f = 0$. Definimos la frontera, Γ , de Ω como unión de tramos rectos disjuntos, $\Gamma = \Gamma_1^1 \cup \Gamma_1^2 \cup \Gamma_2^1 \cup \Gamma_2^2$, tal que imponemos sobre éstos las condiciones de contorno

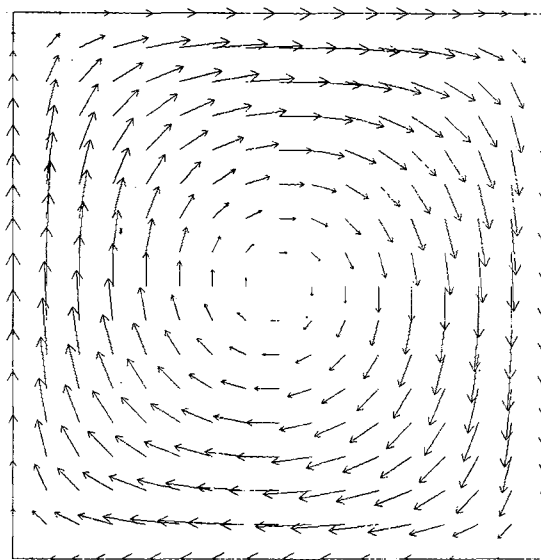


Figura 3. Campo de velocidades ($|\mathbf{v}|_{\max} = \omega/8$).

que se indican en la Figura 2, para todo instante $t \geq 0$. Como condiciones iniciales tomaremos: $u(\mathbf{x}, 0) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$.

Resolveremos este problema para distintos valores de ω , utilizando diferentes estrategias de refinamiento e indicadores de error. Nos planteamos la resolución del problema evolutivo y del estacionario.

Definiremos en todos los casos el mismo mallado regular de "partida", con un total de 9 nodos, 8 elementos y 16 caras. A partir de este mallado se realizarán una serie de refinamientos automáticos de todos los elementos utilizando el algoritmo de *Rivara*. Estos refinamientos se hacen para generar la malla "inicial" (regular) sobre la que comienza la resolución del problema mediante el método de los elementos finitos adaptativo.

Todas las aplicaciones se han realizado con el código *NEPTUNO*, ver [10], en un VAX-11/750.

APLICACIONES AL PROBLEMA EVOLUTIVO

En este apartado se exponen las salidas gráficas obtenidas en la resolución del problema modelo evolutivo, para $\omega = 1000$. Utilizaremos la formulación implícita con integración consistente en todos los términos, teniendo en cuenta los resultados del estudio numérico efectuado.

Se ha resuelto el problema mediante dos estrategias distintas. En ambos casos, sobre el mallado de "partida" definido anteriormente, se efectúan tres refinamientos automáticos, utilizando el algoritmo de *Rivara*, para definir el mallado regular inicial que posee 289 nodos. Llamaremos Malla 1 a este mallado; será sobre la que comienza el proceso de resolución evolutiva realizando el número de pasos de tiempo que determine

la estrategia ensayada. Posteriormente, se realizará un refinamiento de dicha malla, construyendo la Malla 2 sobre la que se vuelve a repetir el proceso, hasta obtener el número de mallas deseado.

El problema fundamental que se plantea es la determinación del paso del tiempo, Δt , para que el proceso sea estable en todas las etapas de refinamiento. Para ello, se trabaja con la cota más desfavorable obtenida en el estudio de estabilidad realizado en 2-D; ver expresión (31), sobre la que puede actuar un coeficiente de seguridad, κ , si se desea

$$C \leq \kappa \left[\frac{1}{6} \right]^{\frac{1}{2}}$$

tal que tomaremos como paso de tiempo para cada malla:

$$\Delta t = \kappa \frac{h_{\min}}{|\mathbf{v}|_{\max}} \left[\frac{1}{6} \right]^{\frac{1}{2}}$$

siendo h_{\min} la longitud mínima de las caras de todos los elementos de la malla, y $|\mathbf{v}|_{\max} = 125$ para esta aplicación ($\omega = 1000$). Ambos valores son obtenidos automáticamente para la determinación de Δt , que puede o no variar en cada etapa de refinamiento en función de la zona donde éste se efectúe, esto dependerá en definitiva de si varía el valor de h_{\min} de una malla a otra. En las aplicaciones numéricas expuestas a continuación se ha tomado $\kappa = 0.9$. De esta forma obtenemos para trabajar sobre la Malla 1, $\Delta t = 0.18371 \cdot 10^{-3}$. Así calculamos rápidamente un valor de Δt que puede ser algo más pequeño que la cota necesaria, pero evitamos realizar un barrido en todos los elementos de la malla para obtener la cota más desfavorable entre las cotas asociadas a cada uno de los elementos, en función de su número de *Peclet* local.

