

PROBLEMAS ACTUALES Y NUEVAS TENDENCIAS EN MECANICA DE GEOMATERIALES

ZENON MROZ

*Academia de Ciencias
Polonia*

RESUMEN

Este trabajo tiene como propósito realizar una discusión general de algunos de los problemas más importantes que se presentan en el análisis inelástico de geomateriales, tales como rocas, suelos y su interacción con las estructuras. En este trabajo se discutirán algunos aspectos esenciales del sistema de análisis inelástico, indicando los tipos de problemas que se investigan actualmente, o que se resolverán en el futuro.

SUMMARY

The present paper is aimed a general discussion of some major problems encountered in inelastic analysis of geomaterials such as rocks, soils, and their interaction with structures. In this paper, some essential elements of the system of inelastic analysis will be discussed, indicating types of problems actually investigated or to be solved in the future.

INTRODUCCION

Este artículo tiene como propósito realizar una discusión general de algunos de los problemas más importantes que se presentan en el análisis inelástico de geomateriales, tales como rocas, suelos, y su interacción con las estructuras. Como las soluciones elásticas tienen un rango de aplicaciones limitado, debería realizarse un empleo razonable del análisis inelástico. Sin embargo para desarrollar un sistema de este tipo suficientemente simple y confiable, deben resolverse numerosos problemas nuevos, que están asociados con la formulación de modelos constitutivos, y su implementación para resolver problemas de valores de contorno, el desarrollo de procedimientos numéricos y finalmente la identificación adecuada de los parámetros del material tanto en el laboratorio como in situ. Mientras estos problemas constituyen para los investigadores un campo desafiante, la aplicación del análisis inelástico a problemas de diseño está más bien limitada debido no solo a su desarrollo insuficiente, sino también a una falta de confianza en su precisión. Además, el poco conocimiento de la respuesta de materiales inelásticos para diferentes condiciones de carga, y el desconocimiento de los parámetros del material que deben incorporarse en los modelos constitutivos, también contribuyen

Recibido: Septiembre 1987

a dificultar la aplicación sistemática de análisis inelásticos a problemas prácticos de ingeniería.

En este capítulo se discutirán algunos elementos esenciales del sistema de análisis inelástico, indicando los tipos de problemas que se investigan actualmente, o que se resolverán en el futuro. Se cree que una discusión general puede resultar útil para identificar áreas de futuras investigaciones, y también para reconocer la necesidad de una investigación coordinada. En el siguiente apartado se discutirá el concepto de sistema de análisis inelástico y tras ello se considerará la aplicabilidad de modelos constitutivos para resolver problemas, tanto en dominios estables como inestables. En el siguiente apartado se planteará el problema de estabilidad y comportamiento postcrítico junto con el concepto de modos de falla estáticos y dinámicos. La importancia del desarrollo de una teoría general de falla que tenga en cuenta efectos dinámicos se enfatizará en el último apartado donde se discutirá brevemente el fenómeno de explosión de rocas.

EL SISTEMA DE ANALISIS INELASTICO

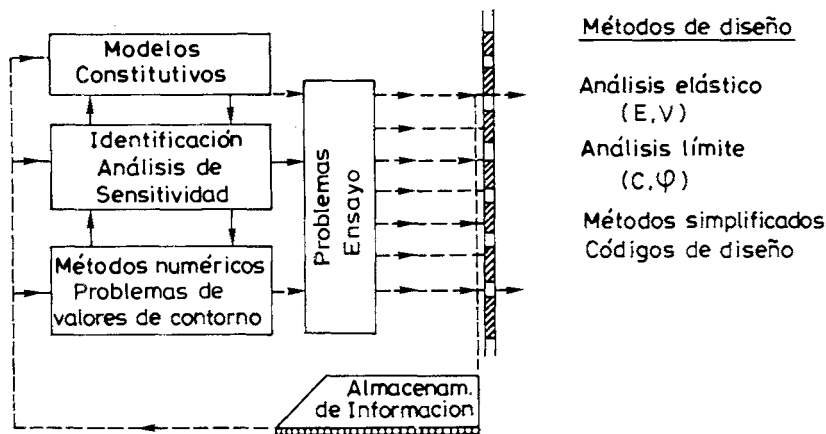


Figura 1. Sistema de análisis inelástico.

El concepto general del sistema se ilustra en la Figura 1. El sistema se compone de varios bloques pertenecientes a distintas clases de problemas inelásticos y que interaccionan entre sí. El bloque I "Modelos Constitutivos" contiene diversas formulaciones de leyes constitutivas que describen plasticidad, fractura, y degradación de materiales tanto para historias de carga monótonas como variables. El bloque II acerca de "Identificación y Análisis de sensibilidad" contiene métodos para reconocer parámetros relevantes del material tanto de datos de mediciones de laboratorio como de ensayos in situ (ensayos triaxiales, penetrómetros, datos de presurómetros, etc.) y también brinda métodos para realizar análisis de sensibilidad con respecto a variaciones de los parámetros del material en predicción de modelos. El bloque III que contiene los "Procedimientos Numéricos", proporciona un conjunto de algoritmos y programas para la solución de problemas de contorno y de valores iniciales. Se escogen problemas de referencia para verificar la precisión tanto de los procedimientos numéricos como

la predicción de los modelos y, por consiguiente, son necesarias soluciones analíticas, o mediciones experimentales, para dichos problemas. El quinto bloque es el más importante y trata los "Métodos de Diseño". Contiene los códigos de diseño y cálculo utilizados en el diseño ingenieril práctico. Se supone que este bloque asimila los desarrollos de los bloques previos y los aplica en la solución de problemas de diseño. Sin embargo este proceso no es inmediato y conviene colocar una pared vertical semipermeable entre los cuatro primeros bloques, que en su mayoría contienen desarrollos de investigadores, y el último que contiene los métodos de cálculo y diseño recomendados. Por su parte el flujo de información que emana desde el sistema de los cuatro bloques no atraviesa totalmente la pared y usualmente se destina al almacenamiento de información (bibliotecas, informes de investigación o conferencias). Si esta información se recicla luego para mejorar el rendimiento de cualquiera de los bloques, se la reconoce como información útil. Si en cambio no recicla y sólo es almacenada, entonces debe clasificarse como información inútil, que constituye una pérdida para la sociedad. Solamente una pequeña parte de la información pasa la pared y se la utiliza directamente en métodos de diseño.

La situación no refleja conservadorismo de los diseñadores sino más bien surge de metas y filosofías diferentes entre dos grupos de personas. Mientras el propósito más importante de los investigadores es proveer una descripción más precisa del comportamiento de los materiales para una variedad de condiciones de carga, y las herramientas numéricas más efectivas para aplicar los modelos constitutivos a problemas de contorno, el diseño como un proceso de toma de decisiones, se basa usualmente en una regla única: *identificar los modos de falla posibles y proporcionar un diseño racional que los evite* (mediante el empleo de coeficientes de seguridad apropiados para modos particulares). En muchos casos los modos de falla y las cargas críticas asociadas con el mecanismo elegido pueden evaluarse mediante la aplicación de la hipótesis del modelo rígido plástico y algunas variantes simplificadas del análisis límite, por ejemplo, métodos de equilibrio asociados con un mecanismo de falla elegido, o el cálculo estático y cinemático de la carga crítica basado en los teoremas de análisis límite. Para ello sólo se necesitan dos parámetros del material (cohesión c y el ángulo de rozamiento interno ϕ), que se identifican fácilmente a partir de ensayos simples. La estabilidad de taludes y la capacidad portante de las cimentaciones proveen buenos ejemplos de tales problemas. De igual manera, el análisis elástico lineal, aunque con un rango de aplicación limitado, proporciona en algunos casos una información útil de los campos de desplazamientos y tensiones iniciales. El concepto de aplicar un modelo tan simple como sea posible para identificar los modos de falla, conduce a un rechazo para aceptar descripciones más sofisticadas que involucran numerosos parámetros del material y una estructura matemática más compleja. Sin embargo hay muchos problemas en ingeniería geotécnica, por ejemplo aquellos asociados a cargas cíclicas, procesos sísmicos, o cargas dinámicas en los que se necesita una descripción del comportamiento del material más sofisticada porque los modelos simples no pueden proporcionar información significativa. En este caso, el sistema de análisis inelástico que utiliza modelos más complejos se convierte en una herramienta útil en el proceso de diseño, aunque debe reconocerse que la transferencia de información desde la investigación hacia la aplicación no es directa, sino que implica reciclado y mejoras

consecutivas de elementos particulares.

Discutamos ahora alguno de los bloques más importantes del sistema presentado en la Figura 1.

Modelos Constitutivos

La aplicación de elasticidad lineal en mecánica de suelos y rocas provee sólo una primera aproximación, válida para estados de tensión situados muy por debajo del estado límite. La condición de falla basada en tensiones locales proporciona entonces un valor muy conservativo de la carga límite, ya que el análisis elástico lineal no describe la considerable redistribución de tensiones que ocurren en el rango no lineal antes de la falla última. Por otra parte el análisis límite se basa en la hipótesis de ductibilidad ilimitada de los materiales, y por lo tanto conduce a una redistribución de tensiones que corresponde a modos de falla cinemáticamente admisibles. Este enfoque, por su parte, usualmente sobreestima la capacidad de carga real y la consecuencia puede proporcionar una evaluación no conservativa de la carga límite.

Al considerar la respuesta *incremental* o estacionaria de materiales, pueden mencionarse los siguientes modelos:

- i) Elasticidad no lineal y formulaciones hipoeelásticas.
- ii) Modelos plásticos ideales con reglas de flujo asociadas o no asociadas.
- iii) Modelos de endurecimiento isótropo con densidad (endurecimiento volumétrico y/o desviador).
- iv) Modelos de endurecimiento anisótropo que involucran superficies de carga múltiple.
- v) Formulaciones endocrónicas o incrementalmente no lineales que evitan condiciones de carga-descarga.
- vi) Modelos combinados de daño y elasto-plasticidad que tienen en cuenta la degradación de la rigidez plástica.

Para comportamiento del material dependiente del tiempo se aplican los siguientes modelos:

- i) Modelos viscosos o viscoplásticos que emplean condiciones de fluencia y reglas de endurecimiento formulados para plasticidad independiente del tiempo.
- ii) Modelos de degradación viscoplástica que describen fluencia y comportamiento tensión-deformación que depende de la velocidad.

Para carga monótona pueden emplearse el simple modelo elastoplástico o modelos de material elástico no lineales para simular con precisión suficiente la respuesta en deformaciones de un material. Para un modelo perfectamente plástico se desprecian los fenómenos de endurecimiento y ablandamiento y se supone que el material exhibe ductilidad ilimitada. Para un modelo de endurecimiento isótropo, la densidad o la relación de huecos irreversibles se suponen como variables de estado. Tanto el endurecimiento como el ablandamiento se predicen comunmente mediante esta clase de modelos,

junto con la superficie de estado crítico, que corresponde a un módulo de endurecimiento que se anula. Se emplean reglas de flujo asociadas o no asociadas dependiendo de la precisión con que se describa la dilatación del material. Para programas de carga más complejos, en particular para carga cíclica, deben introducirse reglas de endurecimiento más elaboradas para describir los efectos de histéresis y degradación cíclica del material que conducen a una posible falla o liquefacción por deformación no drenada. Luego se obtiene una descripción apropiada de la memoria del material mediante la introducción de superficies de carga múltiples y la definición de estados de carga particulares.

