M. COMÍN
R. DEJOZ
J. L. PERIS
C. ATIENZA
J. PRAT
P. VERA

Conceptos básicos de mecánica en biomecánica

Basic concepts of mechanics in biomechanics

Introducción

La *biomecánica* puede definirse como el conjunto de conocimientos interdisciplinares generados a partir de utilizar, con el apoyo de otras ciencias biomédicas, los conocimientos de la *mecánica* y distintas tecnologías en, primero, el estudio del comportamiento de los sistemas biológicos y, en particular, del cuerpo humano, y segundo, en resolver los problemas que le provocan las distintas condiciones a las que puede verse sometido.

En esta definición han de subrayarse algunas ideas:

1. Que a la biomecánica le compete el estudio de todos los fenómenos biológicos y, por una evidente e interesada cuestión de antropocentrismo, del cuerpo humano en especial.
2. Que la mecánica, con un amplio apoyo tecnológico, posee métodos propios que pueden aplicarse al estudio de los seres vivos.
3. Que la biomecánica se ha desarrollado porque aporta un enfoque útil en el estudio y solución de los problemas que afectan al hombre —de lo contrario, probablemente, no estaríamos ocupándonos de ella con tanto interés.

Con la intención de divulgar los *conceptos básicos de la mecánica que se utilizan en biomecánica* ha sido elaborada la información que seguidamente ofrecemos. Se trata de conceptos elementales de mecánica ineludiblemente incluidos en cualquier texto básico y que cualquier estudioso de la biomecánica debe dominar si pretende enfrentarse a la literatura especializada en este área de conocimiento. Los conceptos que a continuación se presentan son imprescindibles, aunque no suficientes; trabajar en biomecánica exige, dada su profunda naturaleza interdisciplinar, manejar muchos otros conceptos y técnicas de análisis. En cualquier caso sirva esta información básica para facilitar a quienes no están habituados a desenvolverse en este campo una serie de conocimientos esenciales.

Tabla I. Resumen de las unidades fundamentales y derivadas de los sistemas físicos

Magnitud	SI	CGS	MTS
Longitud	Metro (m)	Centímetro (cm)	Metro (m)
Masa	Kilogramo (kg)	Gramo (g)	Tonelada (tn)
Tiempo	Segundo (s)	Segundo (s)	Segundo (s)
Velocidad	m/s	cm/s	m/s
Fuerza	Newton (N)	Dina (din)	Steno (sn)
Momento	N·m	Din·c	Sn·m
Trabajo	Julio (J)	Ergio (erg)	Sn·m
Potencia	Watio (W)	Erg/s	kW
Presión	Pascal (Pa)	Bar	Pieza (pz)
Densidad	kg/m^3	g/cm^3	Ton/m^3

Conceptos generales

Magnitudes escalares y vectoriales

Se denomina magnitud a cualquier ente físico (masa, velocidad, etc.) que se puede medir. Para representar la cantidad de determinada magnitud se emplean las unidades. En España se emplea como sistema de unidades el sistema internacional (SI), que tiene como magnitudes fundamentales la longitud, la masa y el tiempo, en función de las cuales pueden expresarse todas las demás. Las unidades en las que se miden dichas magnitudes son el metro (m) para la longitud, el kilogramo (kg) para la masa y el segundo (s) para el tiempo.

Además del SI existen otros sistemas de unidades, entre los que cabe señalar:

— *CGS:* Las unidades fundamentales son las mismas que el SI, excepto la de longitud, que es el centímetro (cm).
— *MTS:* La unidad fundamental de masa utilizada por este sistema es la tonelada (tn = 10^3 kg).
— *Sistema inglés (FPS, Foot, Pound, Second):* Utiliza como unidades fundamentales el pie, la libra y el segundo.

En la tabla I se resumen las unidades fundamentales y derivadas de los sistemas enumerados.