* *PROBLEMA MODELO EVOLUTIVO*, $\omega = 1000$:

a) *Estrategia 1*:

Sobre cada malla realizamos mil pasos de tiempo, trabajando con un total de cuatro mallas; es decir, se efectúan solamente tres refinamientos adaptativos en toda la resolución. Se considera el indicador 1, tomando el valor del parámetro $\gamma = 0.8$ para indicar qué elementos se refinan. En las Figuras 4(a) y (b) se pueden ver las mallas 1 y 4, y las curvas de isovalores de u en el interior del dominio para $u = \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \dots, \frac{5}{6}$ en los tiempos indicados en cada malla. Se puede comprobar que la solución para la Malla 4 (Tiempo = 0.43238) es muy próxima a la estacionaria obtenida mediante el método de la difusión artificial. Podemos indicar que el tiempo de CPU requerido para refinar la Malla 1, determinar el nuevo paso de tiempo y crear los ficheros de resultados es del orden de 0.27% del requerido para la formación del sistema de ecuaciones y su resolución en los mil pasos de tiempo que se efectúan sobre dicha malla. En el resto de las mallas sucede prácticamente lo mismo.

b) *Estrategia 2*:

En este caso, sobre cada malla realizamos solamente trescientos pasos de tiempo,

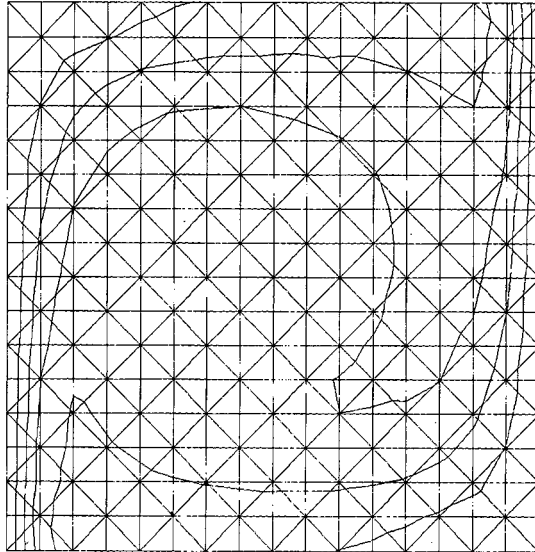


Figura 4(a). Malla 1 (Tiempo = 0.18371).

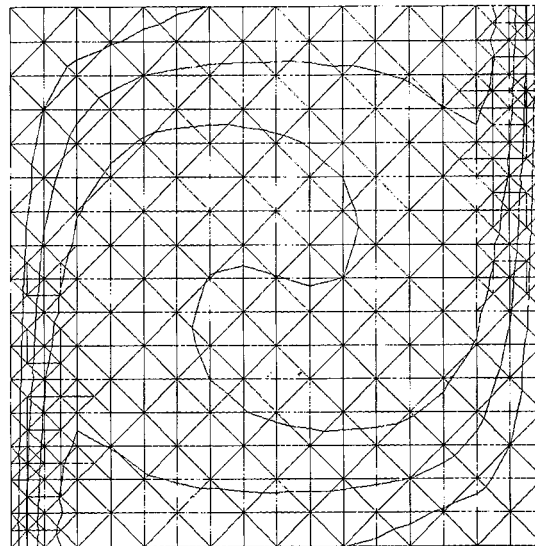


Figura 4(b). Malla 4 (Tiempo = 0.43238).