En la teoría clásica de plasticidad se supone comunmente que el comportamiento elástico sucede para estados de tensión representados en el interior de la superficie de fluencia. Sin embargo para materiales geológicos, tales como arcilla, arena o roca, no es fácil diferenciar el comportamiento elástico, y la superficie de fluencia encierra usualmente un dominio muy pequeño en la proximidad del punto de carga. Por tanto, una formulación más precisa debe permitir anular el dominio elástico, y la definición de estados de carga y descarga. Tal posibilidad se ofrece mediante las reglas de endurecimiento anisótropas de superficie múltiple o las formulaciones incrementales no lineales.

En este trabajo no discutiremos todas las formulaciones particulares de los modelos constitutivos. Para una discusión extensiva de tal formulación, véase Mróz and Norris¹⁸, y Mróz and Zienkiewicz¹⁹. Para complementar esta discusión nos concentraremos aquí en las condiciones restrictivas de admisibilidad que surgen de los requerimientos de convexidad impuestos a las relaciones incrementales dentro del rango estable del comportamiento del material. Estas condiciones especifican también la superficie límite para procesos controlados por tensiones, mientras otras superficies límites pueden especificarse para procesos controlados por la deformación o bien controlados en forma mixta. La idea de imponer algunas condiciones de admisibilidad a las relaciones constitutivas surge del primer trabajo de Prager²⁵ y subsecuentemente esta idea se elaboró en numerosos trabajos.

Al considerar el comportamiento del material independiente de la velocidad, las relaciones constitutivas pueden expresarse como sigue:

$$\dot{\epsilon} = C \overset{\nabla}{\sigma} \quad \text{o} \quad \overset{\nabla}{\sigma} = D \epsilon \quad (1)$$

donde las matrices **D** y **C** dependen de las tensiones, deformaciones, y parámetros de endurecimiento y memoria. Para la formulación incrementalmente lineal, **D** o **C** no dependen de las velocidades de deformación o de tensión. Aquí denota la velocidad de deformación y es un incremento de tensiones objetivo, por ejemplo, especificado por la relación:

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma \text{div}(\mathbf{v}) - \omega \sigma + \sigma \omega \quad (2)$$

donde ω es la rotación del elemento, **v** indica el vector velocidades, y $\dot{\sigma}$ es la derivada material del tensor de tensiones. En lo que sigue, nuestra discusión estará restringida a la teoría de pequeñas deformaciones, para la cual los cambios de configuración son despreciables al definir el incremento o velocidad de deformación. Permitimos

entonces la existencia de una superficie de carga o fluencia en cada etapa del proceso de deformación en el espacio de tensiones o deformaciones, que separe los dominios de carga y descarga (no necesariamente elástica), es decir:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}) = 0 \quad \text{o} \quad \phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}) = 0 \quad (3)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ indica colectivamente las variables de estado y \mathbf{p} los parámetros de memoria que se almacenan o borran consecutivamente de la memoria del material. Se realiza la hipótesis de aplicar la descomposición usual del tensor de deformación en las parcelas elástica y plástica, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$. Como suceden diferentes trayectorias de cargas activas o de descargas para diferentes relaciones de los incrementos, podemos escribir para los procesos controlados por la deformación:

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{D}_2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{para} \quad \phi = 0, \quad \dot{\phi}_\varepsilon = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0, \\ \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{D}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{para} \quad \phi < 0, \quad \text{o} \quad \dot{\phi}_\varepsilon < 0, \quad \phi = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

y las relaciones inversas similares:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{C}_2 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{para} \quad f = 0, \quad \dot{f}_\sigma = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} > 0, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{C}_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{para} \quad f < 0, \quad \text{o} \quad \dot{f}_\sigma < 0, \quad f = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

donde el punto entre dos símbolos indica el producto escalar. Supongamos que la condición de continuidad se satisfaga para incrementos de tensión o deformación dirigidos tangencialmente a la superficie de fluencia:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{D}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{para} \quad \phi = \dot{\phi}_\varepsilon = 0 \\ \mathbf{C}_2 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{para} \quad f = \dot{f}_\sigma = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Para superficies de carga regulares estas condiciones de continuidad imponen restricciones esenciales sobre las matrices constitutivas, es decir

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1 + \mathbf{h} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1 + \mathbf{g} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (7)$$

donde \mathbf{h} y \mathbf{g} son tensores arbitrarios. Además tenemos

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}_2 &= \mathbf{D}_2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{h} \boldsymbol{\phi}_n \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}_1 - \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}^r \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 &= \mathbf{C}_2 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{g} \mathbf{f}_n \cdot \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \end{aligned} \quad (8)$$

donde $\boldsymbol{\phi}_n = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\mathbf{f}_n = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$.

Las relaciones (8) pueden interpretarse como las familiares expresiones elastoplásticas .

Se identifican las matrices D_1 y C_1 con las matrices de rigidez y flexibilidad elástica C^e y D^e , es decir $\dot{\epsilon}^e = \dot{\epsilon}_1 = C_1 \overset{\nabla}{\sigma}$ y $\overset{\nabla}{\sigma}^e = \overset{\nabla}{\sigma}_1 = D_1 \dot{\epsilon}$. Ahora $\dot{\epsilon}^p$ y $\overset{\nabla}{\sigma}^r$ representan los incrementos de deformación plástica y de la velocidad de relajación de tensiones que se suman al incremento de tensiones elásticas. Llamando

$$\mathbf{h} = -M \mathbf{n}_h \frac{1}{|\phi_n|}, \quad \mathbf{g} = \frac{1}{K} \mathbf{n}_g \frac{1}{|f_n|} \quad (9)$$

donde \mathbf{n}_h y \mathbf{n}_g son tensores normalizados, es decir $\mathbf{n}_h \cdot \mathbf{n}_h = 1$, $\mathbf{n}_g \cdot \mathbf{n}_g = 1$ y M y K son funciones escalares, las relaciones (8) toman la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p = C^e \overset{\nabla}{\sigma} + \frac{1}{K} \mathbf{n}_g \mathbf{n}_f \overset{\nabla}{\sigma}, \quad f = 0, \quad \dot{f}_\sigma > 0 \\ \overset{\nabla}{\sigma} &= \overset{\nabla}{\sigma}^e - \overset{\nabla}{\sigma}^r = D^e \dot{\epsilon} - M \mathbf{n}_h \mathbf{n}_\phi \dot{\epsilon}, \quad \phi = 0, \quad \dot{\phi}_\epsilon > 0 \end{aligned} \quad (10)$$

donde

$$\mathbf{n}_\phi = \frac{\partial \phi / \partial \epsilon}{|\phi_n|}, \quad \mathbf{n}_f = \frac{\partial f / \partial \sigma}{|f_n|} \quad (11)$$

son los tensores gradientes normalizados. Las funciones escalares K y M se llaman los módulos de endurecimiento y relajación respectivamente y aparecen en las reglas de flujo o relajación

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{K} \mathbf{n}_g (\mathbf{n}_f \cdot \overset{\nabla}{\sigma}), \quad \overset{\nabla}{\sigma}^r = M \mathbf{n}_h (\mathbf{n}_\phi \cdot \dot{\epsilon}) \quad (12)$$

y

$$K = \frac{\mathbf{n}_f \cdot \overset{\nabla}{\sigma}}{|\dot{\epsilon}^p|}, \quad M = \frac{|\overset{\nabla}{\sigma}^r|}{(\mathbf{n}_\phi \cdot \dot{\epsilon})} \quad (13)$$

Es decir que el módulo de endurecimiento K se obtiene mediante la proyección del incremento de tensiones sobre el vector normal \mathbf{n}_f dividido por el modulo de $\dot{\epsilon}^p$. El módulo de relajación M se define como el cociente entre el módulo de $\overset{\nabla}{\sigma}^r$ y la proyección de $\dot{\epsilon}$ sobre la normal \mathbf{n}_ϕ a la superficie de carga en el espacio de deformaciones. En el caso de reglas de flujo o relajación no asociadas $\mathbf{n}_g \neq \mathbf{n}_f$ y $\mathbf{n}_h \neq \mathbf{n}_\phi$ y el vector del incremento de deformaciones plásticas se aparta del vector \mathbf{n}_f en el espacio de tensiones y la dirección de $\overset{\nabla}{\sigma}^r$ se aparta de \mathbf{n}_ϕ en el espacio de deformaciones. Para el caso de reglas de relajación y flujo asociadas, entonces resulta $\mathbf{n}_g = \mathbf{n}_f$ y $\mathbf{n}_\phi = \mathbf{n}_h$, luego (12) se convierte en

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{K} \mathbf{n}_f (\mathbf{n}_f \cdot \overset{\nabla}{\sigma}), \quad \overset{\nabla}{\sigma}^r = M \mathbf{n}_\phi (\mathbf{n}_\phi \cdot \dot{\epsilon}) \quad (14)$$

Los módulos de endurecimiento y relajación se pueden relacionar invirtiendo (10) y queda:

$$\dot{\bar{\sigma}} = \left[D^e - \frac{D^e \mathbf{n}_g \mathbf{n}_f \cdot D^e}{K + \mathbf{n}_f \cdot D^e \mathbf{n}_g} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\bar{\sigma}} - \dot{\bar{\sigma}}^r \quad (15)$$

y advirtiendo que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = D^e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \mathbf{n}_\phi = \frac{D^e \mathbf{n}_f}{|D^e \mathbf{n}_f|} \quad (16)$$

$$\mathbf{h} = D^e \mathbf{g} \quad \mathbf{n}_h = \frac{D^e \mathbf{n}_g}{|D^e \mathbf{n}_g|}$$

obtenemos

$$\frac{1}{M} = K' + \frac{\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{n}_h}{|D^e \mathbf{n}_f|} \quad K' = \frac{K}{|D^e \mathbf{n}_f| |D^e \mathbf{n}_g|} \quad (17)$$

Las relaciones (10) o (15) son las formas más generales de las ecuaciones lineales asociadas con dominios de carga y descarga. Esta formulación general debe complementarse mediante reglas de evolución para las variables de estado. Los parámetros escalares de memoria p_1, p_2, \dots pueden usarse para especificar estas reglas para casos de carga particulares, por ejemplo

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \mathbf{A}_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, & \dot{p}_1 &> 0 & & \text{-- carga} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \mathbf{A}_2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, & p_2 < p_{1m}, & \dot{p}_2 > 0 & & \text{-- descarga} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \mathbf{A}_3(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, & p_3 < p_{1m}, & p_3 < p_{2m}, & \dot{p}_3 > 0 & \text{-- recarga} \end{aligned} \quad (18)$$

donde p_{1m} es el máximo valor alcanzado durante el proceso de carga para $\dot{p}_1 > 0$ y el proceso de descarga comienza cuando $\dot{p}_1 < 0$. El valor p_{1m} se encuentra en la memoria del material y los nuevos parámetros $p_2, \dot{p}_2 > 0$ especifican los procesos de descarga. De igual forma, cuando $\dot{p}_2 < 0$, los valores p_{1m} y p_{2m} están almacenados en la memoria del material y el tercer proceso de carga comienza cuando $\dot{p}_3 > 0$. Tales reglas de memoria se discuten detalladamente en los trabajos de Mróz y Norris¹⁸ y Dougill⁶ y se explican usando superficies de carga múltiple y de tensiones reversibles donde los parámetros escalares de memoria están representados por los diámetros de estas superficies.