Tabla II. Múltiplos y submúltiplos de la unidad

Prefijo	Símbolo	Factor multiplicativo
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Mega	M	10^{6}
Kilo	k	10^{3}
Hecto	H	10^{2}
Deca	Da	10
Deci	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
Mili	m	10^{-3}
Micro	µ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}

Para numerosas aplicaciones es más cómodo utilizar múltiplos o submúltiplos de dichas unidades, cuya denominación se obtiene colocando un prefijo, cuyos símbolos y significados se resumen en la tabla II.

Las magnitudes se pueden clasificar en 2 tipos: escalares y vectoriales. Las *magnitudes escalares* son aquellas que quedan perfectamente determinadas por su valor numérico, tales como la masa de un cuerpo, su temperatura, etc. En cambio, otras magnitudes para que resulten definidas precisan, además de su valor numérico, también su dirección, sentido y punto de aplicación. Esta clase de magnitudes se denominan *magnitudes vectoriales* y se representan gráficamente por un ente matemático denominado vector. Ejemplos de magnitudes vectoriales son la fuerza que actúa sobre un cuerpo y su velocidad.

Sistema de coordenadas

Para definir un vector en el espacio es necesario referirlo a un *sistema de coordenadas.* Principalmente son 3 los sistemas de coordenadas utilizados: el cartesiano, el cilíndrico y el esférico (Fig. 1). El sistema de coordenadas *cartesiano,* que es el más utilizado, está formado por 3 ejes perpendiculares entre sí que se cortan en un punto común que se denomina *origen de coordenadas.* Las 3 coordenadas de un punto son las distancias en perpendicular a cada uno de los planos del sistema. El sistema de coordenadas *cilíndrico* se utiliza para cuerpos con simetría cilíndrica y sus 3 coordenadas son un ángulo y 2 distancias. El sistema de referencia esférico se utiliza para localizar puntos en cuerpos con simetría *esférica* (como la Tierra) y las 3 coordenadas son 2 ángulos y una distancia.

Concepto de fuerza

Una vez revisados los conceptos básicos de magnitudes escalares y vectoriales vamos a definir una de las magnitudes más importantes dentro de la mecánica: la fuerza.

Intuitivamente, el concepto de fuerza corresponde a la acción que se realiza al «empujar» o «tirar» de un cuerpo con objeto de modificar su posición o movimiento, pero en realidad la *fuerza* es siempre una acción mutua que se ejerce entre 2 cuerpos (fuerzas externas) o entre 2 partes de un mismo cuerpo (fuerzas internas). En estática diremos que una fuerza es todo aquello capaz de producir deformaciones en un cuerpo, mientras que en dinámica una fuerza es aquello capaz de variar la velocidad de un cuerpo (Fig. 2). Para que aparezca una fuerza entre 2 cuerpos no siempre es necesario que los cuerpos estén en contacto. Entre estas fuerzas que tienen lugar «a distancia» podemos señalar la fuerza gravitatoria (o peso) y las fuerzas electromagnéticas.

La unidad fundamental de la magnitud fuerza en el SI es el Newton (N), que se define como la fuerza necesaria para que una masa de 1 kg experimente una aceleración de 1 m/s^2.

Las fuerzas son magnitudes de naturaleza vectorial, ya que para determinarlas no basta su valor, sino que además es necesario conocer su dirección y su sentido. Por tanto se representarán como vectores y se tratarán como tales.

Las fuerzas se pueden clasificar, en función de su módulo, en:

— *Constantes:* Son aquellas cuyo módulo no varía con el tiempo.
— *Variables:* Su módulo varía con el tiempo, siguiendo una determinada función.

Si atendemos a su punto de aplicación se pueden clasificar en:

— *Concentradas:* Se consideran aplicadas en un punto; por ejemplo, la fuerza realizada al tirar de un cuerpo con una cuerda.