trabajando con un total de veinte mallas; es decir, se efectúan diecinueve refinamientos adaptativos en toda la resolución del problema. Se utiliza el Indicador 4 y $\gamma = 0.9$. En las Figuras 5(a) y (b) se pueden ver las mallas 2 y 20 y las curvas de isovalores de u al igual que en la aplicación anterior. Se observa que el número de nodos introducidos por esta estrategia es mucho mayor que con la anterior, al ser el Indicador 4 más selectivo

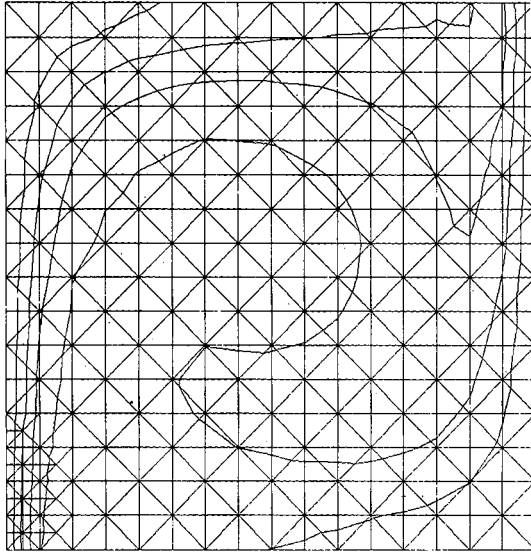


Figura 5(a). Malla 2 (Tiempo = 0.08267).

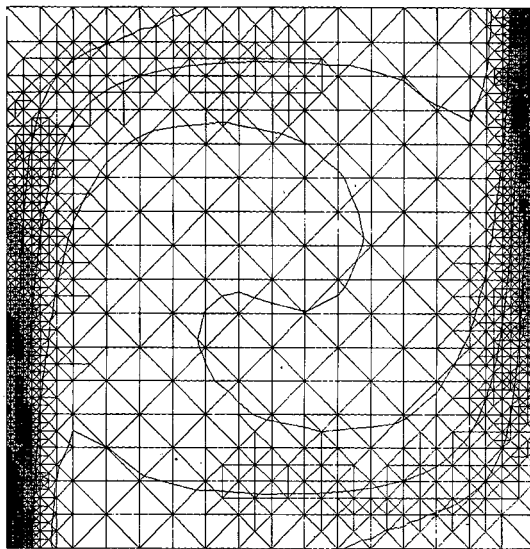


Figura 5(b). Malla 20 (Tiempo = 0.30361).

para localizar las capas límites (zonas de mayor gradiente) y realizar un mayor número de etapas de refinamiento. La solución obtenida en la Malla 20 (Tiempo = 0.30361) es próxima a la estacionaria.

APLICACIONES AL PROBLEMA ESTACIONARIO

En este apartado se exponen las salidas gráficas obtenidas en la resolución del problema modelo, para $\omega = 1000$ y $\omega = 10000$, encontrando directamente su régimen estacionario aplicando el método de la difusión artificial, ver por ejemplo *Conde, Elorza, Ferragut y de Vicente*¹⁵ o *Raviart*¹⁷, combinado con técnicas adaptativas según distintas estrategias e indicadores de error.

* PROBLEMA MODELO ESTACIONARIO, $\omega = 1000$:

En este caso, a partir del mallado de "partida", realizamos tres refinamientos automáticos utilizando el mallado "inicial" (regular). Sobre este mallado se efectúa un total de cuatro etapas de refinamiento, tomando $\gamma = 0.4$, trabajando con los cuatro indicadores propuestos.

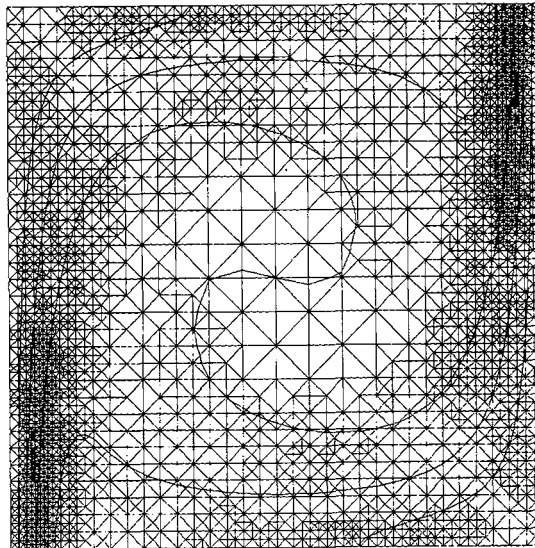


Figura 6(a). Indicador 1, 3022 nodos, 4 refinamientos.