Para procesos controlados por tensiones, los estados límites se alcanzan generalmente cuando se anula el módulo de endurecimiento, o sea cuando $K = 0$. Esto significa que la tensión es estacionaria para deformaciones crecientes. Análogamente para procesos controlados por la deformación, el estado límite corresponde a una deformación estacionaria para tensiones variables, y entonces el módulo de relajación tiende a infinito, así $K + \mathbf{n}_f \cdot D^e \mathbf{n}_g = 0$. Sin embargo, al examinar más cuidadosamente los estados límites, imponemos la condición de convexidad o unicidad las relaciones constitutivas, esto es

$$J = \Delta \overset{\nabla}{\sigma} \cdot \Delta \dot{\epsilon} > 0 \quad (19)$$

para dos pares cualesquiera $\overset{\nabla}{\sigma}^{(1)}$, $\overset{\nabla}{\sigma}^{(2)}$ y $\dot{\epsilon}^{(1)}$, $\dot{\epsilon}^{(2)}$ relacionados por las ecuaciones constitutivas donde $\Delta \overset{\nabla}{\sigma} = \overset{\nabla}{\sigma}^{(2)} - \overset{\nabla}{\sigma}^{(1)}$ y $\Delta \epsilon = \dot{\epsilon}^{(2)} - \dot{\epsilon}^{(1)}$. Notemos que para la formulación de pequeñas deformaciones, la condición (19) es suficiente para garantizar la unicidad de los problemas de valores de contorno, ya que

$$\int \Delta \overset{\nabla}{\sigma} \cdot \Delta \sigma \, dV = \int J \, dV = 0 \quad (20)$$

para dos soluciones cualesquiera, $\overset{\nabla}{\sigma}^{(2)}$, $\dot{\epsilon}^{(2)}$ y $\overset{\nabla}{\sigma}^{(1)}$, $\dot{\epsilon}^{(1)}$, que satisfacen las condiciones de contorno y cumplen con las ecuaciones de equilibrio y con las relaciones cinemáticas. La condición (19) se indicó en el primer trabajo de Prager como la más importante en la formulación de las ecuaciones constitutivas. Una discusión general de las condiciones de estabilidad y unicidad que tiene en cuenta los cambios de configuración fue presentada por Hill¹¹.

Las propiedades de las transformaciones convexas fueron examinadas en los trabajos de Mróz^{14,15}, y aquí sólo se indican las consecuencias más importantes.

- i) La condición de convexidad $J > 0$ implica la continuidad de la transformación (6) para tensiones o deformaciones con trayectorias tangenciales a las superficies de carga, así

$$D_2 \dot{\epsilon} = D_1 \dot{\epsilon} \quad \text{para} \quad n_\phi \cdot \dot{\epsilon} = 0 \quad \text{si} \quad \Delta \overset{\nabla}{\sigma} \cdot \Delta \dot{\epsilon} > 0 \quad (21)$$

- ii) Cuando se satisface la condición de continuidad (6), la condición de convexidad $J > 0$, se cumple para operadores positivo-definidos D_1 , D_2 , o C_1 , C_2 , esto es

$$\Delta \overset{\nabla}{\sigma} \cdot \Delta \dot{\epsilon} = (D_2 \dot{\epsilon}_2 - D_1 \dot{\epsilon}_1) \cdot (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_1) > 0$$

$$\text{si} \quad D_1 \dot{\epsilon}_1 \cdot \dot{\epsilon}_1 > 0 \quad , \quad D_2 \dot{\epsilon}_2 \cdot \dot{\epsilon}_2 > 0 \quad (22)$$

- iii) Cuando se viola la condición de continuidad (6), la condición de convexidad (19) especifica dominios cónicos de aplicación de las ecuaciones constitutivas para las matrices constitutivas, positivo definidas D_1 y D_2 (o C_1 y C_2).

La segunda propiedad implica que para satisfacer la condición de convexidad, es suficiente demostrar que D_1 y D_2 son positivo definidas. Como D_1 se identifica con la matriz elástica, que es positivo definida, entonces,

$$\Delta \overset{\nabla}{\sigma} \cdot \Delta \dot{\epsilon} > 0 \quad \text{si} \quad \overset{\nabla}{\sigma} \cdot \dot{\epsilon} = D_2 \dot{\epsilon} \cdot \dot{\epsilon} > 0 \quad \text{para} \quad n_\phi \cdot \dot{\epsilon} > 0 \quad (23)$$

Consideraremos ahora la implicación de la desigualdad (23) sobre el valor crítico del módulo de endurecimiento para flujo no asociado a las reglas de relajación. Este

tema fue discutido en detalle en los primeros trabajos de Mróz^{14,15} y sólo recientemente en un contexto más general por Maier y Hueckel¹³ y Raniecki²⁷. Imponiendo que

$$D^e \dot{\epsilon} \cdot \dot{\epsilon} - \frac{(D^e n_g \cdot \dot{\epsilon})(n_f \cdot D^e \dot{\epsilon})}{K + n_f \cdot D^e n_g} > 0 \tag{24}$$

se obtiene la siguiente condición

$$2K > 2K_{cr} = \sqrt{n_g \cdot D^e n_g} \sqrt{n_f \cdot D^e n_f} - n_g \cdot D^e n_f \tag{25}$$

En particular cuando $n_g = n_f$, la desigualdad (25) queda

$$K > K_{cr} = 0 \tag{26}$$

donde K_{cr} es el valor crítico del módulo de endurecimiento.

Las desigualdades (25) y (26) brindan la definición de los estados de carga límite o crítico sobre la trayectoria. Para las reglas de flujo asociadas el estado límite sucede para tensiones estacionarias. En efecto, para velocidades de deformación coaxiales con n_f , es $\dot{\epsilon} = cn_f$ desde (15) surge $\overset{\nabla}{\sigma} = 0$ cuando $K = 0$. Por otra parte esta deformación es el autovalor de la matriz constitutiva. Sin embargo, para reglas de flujo no asociadas, la bifurcación puede ocurrir en el valor crítico del módulo de endurecimiento $K = K_{cr} > 0$ y el modo de bifurcación se especifica $\Delta \dot{\epsilon} = c_1(n_g + n_f)$, $\Delta \overset{\nabla}{\sigma} = c_2(n_g - n_f)$, Raniecki²⁷ donde c_1 y c_2 son constantes. Cuando $K = 0$, para la regla de flujo no asociado, la autodeformación es $\dot{\epsilon} = cn_g$ y entonces $\overset{\nabla}{\sigma} = 0$.

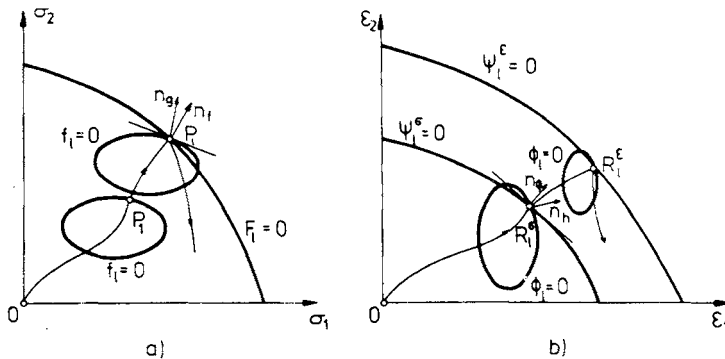


Figura 2. Superficies de fluencia y límite en los espacios de tensiones (a) y de deformaciones (b).

Se ha visto que hay dos clases de puntos críticos. Para la regla de flujo no asociada primero se alcanza el superficie de bifurcación para la que $K = K_{cr} > 0$, mientras que la superficie límite corresponde a $K = 0$, que es la tensión estacionaria sobre el paso de carga. Para las reglas de flujo asociadas ambas superficies coinciden. La Figura 2 presenta esquemáticamente las superficies límites en los espacios de tensión y deformación. La superficie límite $F_1 = 0$ en el espacio de tensiones corresponde a $K = 0$ y su imagen en el espacio de deformaciones es $F_1^e = 0$. La superficie límite $\phi_1 = 0$,

corresponde a deformación estacionaria para procesos controlados por la deformación, así $1/M = K + \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \mathbf{n}_g = 0$ en $\phi_1 = 0$. En la Figura 3.a se muestra la superficie límite para el modelo de estado crítico con regla de flujo asociada. Se compone de una porción sobre la superficie de fluencia en el dominio de ablandamiento y por la superficie de estado crítico en el dominio de endurecimiento. En la Figura 3.b se muestran las superficies de bifurcación y de estado límite para el material con endurecimiento de Coulomb con regla de flujo no asociada.

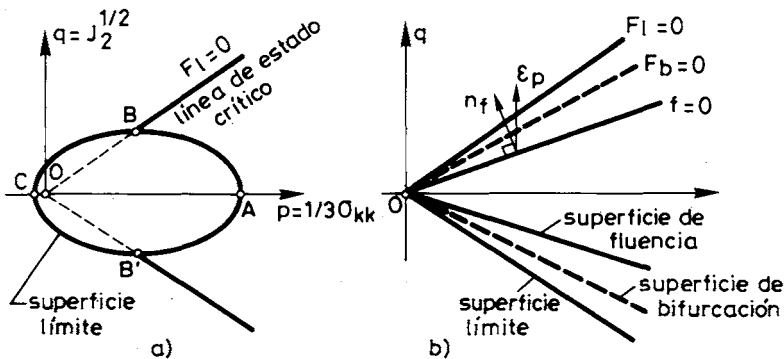


Figura 3. a) La superficie límite para el modelo de estado límite.
b) Superficies de fluencia, de bifurcación y límite para el material de Coulomb con endurecimiento.

La localización en bandas de cortante estudiadas por Rudnicki y Rice²⁹ y Rice²⁸ es un mecanismo de bifurcación particular y así los valores críticos del módulo de endurecimiento debieran estar debajo de los valores especificados mediante (25). Para la deformación plana la desigualdad (25) provee un límite superior próximo al módulo crítico para la localización.

La condición de convexidad puede imponerse sobre una estructura de leyes constitutivas más generales considerando los efectos de degradación elástica debidos a microfisuras, cf. Dougill⁶, Dragon y Mróz⁸, Bizant y Kim³. Los incrementos de tensión y deformación se descomponen ahora en tres partes

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p + \dot{\epsilon}^f, \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma}^e - \dot{\sigma}^r - \dot{\sigma}^f \quad (27)$$

donde $\dot{\epsilon}^f$ representa la velocidad de deformación de fractura debida a la variación del módulo elástico y $\dot{\sigma}^f$ es la velocidad de relajación correspondiente. Además de las superficies de carga o fluencia para la deformación plástica, introducidas la superficie de fractura que especifica el dominio de fractura progresivo

$$f^f(\sigma, \varphi) = 0, \quad \text{o} \quad \phi^f(\epsilon, \varphi) = 0 \quad (28)$$

donde φ indica el tensor de daño. Las relaciones constitutivas para $\dot{\epsilon}^f$ y $\dot{\sigma}^f$ ahora resultan

$$\dot{\epsilon}^f = \dot{C}^e \sigma = \frac{1}{L} s(m_f \cdot \overset{\nabla}{\sigma}), \quad f^f = 0, \quad m_f \cdot \overset{\nabla}{\sigma} > 0$$

$$\overset{\nabla}{\sigma}^f = \dot{D}^e \epsilon = N t(m_\phi \cdot \dot{\epsilon}), \quad \phi^f = 0, \quad m_\phi \cdot \dot{\epsilon} > 0 \quad (29)$$

y son análogas a las reglas de flujo y relajación en plasticidad. Aquí s y t son vectores unitarios que especifican las direcciones de $\dot{\epsilon}^f$ y $\overset{\nabla}{\sigma}$ y m_f , m_ϕ son los vectores unitarios perpendiculares a la superficie de fractura en los espacios de tensión y de deformación. Cuando $s = m_f$, $t = m_\phi$, entonces resultan reglas asociadas para las velocidades de deformación y de tensión de fractura. Como en el análisis anterior pueden establecerse los valores críticos para los módulos L y N .

Identificación y análisis de sensibilidad

Las ecuaciones de velocidades (8) y (18) pueden reescribirse brevemente como

$$\overset{\nabla}{\sigma} = D(\sigma, \alpha, p, a) \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\alpha} = A(\sigma, \alpha, p, a) \dot{\epsilon} \quad (30)$$

donde $\mathbf{a}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ es un conjunto de parámetros que entran en la descripción. Llevando a cabo nuestros ensayos para tensión uniforme, las predicciones del modelo pueden compararse con resultados experimentales y pueden identificarse los parámetros \mathbf{a} del material. El conjunto de ensayos de identificación debiera contener el menor número posible de experimentos, representados usualmente mediante trayectorias rectas en los espacios de tensión o deformación. El conjunto de ensayos de verificación especifica el dominio de aplicación del modelo y debiera contener estados de cargas complejos. Este conjunto se utiliza para mejorar la exactitud de la identificación y también para verificar las hipótesis básicas de la formulación del modelo.

Los procedimientos de identificación se han estudiado extensivamente en la teoría de sistemas^{10,24}, y normalmente se ocupan de la minimización de la distancia entre las curvas experimentales y de la respuesta predicha por el modelo. Considerando las curvas tensión-deformación que se obtienen para programas de carga bajo deformación controlada, puede exigirse por ejemplo

$$\min I(a) = \sum_l (\sigma^{\text{exp}} - \sigma) \cdot (\sigma^{\text{exp}} - \sigma)_l \quad (31)$$

$$\min J(a) = \int_0^\epsilon (\sigma^{\text{exp}} - \sigma) \cdot d\epsilon \quad (32)$$

donde σ^{exp} y σ son las componentes de tensión experimental y predicha para algún valor de la deformación y el mismo estado de carga, mientras $l = 1, 2, 3, \dots$ indica el conjunto de puntos discretos sobre la curva de respuesta. La búsqueda directa o los métodos del gradiente pueden aplicarse en los procedimientos de optimización. La ecuación de sensibilidad

$$\frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{a}} \right) \dot{\epsilon} \quad (33)$$

acoplada con la segunda condición (30) proporcionan ahora la información acerca de la variación de la velocidad de tensiones con respecto a la variación del vector de parámetros \mathbf{a} . Los ensayos a escala real brindan la posibilidad de identificar los parámetros desde la solución de problemas de valores de contorno mediante la comparación de las medidas y predicciones en un conjunto de puntos seleccionados, y minimizar la distancia normalizada entre los valores de desplazamientos y deformaciones calculados. Tal identificación in situ proporcionará normalmente valores de los parámetros distintos a los obtenidos en el laboratorio mediante ensayos pequeños. Esta diferencia puede atribuirse a la presencia de defectos como fisuras, fallas, inhomogeneidades, no consideradas en la formulación del modelo. Algunos de estos defectos implican también dependencia del tamaño en la respuesta y así los ensayos de laboratorio en tensiones uniformes o los ensayos de modelo no pueden proporcionar una información completa sobre los parámetros del material.

Consideremos la formulación de elementos finitos de un problema de valores de contorno para el material definido mediante (30), es decir

$$\mathbf{K}(\sigma, \alpha, \mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{f}) \delta = \mathbf{F} \quad (34)$$

y la distancia normalizada expresada en función de los desplazamientos de medida l

$$J(\mathbf{a}, \mathbf{f}) = \sum_l (\delta^{\text{exp}} - \delta) \cdot (\delta^{\text{exp}} - \delta)_l \quad (35)$$

donde \mathbf{K} indica la matriz de rigidez global, y δ y \mathbf{F} los vectores de desplazamientos y fuerzas nodales, respectivamente. El símbolo \mathbf{f} indica colectivamente los parámetros de imperfección no considerados en la formulación local. El problema de identificación ahora no sólo se relaciona con el conjunto de parámetros \mathbf{a} , sino con el conjunto de imperfecciones \mathbf{f} . Mientras el conjunto de imperfecciones está distribuido estadísticamente, se necesitan las técnicas más costosas de filtrado y datos empíricos en la estimación de parámetros.

Los ensayos de escala real brindan también la posibilidad de realizar los análisis de sensibilidad de la solución con respecto a los parámetros \mathbf{a} , imperfecciones \mathbf{f} , y también con respecto a clases de modelos seleccionados. Puede suceder que un modelo más simple con un conjunto de parámetros de identificación \mathbf{a} proporcione una descripción más exacta en vista de los errores de identificación asociados con formulaciones más complejas.

Ejemplos de prueba

Estos ejemplos pueden elegirse: (i) para verificar la precisión de los procedimientos numéricos, (ii) verificar las predicciones del modelo constitutivo y, (iii) verificar tanto las técnicas numéricas combinadas con el modelo adoptado y sus parámetros. Los ensayos de modelos centrífugos brindan la posibilidad de definir problemas para los que

se mantienen los factores de escala. Sin embargo, en virtud del efecto de tamaño del comportamiento de ablandamiento post-crítico y de la progresión del daño, los ensayos a escala real son más representativos como ejemplos de prueba.

SOLUCION DE PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO EN REGIMEN POST-CRITICO

En el apartado anterior discutimos brevemente la estructura básica de los modelos constitutivos y la determinación de las superficies límites locales que separan los rangos estable e inestable de la deformación. Sin embargo, en los casos prácticos, la solución debería proceder más allá de los estados definidos por la superficie límite. Los análisis deberían determinar normalmente la superficie de falla para toda la estructura con el modo de falla asociado que emplea localmente la progresión, más allá de la tensión pico. Desafortunadamente, los procedimientos de elementos finitos comunes sufren inestabilidades numéricas y sensibilidad frente al tamaño de malla. En realidad, la deformación tiende a localizarse a través de bandas de cortante concentradas cuyo ancho es sensible al tamaño de la malla de elementos finitos elegida. Para evitar esta sensibilidad resultan necesarias varias modificaciones en la formulación, por ejemplo:

- i) Suponer un ancho de banda de cortante prescrito y obtener la solución dentro y fuera de la banda con elementos de tamaños distintos.
- ii) Reformular el problema mediante la introducción de la banda de cortante existente en la matriz de rigidez del elemento.
- iii) Suponer relaciones constitutivas de contacto a través de la banda de cortante que relacionen las tensiones tangenciales y normales con los desplazamientos correspondientes de las discontinuidades. La formulación de elementos finitos debe permitir tales discontinuidades en los nodos.

Discutamos una de las modificaciones posibles, cf. Pietruszczak y Mróz²², suponiendo que los elementos representativos se componen de dos subelementos conectados en serie, Figura 4. En el subelemento (a), la deformación se concentra en una banda de cortante de ancho d , inclinada un ángulo α respecto al eje 0-x. La parte restante de este subelemento se supone rígida. El subelemento (b) se supone con comportamiento elástico.

Consideremos primero la formulación en pequeñas deformaciones. El flujo plástico dentro de la banda de cortante se describe mediante la condición de contacto y la regla de flujo

$$f(\sigma_n, \tau, \beta) = 0 \quad (36)$$

$$\dot{\epsilon}_n^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_n}, \quad \dot{\gamma}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tau}, \quad \dot{\epsilon}_t^p = 0 \quad (37)$$

donde $\dot{\epsilon}_n^p$, $\dot{\gamma}^p$, $\dot{\epsilon}_t^p$ son las velocidades de deformación dentro de la banda de cortante

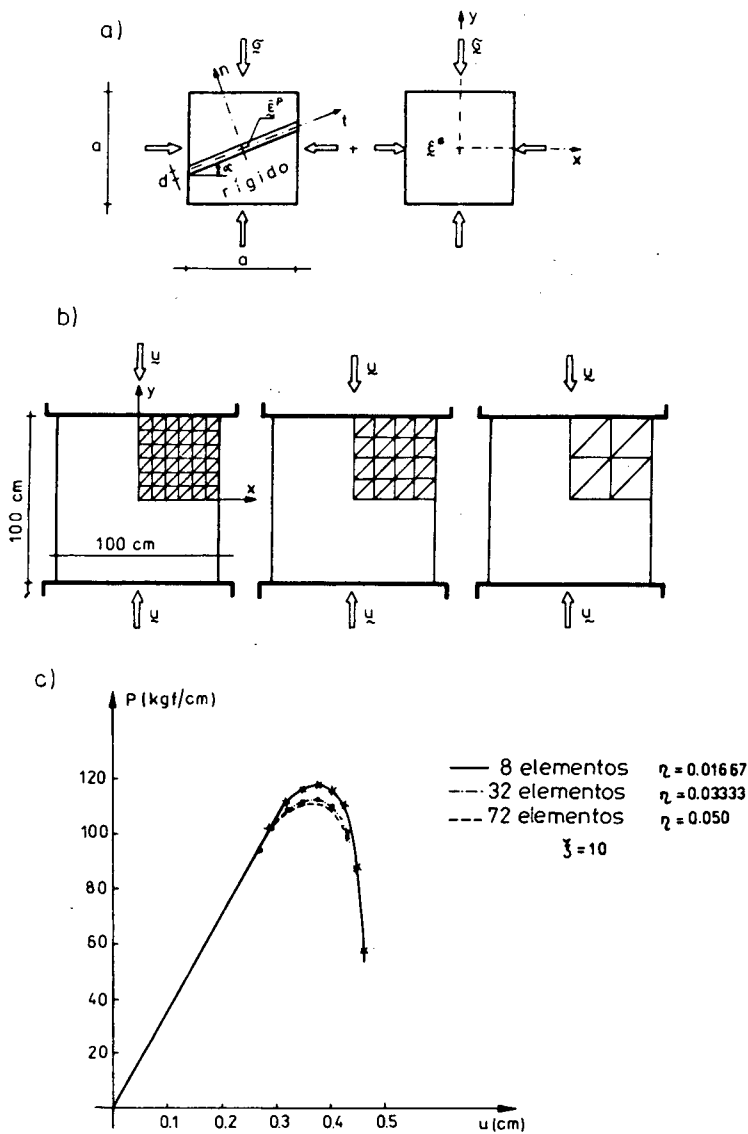


Figura 4. Solución para un material reblandecible. a) elemento r que contiene bandas de cortante. b) diferentes tamaños de malla. c) curvas carga-desplazamiento.

referidas al sistema de referencia local (n, t) . Aquí, σ_n , τ indican las tensiones normal y de cortante y β es la variable de ablandamiento. La regla de flujo también puede escribirse como sigue

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{H} [C^p] \dot{\sigma}, \quad [C^p] = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (38)$$

La deformación plástica promedio dentro del elemento se expresa como sigue

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{F_b}{F_e} \dot{\tilde{\epsilon}}^p = \frac{d}{a} \frac{1}{\cos\alpha} \dot{\tilde{\epsilon}}^p = \frac{d}{a} \frac{1}{\cos\alpha} \frac{1}{H} [\mathbf{C}] \dot{\sigma} \quad (39)$$

donde F_b y F_e indican las áreas de la banda de cortante y del elemento. El ángulo α varía dentro del intervalo $0 \leq \alpha \leq \pi/4$. El efecto de la posición de la banda de cortante dentro del elemento es despreciable.