La Figura 6(a) representa el resultado cuando se emplea el Indicador 1, la malla posee un total de 3022 nodos. En la Figura 6(b) tenemos el resultado para el Indicador 2, con 1801 nodos. En la Figura 6(c) para el Indicador 3, con 3521 nodos. En la Figura 6(d) para el Indicador 4, con 8409 incógnitas. Si tomamos como referencia de tiempo total de CPU el resultado obtenido para que con el Indicador 4 se completen las cuatro etapas de refinamiento, la aplicación con el Indicador 1 se realiza en el 16.0%; la del Indicador 2, al 6.4%; y la del Indicador 3, al 25.6%.

En [14] se realiza un estudio detallado de los métodos de resolución de sistemas utilizados para este problema, incluyendo información sobre tiempos de CPU, número de iteraciones y espacio de memoria requerida.

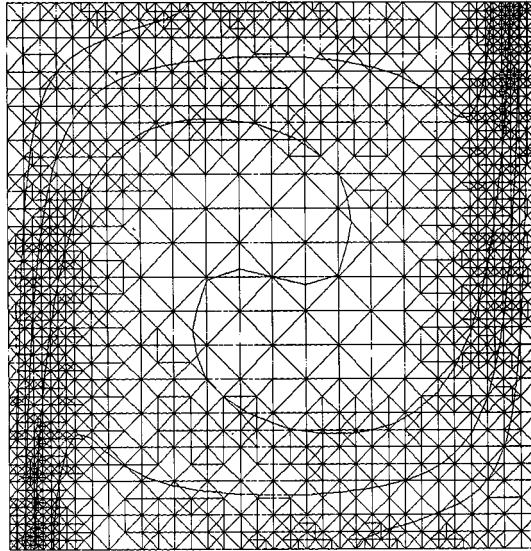


Figura 6(b). Indicador 2, 1801 nodos, 4 refinamientos.

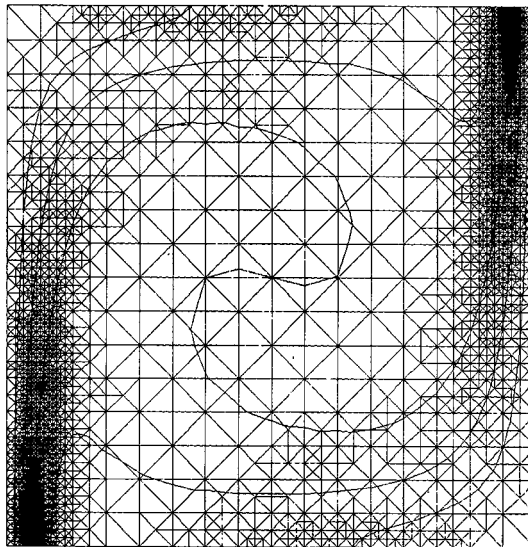


Figura 6(c). Indicador 3, 3521 nodos, 4 refinamientos.

* *PROBLEMA MODELO ESTACIONARIO*, $\omega = 10000$:

Esta aplicación puede considerarse con un fuerte predominio del término de convección sobre el de difusión; $|\mathbf{v}|_{\max} = 1250$. En este caso realizamos el mismo número de refinamiento automáticos que en la aplicación anterior para definir el mallado "inicial" (regular). Sobre este mallado se efectúa un total de cuatro etapas

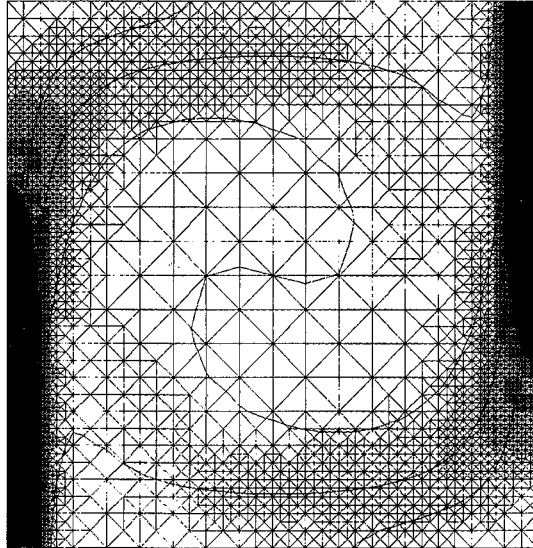


Figura 6(d). Indicador 4, 8409 incog., 4 refinamientos.