La relación constitutiva para el subelemento (b) promediado para todo el elemento, toma la forma

$$\dot{\epsilon}^e = [\mathbf{C}^e] \dot{\sigma} \quad (40)$$

Sumando las velocidades de deformación elástica y plástica, tenemos

$$\dot{\epsilon} = \left\{ \frac{d}{a} \frac{1}{\cos\alpha} \frac{1}{H} [\mathbf{C}^p] + \frac{1}{E} [\mathbf{C}^e] \right\} \dot{\sigma} \quad (41)$$

0

$$\sigma = [\mathbf{D}] \dot{\epsilon} \quad \text{donde} \quad [\mathbf{D}] = \left\{ \frac{d}{a} \frac{1}{\cos\alpha} \frac{1}{H} [\mathbf{C}^p] + [\mathbf{D}^e] \right\}^{-1} \quad (42)$$

y \mathbf{D} es la matriz de rigidez tangencial referida a las coordenadas (n, t) . Transformando esta matriz al sistema de coordenadas globales obtenemos

$$\dot{\sigma} = [\mathbf{T}]^T \left\{ \frac{F_b}{F_e} \frac{1}{H} [\mathbf{C}^p] + [\mathbf{C}^e] \right\}^{-1} [\mathbf{T}] \quad (43)$$

donde $F_b/F_e = \eta/\cos\alpha$ y $\eta = d/\sqrt{F_e}$; \mathbf{T} indica la matriz de rotación.

Se ha visto que la rigidez del elemento ahora depende de la relación d/a o F_b/F_e . La velocidad de ablandamiento aumenta con el tamaño del elemento y más allá del tamaño crítico a los desplazamientos del elemento pierden su estabilidad. El efecto de tamaño se incorpora así naturalmente en la formulación del elemento.

Considerando por simplicidad la condición de fluencia de Coulomb en la forma

$$f = \tau + \sigma_n \tan\varphi - c(\beta) = 0 \quad (44)$$

donde φ es el ángulo de rozamiento interno y c es una variable de la cohesión del material. Suponiendo que

$$\dot{\beta} = \dot{\gamma}^p, \quad c = c_0 - c_1\beta \quad (45)$$

donde c_0 es la cohesión inicial y c_1 indica el módulo de ablandamiento. Así la cohesión se supone que disminuye con el cortante y el estado último corresponde a un material sin cohesión. La regla de flujo toma la forma

$$\dot{\epsilon}^p = -\frac{1}{\xi c_0} [\mathbf{C}^p] \dot{\sigma}, \quad [\mathbf{C}^p] = \begin{bmatrix} \tan^2\varphi & 0 & \tan\varphi \\ 0 & 0 & 0 \\ \tan\varphi & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

donde $\xi = c_1/c_0$. La inclinación de la banda de cortante respecto de la tensión principal máxima resulta

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(2\tau_{xy} / (\sigma_y - \sigma_x) \right) \quad (47)$$

Para condiciones de fluencia más complejas el cálculo del ángulo θ debiera realizarse en cada incremento.

La Figura 4.b presenta los resultados del estudio de la sensibilidad al tamaño de la malla.

Al considerar una banda de material de Coulomb elastoplástico con ablandamiento, entre dos placas rígidas en condiciones de deformación plana, se encuentra que para diferentes tamaños de la malla la curva carga-desplazamiento postcrítica es prácticamente la misma, mientras que la formulación standard muestra gran sensibilidad frente al tamaño de la malla de elementos finitos, Figura 4.c.

Este concepto de banda de cortante es similar al considerado recientemente en análisis de propagación de fisuras realizado por Bazant y Cedolin². Una descripción extensiva de la solución de problemas de valores de borde incluyendo zonas de cortante concentradas fue presentada por Cleary⁵. El problema de unicidad en el rango de ablandamiento fue discutido por Prevost y Hoeg²⁶.

Mientras se suponen pequeñas la deformación y rotación del elemento, la deformación y rotación de la banda de cortante pueden ser grandes. El análisis presente puede reformularse para incluir cambios de configuración finita dentro de la banda. La rotación de la banda resulta

$$\bar{\omega}_{(xy)} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^p = \frac{1}{2} \frac{F_e}{F_b} \dot{\gamma}^p = \mathcal{H}^T \dot{\epsilon}^p \frac{F_e}{F_b} \quad (48)$$

donde

$$\mathcal{H}^T = \left\{ -sc, sc, \frac{1}{2}(c^2 - s^2) \right\}, \quad s = \text{sen} \alpha, \quad c = \text{cos} \alpha \quad (49)$$

La velocidad de deformación plástica se expresa como sigue

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{H} [\mathbf{T}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{T}] \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{H} [\mathbf{C}'] (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\omega}_{(xy)} \mathbf{S}) = \frac{1}{H} [\mathbf{C}'] (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathcal{H}^T \dot{\epsilon}^p \frac{F_e}{F_b} \mathbf{S}) \quad (50)$$

donde

$$[\mathbf{C}'] = [\mathbf{T}^T] [\mathbf{C}] [\mathbf{T}], \quad \mathbf{S} = [-2\tau_{xy}, 2\tau_{xy}, \sigma_x - \sigma_y]^T \quad (51)$$

y \mathbf{T} es la matriz de rotación. La velocidad de deformación plástica promedio se expresa

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{F_b}{F_e} \frac{1}{H} [\mathbf{C}'] \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{H} [\mathbf{C}'] \mathbf{S} \mathcal{H}^T \dot{\epsilon}^p \quad (52)$$

de tal forma que finalmente tenemos

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{F_e}{F_e} \frac{1}{H} \left([I] - \frac{1}{H} [C'] S \mathcal{H}^T \right)^{-1} [C'] \dot{\sigma} = [C^p] \dot{\sigma} \quad (53)$$

$$\dot{\epsilon}^e = [C^e] \dot{\sigma}$$

El resto del análisis se realiza como se indicó anteriormente. Este enfoque provee también la posibilidad de incluir los cambios estructurales debido a grandes deformaciones dentro de la banda de cortante, por ejemplo fisuración desarrollada a través de planos paralelos que se giran subsecuentemente debido a la progresión del cortante.

El problema de procedimientos efectivos de análisis que tengan en cuenta el ablandamiento y la localización permanece aún abierto para investigaciones futuras. Se ha realizado mucho esfuerzo para determinar las condiciones de iniciación de las bandas de cortante, pero se ha trabajado menos en brindar soluciones de la propagación de tales bandas. El estudio analítico de la propagación de la banda de corte se inició por Palmer y Rice²⁰.

CONDICIONES DE INESTABILIDAD Y MODOS DE FALLA

Uno de los problemas más importantes desde el punto de vista práctico es la predicción de la carga máxima de falla y el modo de falla. Para un modelo de material elástico perfectamente plástico, la carga límite es un concepto bien definido y corresponde con un mecanismo de falla que se desarrolla bajo cargas estacionarias. El valor de esta carga límite no depende del estado de tensiones iniciales ni de la historia de la deformación. Por otra parte, este concepto no se cumple para los materiales que exhiben ablandamiento o ductibilidad limitada con rotura subsecuente. El valor de la carga máxima depende de las tensiones iniciales, velocidad de ablandamiento, y de las propiedades elásticas del material. Mas aún, una estructura puede poseer varias cargas máximas, y una vez que un elemento de la estructura falla, el proceso dinámico que continúa puede resultar en fallas consecutivas de los elementos restantes, conduciendo así a un mecanismo de falla a través de un modo dinámico.

Para ilustrar este fenómeno, consideremos el sistema simple de un grado de libertad que se muestra en la Figura 5.a. Dos elementos 1 y 2, se conectan en serie con la masa m agregada en su unión. El elemento 1 es linealmente elástico, Figura 5.b, mientras que el elemento 2 es no lineal e inelástico, presentando características de endurecimiento y ablandamiento que se muestran en la Figura 5.c. Indicando mediante u_1 , P_1 , y u_2 , P_2 los desplazamientos y fuerzas que actúan en los elementos 1 y 2, tenemos para el equilibrio estático

$$P_1 = P_2 = P, \quad u = u_1 + u_2 \quad (54)$$

La relación fuerza-desplazamiento entre la fuerza exterior y el desplazamiento es

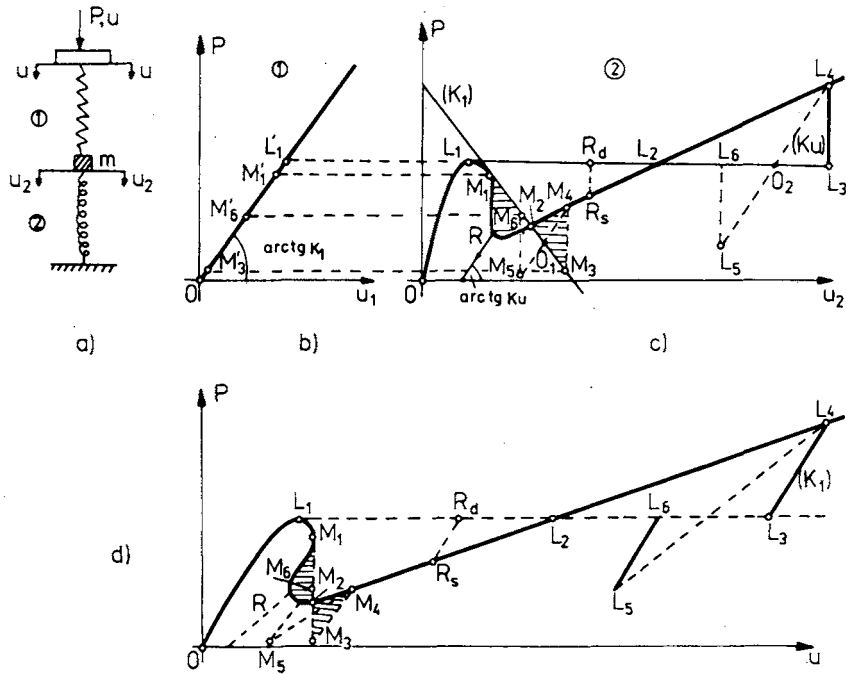


Figura 5. a) Sistema compuesto de resortes lineales y no lineales con ablandamiento. b,c) Curvas de carga-desplazamiento. d) Curva $P - u$ resultante.

$$P = \frac{K_1 K_2^s}{K_1 + K_2^s} u \quad (55)$$

donde K_1 es el módulo constante del elemento 1 y K_2^s es el módulo secante de las características $P = P(u_2)$ para el elemento 2. Para los incrementos ΔP y Δu desde un estado arbitrario P_i, u_i , tenemos

$$\Delta P = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \Delta u \quad (56)$$

donde K_2 es el módulo tangente de la curva $P = P(u_2)$ de la Figura 5.b, en el punto inicial u_i . Se ve que existe un punto límite L_1 para control de fuerzas para el cual $K_2 = 0, \Delta P/\Delta u = 0$, y el punto límite M_1 para control de desplazamientos donde $K_2 = -K_1, \Delta P/\Delta u = \infty$. El diagrama de equilibrio fuerza-desplazamiento que resulta para todo el sistema se muestra en la Figura 5.d. Se observa que en M_1 termina el proceso controlado por la carga estática y comienza el movimiento dinámico para P constante con el peso dinámico $L_1 - L_2 - L_3$. Análogamente, el proceso estático controlado por desplazamientos termina en M_1 y el peso dinámico subsecuente es $M_1 - M_2 - M_3$.

La ecuación de movimiento dinámico toma la forma

$$\left(\Delta P - \frac{K_1 K_2 - 2}{K_1 + K_2} \Delta u \right) + \frac{m}{K_1 + K_2} (\Delta \ddot{P} - K_1 \Delta \ddot{u}) = 0 \quad (57)$$

donde $\Delta\ddot{P}$ y $\Delta\ddot{u}$ son las segundas derivadas temporales. Para la carga especificada resulta $\Delta P = 0$ y (57) conduce a

$$m\Delta\ddot{u} = -K_2\Delta u = P - P_2 \quad (58)$$

donde P_2 es la fuerza en el elemento 2 durante el movimiento dinámico que comienza en L_1 . Llamando $\Delta\ddot{u} = \dot{v}$ obtenemos

$$m\Delta\ddot{u} = m\dot{v} = m \frac{dv}{du_2} \frac{du_2}{dt} = m \frac{dv}{du_2} v = P - P_2 \quad (59)$$

ya que $\Delta u_1 = 0$, $\Delta u = \Delta u_2$. Mediante integración de la (59), se llega a

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int (P - P_2) du_2 = \int_0^{u_k} (P - P_2) du \quad (60)$$

Esta ecuación permite realizar interpretaciones geométricas sencillas. Como el término independiente de (60) representa el área entre la línea $L_1 - L_2 - L_3$ y la curva de respuesta estática de la Figura 5.c, puede establecerse que la energía cinética adquirida sobre L_1L_2 es igual a éste área. Cuando $v_0 = 0$, termina el movimiento en L_3 para el que resultan iguales las áreas $L_1M_2L_2$ y $L_2L_3L_4$. En la Figura 5.d los puntos estático y dinámico correspondientes R_s y R_d están sobre la línea paralela a la línea $P - u_i$ en la Figura 5.b. El movimiento en sentido inverso comienza en L_3 . Suponiendo que la rigidez del elemento 2 durante la descarga es igual a K_u , la masa m ejecutará oscilaciones armónicas entre L_3 y L_6 de tal forma que resultan iguales las áreas $O_2L_3L_4$ y $O_2L_5L_6$.

Una situación similar sucede para la deformación del sistema controlada por los desplazamientos. Para desplazamientos fijos en el punto límite M_1 se cumple $\Delta u = \Delta u_1 + \Delta u_2 = 0$ y según (57) surge que

$$m\Delta\ddot{P} + \Delta P(K_1 + K_2) = 0 \quad (61)$$

La ecuación (61) define el proceso de relajación bajo desplazamientos exteriores constantes. Este proceso puede estudiarse en la Figura 5.c y 5.d. En la Figura 5.c, la deformación de 2 ocurre a través de la línea $M_1 - M_2 - M_3$ inclinada un ángulo $\tan^{-1}(K_1)$ respecto del eje u_2 . El movimiento termina en M_3 cuando las áreas M_1M_2R y $M_2M_3M_4$ son iguales. El movimiento oscilatorio que sigue ocurre entre M_3 y M_6 . En la Figura 5.d el proceso de relajación se realiza a través de la línea vertical $M_1 - M_2 - M_3$.

La Figura 6 presenta un sistema paralelo de dos elementos y sus características, lineales por partes, se muestran en la Figura 6.b y 6.c. Ya que $u_1 = u_2 = u$, $P = P_1 + P_2$, la curva estática es $P = (K_1 + K_2)u$. El comportamiento del sistema depende de 8 parámetros K_1^e , K_2^e , K_1^s , K_2^s , P_1^m , P_2^m y P_1^r , P_2^r . La Figura 6.d,e y f, muestra tres curvas de carga de flexión estática que son posibles para este sistema. En la Figura 6.d, después de alcanzar el punto 1, sucede el movimiento dinámico bajo carga constante y la energía cinética ganada iguala el área 1-2-2'. Si $E_{k1} > E_{k2}$, el sistema pasa a través del segmento 2'-3' donde el equilibrio estático es posible y produce la falla del segundo elemento. Desde el punto 3' continúa el movimiento acelerado. En la Figura 5.e, el

sistema se caracteriza mediante la desigualdad $E_{k1} < E_{k2}$, y el movimiento dinámico termina en 3' seguido de un movimiento oscilatorio alrededor de este punto. En la Figura 5.f el movimiento acelerado comienza en 1 y no hay un dominio de equilibrio sobre el paso dinámico.

Se ve así que el comportamiento del sistema depende mucho de la energía cinética ganada durante el primer período del movimiento, y de la energía de falla de elementos consecutivos. Aunque puedan obtenerse cargas estáticas mayores que P_3 en la Figura 6.d, la falla última sucede a un nivel de carga $P = P_1$. Tanto las fallas únicas o secuenciales de elementos pueden suceder en un modo dinámico.

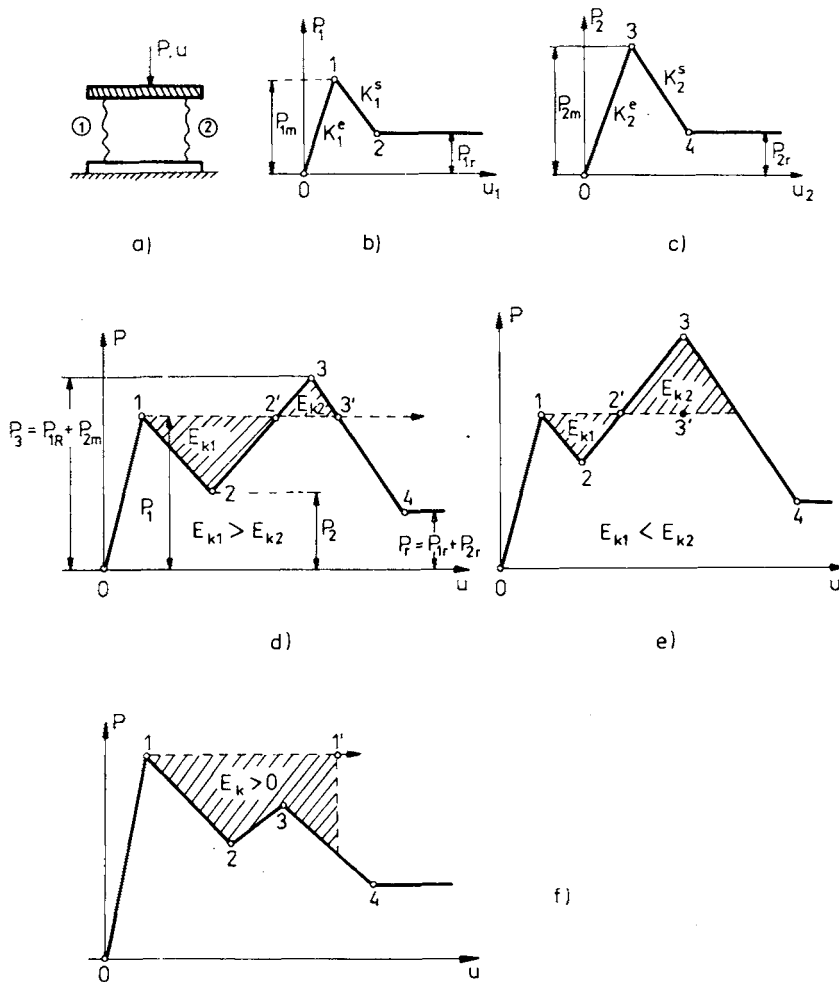


Figura 6. a) Sistema de tres elementos conectados en paralelo. b,c) con características de endurecimiento y ablandamiento. d,e,f) tres diagramas posibles $P - u$.

Estos ejemplos sirven como prototipos para problemas de inestabilidad y modos de falla más complejos como el de una excavación dentro de una masa rocosa. Consideremos el dominio V ocupado por roca y dos túneles, Figura 7, con tracciones

superficiales y desplazamientos especificados sobre el contorno, y los subdominios V_1 y V_2 , donde se supone que el subdominio V_1 corresponde a un comportamiento del material, elástico, o elastoplástico estable, y que el subdominio V_2 está en el estado postcrítico de ablandamiento, de forma que

$$\begin{aligned} d\sigma \cdot d\epsilon &= d\sigma \cdot d\epsilon^e + d\sigma \cdot d\epsilon^p > 0 & - \text{estabilidad} \\ d\sigma \cdot d\epsilon &= d\sigma \cdot d\epsilon^e + d\sigma \cdot d\epsilon^p < 0 & - \text{inestabilidad} \end{aligned} \quad (62)$$

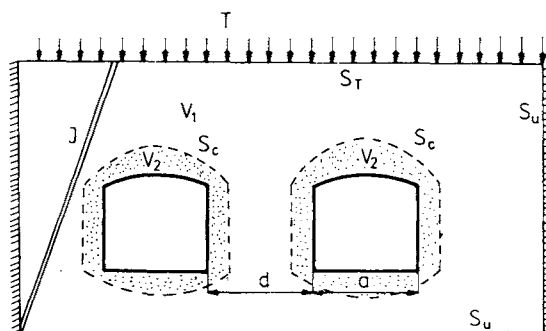


Figura 7. Dominio rocoso con dos túneles.

y para configuraciones arbitrarias apartadas del estado considerado resulta

$$\begin{aligned} U(\sigma_T - \sigma_s) &= \int_{\epsilon_s}^{\epsilon_T} (\sigma - \sigma_s) \cdot d\epsilon > 0 & - \text{estabilidad} \\ U(\sigma_T - \sigma_s) &= \int_{\epsilon_s}^{\epsilon_T} (\sigma - \sigma_s) \cdot d\epsilon \leq 0 & - \text{inestabilidad} \end{aligned} \quad (63)$$

Ya que $d\sigma \cdot d\epsilon^e > 0$ en los dos dominios, las siguientes desigualdades definen endurecimiento y ablandamiento

$$\text{endurecimiento : } d\sigma \cdot d\epsilon^p > 0, \quad \text{ablandamiento : } d\sigma \cdot d\epsilon^p < 0 \quad (64)$$

El estado presentado en la Figura (7) fue obtenido en un proceso cuasi-estático de excavación que resulta en una redistribución de tensiones y deformaciones a partir del estado inicial. Este proceso está controlado aquí no por las cargas o desplazamientos externos, sino por parámetros geométricos, tales como a , d , que define la configuración y el tamaño de la excavación.

Para examinar la inestabilidad de una configuración de equilibrio particular, introduzcamos una perturbación al sistema. Esta perturbación puede concebirse, por ejemplo, como un impulso adicional que se impone al campo de velocidades dentro del dominio, de tal forma que se satisfagan las condiciones de contorno. La perturbación también puede pensarse como un campo adicional de cuerpos de volumen, tracciones superficiales o velocidades de contorno que actúan sobre un período de tiempo especificado o como una súbita relajación del elemento. Con cada perturbación

la cantidad de energía suministrada al sistema puede asociarse y la estabilidad del movimiento siguiente que dependerán normalmente de esta energía.