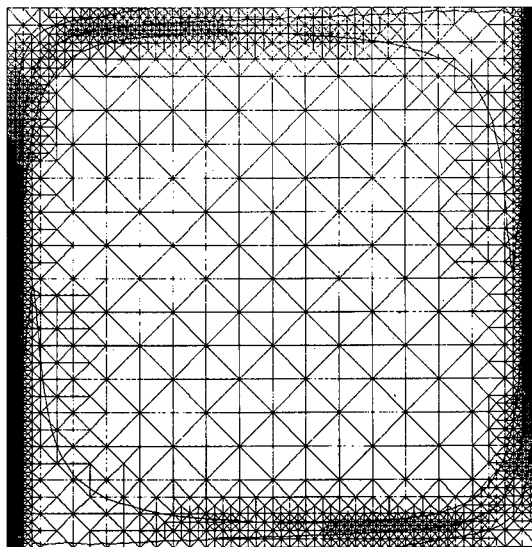


Figura 7. Indicador 4, 4770 nodos, 4 refinamientos.

de refinamiento, tomando $\gamma = 0.3$. En la Figura 7 se muestra el mallado final, con 4770 nodos, cuando utilizamos el Indicador 4; se dibujan las curvas de isovalores para $u = \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{6}{7}$.

CONCLUSIONES

El trabajo realizado pretende demostrar la eficacia de los métodos de elementos finitos adaptativos de refinamiento de mallado en la resolución de problemas de convección-difusión, aportando las siguientes conclusiones principalmente, en base a las experiencias propias:

- 1) El Indicador 4, que nos mide la máxima variación experimentada por la solución en el elemento, es el más sencillo de evaluar, y el más selectivo de todos los estudiados en cuanto a la localización de las capas límites, provocando mayores refinamientos en torno a éstas.
- 2) En base al estudio de estabilidad realizado se puede concluir que, fijado un determinado valor de la velocidad y de la difusión, al ir disminuyendo el diámetro de los elementos en un proceso adaptativo de refinamiento de mallado, decrece el número de *Pecllet* local de éstos; lo cual hace que en los esquemas explícitos estudiados sean necesarios números de *Courant* máximos muy bajos. En cambio, en los esquemas implícitos este efecto sucede al contrario. Por esta razón, desde el punto de vista de estabilidad, serán mejores las formulaciones implícitas que las explícitas, para ser combinadas con técnicas adaptativas.
- 3) Las cotas de estabilidad más desfavorables obtenidas en el estudio realizado en 2-D se producen cuando la dirección de la velocidad del fluido y de la propagación de onda coinciden. Además resulta que estas cotas se pueden evaluar a partir de las correspondientes en 1-D, si en lugar de considerar en éstas últimas el diámetro de los elementos, tomamos la máxima distancia entre dos puntos del elemento en la dirección de la velocidad y de propagación. De todo esto podemos intuir que la cota más desfavorable se obtendrá en función del valor mínimo de las máximas distancias entre dos puntos de un elemento sobre cualquier dirección.
- 4) Los esquemas implícitos y explícitos obtenidos en 1-D a partir de integración mixta en los términos u^{n+1} y u^n son globalmente exactos de primer orden. En cambio, el resto de los esquemas estudiados son globalmente exactos de segundo orden.
- 5) Será de interés elaborar un algoritmo de desrefinamiento, con vista a ser aplicado principalmente en problemas evolutivos, evitando de esta forma el disminuir excesivamente el paso de tiempo a medida que se refina, por cuestiones de estabilidad, y el conservar nodos no necesarios en otro instante. Se piensa en dos posibilidades basadas en crear una malla más "grosera" que nos aproxime la solución en el instante anterior con una cierta aproximación impuesta a priori, con el fin de tomarla como malla de partida para el cálculo de la solución en el instante siguiente. Una de ellas intenta eliminar elementos teniendo en cuenta las secuencias de creación de todas las mallas. La otra posibilidad sería partiendo de una malla regular "grosera", utilizar el propio algoritmo de refinamiento teniendo en cuenta la diferencia entre la solución interpolada en dicha malla y la solución numérica obtenida en el instante anterior con una malla "fina".