Consideremos la perturbación en forma de un impulso dinámico superpuesto en el instante $t = t_0$ al estado de equilibrio, de forma que $\dot{\mathbf{u}}^0(x) = \mathbf{v}(x)$ en V en $t = t_0$ y la energía cinética del impulso resulta

$$\Delta K_0 = \int \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{v}^0 dV \quad (65)$$

donde ρ indica la densidad del material. Llamamos $\boldsymbol{\sigma}^0$, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, u_0 a los campos de tensión, deformación y desplazamiento respectivamente en $t = t_0$. Los valores siguientes para $t > t_0$ son

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \int_{t_0}^t \dot{\boldsymbol{\sigma}} dt, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \int_{t_0}^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dt, \quad u = u^0 + \int_{t_0}^t \dot{u} dt \quad (66)$$

y el movimiento que continúa es compatible con las condiciones de borde sobre S_T y S_u . El incremento de la energía potencial elástica $\Delta \Pi_e$ y del trabajo disipado ΔD se igualan

$$\Delta \Pi_t = \Delta \Pi_e + \Delta D = \int \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (67)$$

En vista del principio de conservación de la energía resulta

$$\Delta K_0 = \Delta \Pi_t + \Delta K(t) \quad (68)$$

donde $K(t)$ indica la energía cinética en el instante siguiente.

La inestabilidad divergente aparece cuando la energía cinética del movimiento crece monótonicamente. Para evitar esta inestabilidad la condición suficiente es

$$\Delta \Pi_t = \int \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} dV > 0 \quad (69)$$

para cualquier paso de deformación cinemáticamente admisible que se establezca desde la posición de equilibrio. La forma incremental de (69) resulta

$$d\Pi_t = \frac{1}{2} \int d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^e dV + \frac{1}{2} \int d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p dV > 0 \quad (70)$$

y se satisface obviamente para una parte estable de la curva de tensión-deformación.

Consideremos ahora el movimiento cíclico para el cual, a la descarga elástica le sigue una deformación plástica durante sucesivos movimientos inversos. Para el instante de la K -ésima inversión de (70), tenemos

$$\Delta \Pi_t^{(k)} = \Delta \Pi_e^{(k)} + \sum_{l=1}^k \Delta D^{(l)} = \int U^{(k)} (d\boldsymbol{\varepsilon}^e) dV + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^k (d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p)^{(l)} dV \quad (71)$$

donde $U(d\epsilon^e) = (\frac{1}{2}D^e d\epsilon^e \cdot d\epsilon^e)$ es la energía elástica incremental que puede aumentar o disminuir durante el movimiento cíclico, donde el segundo termino representa el trabajo plástico incremental acumulado. Supongamos que $d\sigma \cdot d\epsilon^p < 0$ es la respuesta de ablandamiento que sucede para flujo plástico incremental. Ya que el valor máximo $\Delta\Pi_t$ iguala ΔK_0 , entonces en vista de (71), la amplitud de la deformación elástica debe crecer en pasos consecutivos del movimiento, es decir $\Delta\Pi_e^{(k-1)} > \Delta\Pi_e^{(k)}$.

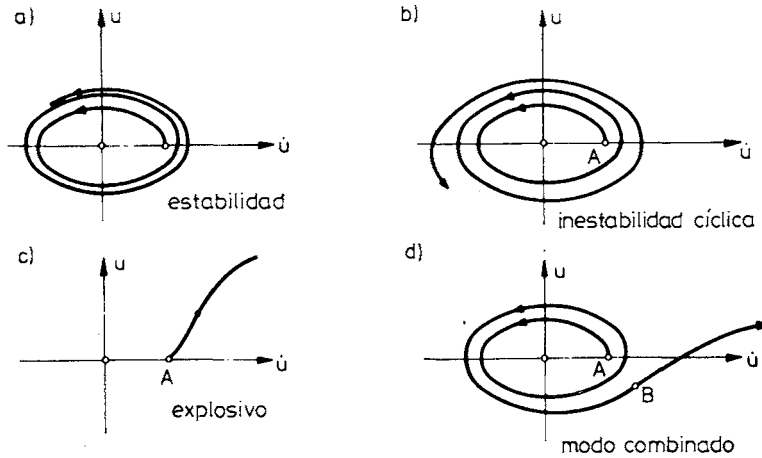


Figura 8. Modos estables e inestables posibles

Así, existe la posibilidad de inestabilidad cíclica para la que la amplitud del movimiento impuesto crecerá debido al flujo plástico repetitivo durante cada ciclo. Las Figuras 8.a-c presentan esquemáticamente los mecanismos de inestabilidad sobre el plano de fase (u, \dot{u}) , donde u indica los desplazamientos en un punto típico. También puede pensarse que un modo de inestabilidad puede suceder cuando despues de varios ciclos se viola la condición (70) y el movimiento sigue con energía cinética ilimitada.

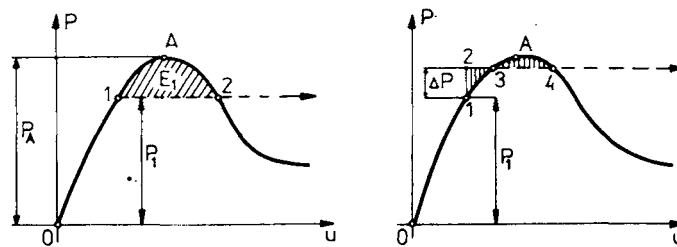


Figura 9. Equilibrio estático en el punto 1 con un escalón de carga o impulso superpuesto

Cuando existen juntas o planos de falla dentro del dominio V , la condición de estabilidad (70) toma la forma

$$\frac{1}{2} \int d\sigma \cdot d\epsilon dV + \frac{1}{2} \int d\tilde{T} \cdot d\tilde{u} dS_j > 0 \tag{72}$$

donde $d\tilde{T}$, $d\tilde{u}$ son los incrementos de tensiones de contacto y los desplazamientos de la discontinuidad de la junta.

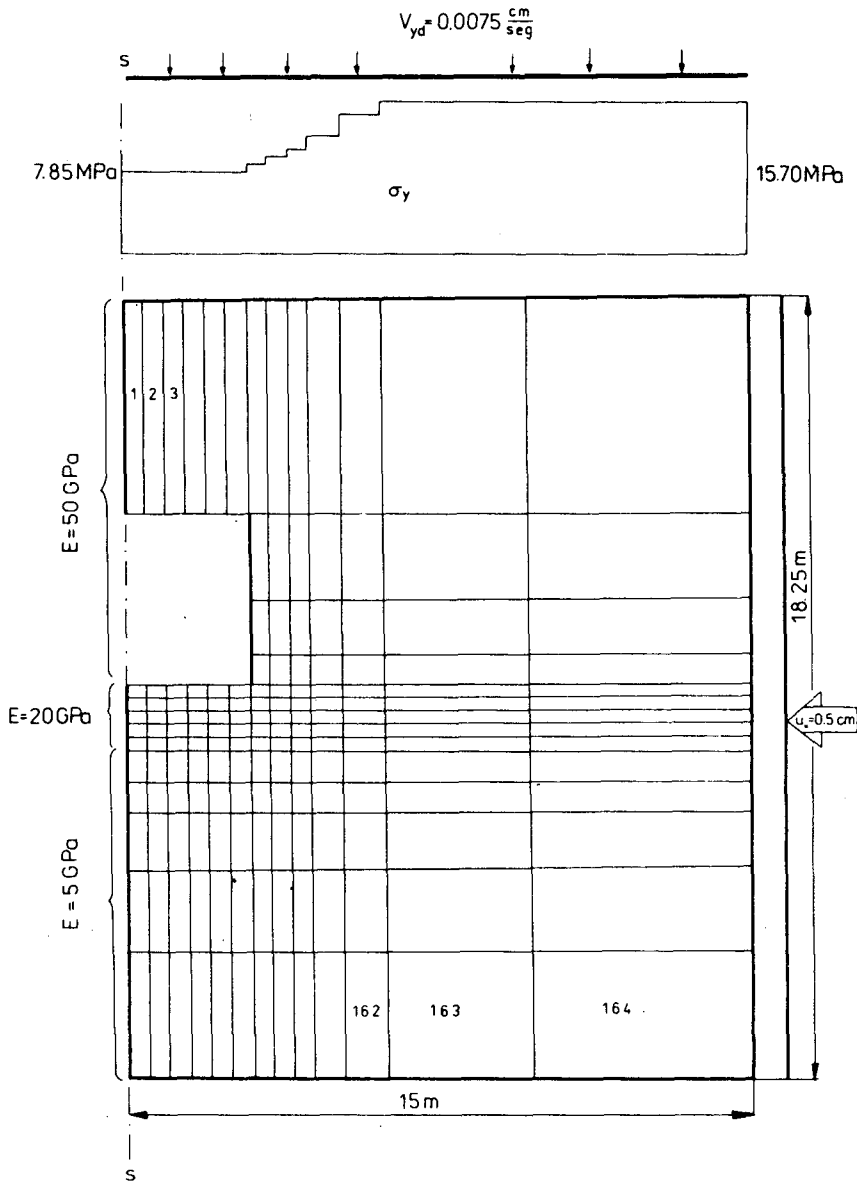


Figura 10. Túnel dentro de roca no homogénea.

La Figura 9 presenta esquemáticamente el enfoque propuesto a esta clase de problemas. Mientras que el punto de inestabilidad A es difícil de determinar; consideremos al estado de equilibrio antes del punto límite A e imponemos el impulso dinámico de la energía cinética $\Delta K_0 > E_1$. Partiendo desde el punto 1, el sistema pasará dinámicamente al punto de inestabilidad 2 con el crecimiento subsecuente de

la energía cinética (Figura 9.a). En la Figura 9.b, el movimiento dinámico se inicia mediante el paso de carga aplicada.

Adoptando este enfoque dinámico, varios ejemplos fueron resueltos por Zubelewicz y Mróz³¹. Consideremos por ejemplo, un túnel rectangular horizontal dentro de la roca inhomogénea. La roca rígida está separada de la roca blanda mediante una capa horizontal de rigidez intermedia, como muestra la Figura 10. Consideremos el dominio de solución que se muestra en la Figura 10 donde el estado estático inicial corresponde a una tensión vertical uniforme σ_y aplicada en el borde superior y desplazamientos horizontales $u_x = 0,5cm$ en el borde vertical derecho, con el borde inferior fijo. La solución dinámica correspondiente muestra el modo de rotura. La Figura 11 muestra la variación de la velocidad de crecimiento de la energía cinética y la Figura 12 muestra la progresión de las zonas dañadas en los instantes 1,2,3 mostradas en la Figura 12. El modo de falla se muestra esquemáticamente en la Figura 13. Durante la acción de la tensión en la determinación entre la capa intermedia y la roca blanda con liberación de la energía asociada y la rotura de la capa. El material dañado es empujado dentro del tunel exhibiendo el efecto familiar de la roca reventada. Las condiciones de estabilidad estática para la excavación fueron discutidas por Petukchov y Linkov²¹ mediante la consideración del movimiento virtual de la superficie que separa los subdominios V_1 y V_2 .