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean mostrar su agradecimiento a *Santiago de Vicente*, por sus comentarios y buenos consejos a la hora de realizar el estudio numérico de las formulaciones propuestas en este trabajo.

REFERENCIAS

1. I. Babuska, J. Chandra y J.E. Flaherty, "Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations", *SIAM Publications*, Philadelphia, (1983).
2. I. Babuska y W.C. Rheinboldt, "A Posteriori Error Analysis of Finite Element Solutions for One-dimensional Problems", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **18**, pp. 565-589, (1981).
3. I. Babuska y W.C. Rheinboldt, "A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. **12**, pp. 1597-1615, (1978).
4. I. Babuska y W.C. Rheinboldt, "Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **15**, (1978).
5. I. Babuska y W.G. Szymczak, "An Error Analysis for the Finite Element Methods Applied to Convection Diffusion Problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **31**, pp. 19-42, (1982).
6. I. Babuska, O.C. Zienkiewicz, J. Gago y E.R.A. Oliveira, "Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations", Editorial J. Wiley & Sons, Gran Bretaña, (1986).
7. G.F. Carey y J.T. Oden, "Finite Elements. Fluid Mechanics", (VI), Editorial Prentice Hall, Inc. New Jersey, (1986).
8. G.F. Carey y T. Plover, "Variable Upwinding and Adaptive Mesh Refinement in Convection-Diffusion", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. **19**, pp. 341-353, (1983).
9. L. Ferragut, "Una Solución al Problema de la Programación de los Métodos de Elementos Finitos Autoadaptativos", *Anal. Ing. Mec.*, año 5, No. 1, (1987).
10. L. Ferragut, "NEPTUNO, Un Sistema Adaptativo de Elementos Finitos", Dpto. de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos, E.T.S.I. de Minas, Madrid, España, (1987).
11. J. Gago, D.W. Kelly, O.C. Zienkiewicz e I. Babuska, "A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II - Adaptive mesh refinement", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. **19**, pp. 1621-1656, (1983).
12. D.W. Kelly, J. Gago, O.C. Zienkiewicz e I. Babuska, "A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I - Error Analysis", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. **19**, pp. 1593-1619, (1983).
13. R. Montenegro, "Aplicación de Métodos de Elementos Finitos Adaptativos a Problemas de Convección-Difusión", *Tesis Doctoral*, E.T.S.I.I. de la Universidad Politécnica de Canarias, Las Palmas, España, (1989).
14. G. Montero, "Aplicación de Esquemas Elemento a Elemento de Resolución de Sistemas de Ecuaciones Asociados a Métodos de Elementos Finitos Adaptativos", *Tesis Doctoral*, E.T.S.I.I. de la Universidad Politécnica de Canarias, Las Palmas, España, (1989).
15. J. Oliver, M. Casteleiro y E. Oñate, "Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería, Vol. III: Diseño por Ordenador, Técnicas de Cálculo Numérico, Mecánica de Fluidos y Problemas Térmicos", *Universitat Politécnica de Catalunya Edicions*, Barcelona, España, (1986).

16. J. Peraire, O.C. Zienkiewicz y K. Morgan, "Shallow Water Problems: a General Explicit Formulation", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 22, pp. 547-574, (1986).
17. P.A. Raviart, "*Les Méthodes d'Éléments Finis en Mécanique des Fluides*", Editions Eyrolles, Paris, Francia, (1981).
18. M.C. Rivara, "A Grid Generator Based on 4-Triangles Conforming. Mesh-Refinement Algorithms", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, To appear.
19. M.C. Rivara, "Algorithms for Refining Triangular Grids Suitable for Adaptive and Multigrid Techniques", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 20, pp. 745-756, (1984).
20. W.G. Szymczak e I. Babuska, "Adaptivity and Error Estimation for the Finite Element Method Applied to Convection Diffusion Problems", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 21, No. 5, (1984).