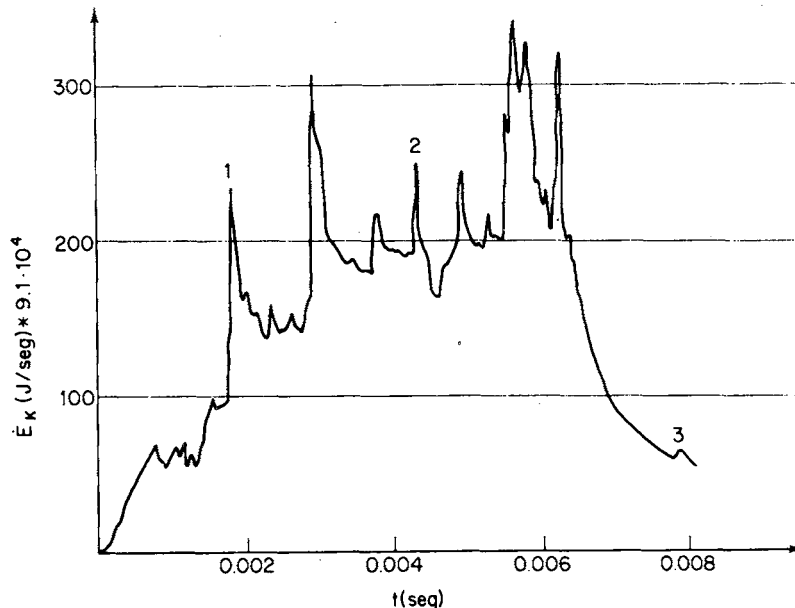


Figura 11. Velocidad de variación de energía cinética con el tiempo después de un impulso impuesto.

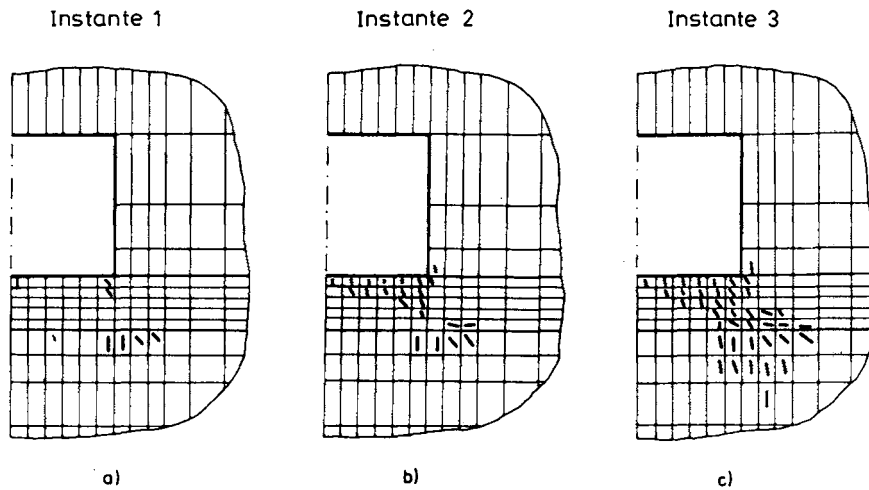


Figura 12. Crecimiento de la zona dañada cerca del túnel.

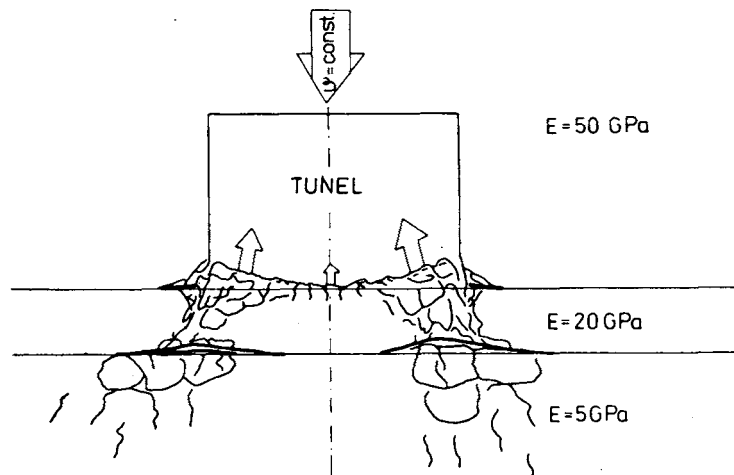


Figura 13. Esquema del modo de falla.

CONCLUSIONES

Los problemas actuales en geomecánica, así como otros nuevos, surgen del esquema de análisis inelástico mostrado en la Figura 1. Los desarrollos futuros deberían provenir de ambos lados de la pared, es decir desde la investigación y desde los métodos de diseño. Sin embargo, claramente se observa en la Figura 1 que los esfuerzos de investigación actuales no están distribuidos equitativamente entre los diferentes bloques, y que además la aplicabilidad del análisis inelástico depende mucho de futuros desarrollos en áreas no discutidas en este trabajo. Mencionemos brevemente los problemas más importantes que deben resolverse desde el punto de vista del rendimiento del sistema.

- i) Debería lograrse una formulación uniforme de los modelos constitutivos que

- incluya efectos de daño, plasticidad y fractura. Se deberían describir tanto los rangos de deformación estables como los inestables, incluyendo el fenómeno de localización. Cuando el concepto de modos de falla dinámica sea esencial, la descripción constitutiva debería incluir los efectos de degradación y deformación dependientes de la velocidad.
- ii) Los análisis de sensibilidad y de identificación debieran proporcionar no sólo los parámetros del modelo sino también una valoración de las imperfecciones del sistema a escala real, y la sensibilidad de las predicciones del modelo con respecto a la variación de parámetros e imperfecciones. El dominio de aplicación del modelo debería especificarse mediante ensayos de laboratorio y mediante la aplicación del modelo a problemas elegidos correctamente.
- iii) La comprensión fundamental de los modos de falla en sistemas geotécnicos debiera alcanzarse mediante la aplicación del análisis inelástico a diferentes problemas, incluyendo tanto cargas estáticas como dinámicas con los efectos asociados de licuefacción en suelos o estabilidad dinámica en rocas. Se necesita una nueva teoría de falla, o de estado límite, en la que se incluyan los efectos de ductilidad limitada y velocidad de ablandamiento para determinar la carga crítica y los modos de falla.

REFERENCIAS

1. Z.P. Bažant, "Instability, ductility, and size effect in strain softening concrete", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. **102**, EM2, pp. 331-334, (1976).
2. Z.P. Bažant y L. Cedolin, "Blunt crack band propagation in finite element analysis", *J. Eng. Mech. Div.*, Vol **105**, EM2, pp. 297-315, (1979).
3. Z.P. Bažant y S.S. Kim, "Plastic-fracturing theory for concrete", *J. Eng. Mech. Div., Proc.*, ASCE, Vol. **105**, pp. 429-446, (1979).
4. J.L. Chaboche, J. Lemaitre, D. Marquis y S. Savalle, "Discussion on problems of models identification", *Proc. IUTAM Simp. en "Physical non-linearities in structural analysis"*, Eds. J. Hult y J. Lemaitre, Springer Verlag, pp. 37-51, (1981).
5. M.P. Cleary, "Fracture discontinuities and structural analysis in resource recovery endeavors", *J. Press. Vess. Petr. Techn.*, Vol. **100**, pp. 1-11, (1978).
6. J.W. Dougill, "On stable progressive fracturing solids", *Zeitschr. Ang. Math. Phys.*, Vol. **27**, pp. 423-437, (1976).
7. A. Dragon y Z. Mróz, "A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. **17**, pp. 121-137, (1979a).
8. A. Dragon y Z. Mróz, "A model for plastic creep of rock-like materials accounting for the kinetics of fracture", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geom. Abstr.*, Vol. **16**, pp. 253-259, (1979b).
9. D.C. Drucker, "A more fundamental approach to plastic stress-strain relations", *Proc. 1st US Nat. Congr. Appl. Mech.*, pp.487-491, (1951).
10. P. Eykhoff, "*System Identification Parameter and State Estimation*", John Wiley, (1974).
11. R. Hill, "A General theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. **6**, pp. 236-249, (1958).
12. A.A. Ilyushin, "*Plasticity*", Moscú, (1964).
13. G. Maier y T. Hueckel, "Non-associated and coupled flow rules of elastoplasticity", *Int. J.*

- Rock. Mech. Min. Sci. and Geom. Abstr.*, Vol. **16**, pp. 77-92, (1979).
14. Z. Mróz, "Non-associated flow laws in plasticity", *J. de Mecanique*, Vol. **2**, pp. 21-42, (1963).
 15. Z. Mróz, "On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids", *Arch. Mech. Stos.*, Vol. **18**, pp. 3-35, (1966).
 16. Z. Mróz, "On Hypoelasticity and plasticity approaches to constitutive modelling of inelastic behaviour of soils", *J. Num. Anal. Meth. Geom.*, Vol. **4**, pp. 45-55, (1980).
 17. Z. Mróz y M. Angelillo, "Rate-dependent degradation model for concrete and rock", *Proc. Intern. Symp. "Numerical Models in Geomechanics"*, Ed. R. Dungar et. al., A.A. Balkema Publ., pp. 208-217, (1982).
 18. Z. Mróz y V.A. Norris, "Elastoplastic and viscoplastic constitutive models for soils with application to cyclic loading", *Soil Mechanics-Transient and Cyclic loads*, Eds. G.N. Pande y O.C. Zienkiewicz, John Wiley, pp. 173-217, (1982).
 19. Z. Mróz y O.C. Zienkiewicz, "Uniform formulation of constitutive equations for clays and sands", *Constitutive Models for Engineers Materials*, Ed. C.S. Desai, John Wiley, (1983).
 20. A.C. Palmer y J.R. Rice, "The growth of slip surfaces in the progressive failure of overconsolidated clay", *Proc. Roy. Soc., Ser. A.*, Vol. **332**, pp. 527-548, (1973).
 21. I.M. Petukhov y A.M. Linkov, "The theory of post-failure deformations and the problem of stability in rock mechanics", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geom. Abstr.*, Vol. **16**, pp. 57-76, (1979).
 22. S. Pietruszczak y Z. Mróz, "Finite element analysis of deformation of strain softening materials", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **17**, pp. 327-334, (1981).
 23. S. Pietruszczak y Z. Mróz, "On hardening anisotropy of K_0 -consolidated clays", *Int. J. Num. Anal. Meth. in Geom.*, Vol. **7**, pp. 19-38, (1983).
 24. K.S. Pister, "Some thoughts on the material identification problem", *Proc. "Workshop on Applied Thermoviscoplasticity"*, Ed. S. Nemat-Nasser, Northwestern University Press, Evanston, Illinois, (1975).
 25. W. Prager, "Recent developments in the mathematical theory of plasticity", *J. Appl. Phys.*, Vol. **20**, pp.235-241, (1949).
 26. J.H. Prevost y K. Hoeg, "Soil mechanics and plasticity of strain softening", *Geotechnique*, Vol. **25**, pp. 279-297, (1975).
 27. B. Raniecki, "Uniqueness criteria in solids with non-associated plastic flow laws at finite deformations", *Bull. Ac. Pol. Sci. Ser. Sci. Techn.*, Vol. **27**, pp. 391-399, (1979).
 28. J.R. Rice, "The localization of plastic deformation", *Proc. 14th IUTAM Cong. on Theoret. Appl. Mech.*, Ed. W.T. Koiter, North-Holland, Amsterdam, pp.207-220, (1976).
 29. J.W. Rudnicki y J.R. Rice, "Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials", *J. Mech. Phys. sol.*, Vol. **23**, pp.371-394, (1975).
 30. P.A. Vermeer, "Formulation and analysis of sand deformations problems", *Delft University Techn. Rep. No. 195*, Geotechn. Lab., (1980).
 31. O.C. Zubelewicz y Z. Mróz, "Numerical simulation of rock-burst processes treated as problems of dynamic instability", *Rock. Mech.*, (1983).