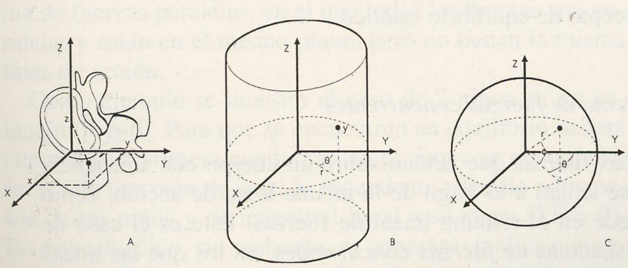

FIG. 1.—Sistemas de coordenadas tridimensionales. A: Cartesiano. B: Cilíndrico. C: Esférico.

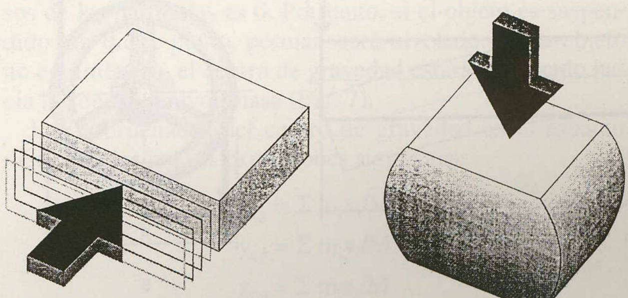

FIG. 2.—Concepto de fuerza.

— *Distribuidas:* Se consideran distribuidas a lo largo de una longitud o superficie; por ejemplo, la fuerza del viento sobre un edificio.

De acuerdo con el *principio de acción y reacción,* a toda fuerza que actúa sobre un sólido (acción) le corresponde una fuerza que se opone a la anterior y de su misma magnitud, denominada reacción.

Por último se define la *resultante de un sistema de fuerzas* como la suma vectorial de todas y cada una de ellas.

Concepto de momento

Cuando una fuerza ***F*** está actuando a una cierta distancia *d* de un punto se crea un momento ***M*** de valor:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \times d$$

La unidad del momento en el SI es el N · m.

Cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza en un punto distinto a su punto de apoyo se dice que está sometido a un *momento de flexión* o *momento flector.* Cuando sobre el cuerpo actúan 2 fuerzas iguales y de sentidos opuestos y separadas una distancia *d* determinada se dice que el cuerpo está sometido a un *momento de torsión o momento torsor* (Fig. 3).

Estática

Nuestra noción intuitiva de equilibrio no es completa. En general se dice que un cuerpo está en equilibrio cuando no se mueve, es decir, cuando está en reposo, pareciendo que este equilibrio resulte debido a la ausencia de causas que pudieran originar movimientos.

Por ello, el *equilibrio* debe definirse como el estado que poseen los cuerpos cuando la resultante de las fuerzas y los momentos actuantes son 0.

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$
$$\Sigma \mathbf{M} = 0$$

Las 2 ecuaciones anteriores constituyen las 2 condiciones de equilibrio.

La *estática* es la parte de la física que estudia los cuerpos en equilibrio estático como resultado de las fuerzas

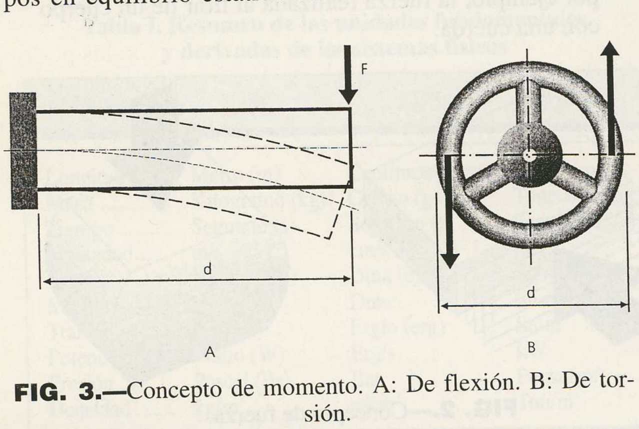

FIG. 3.—Concepto de momento. A: De flexión. B: De torsión.

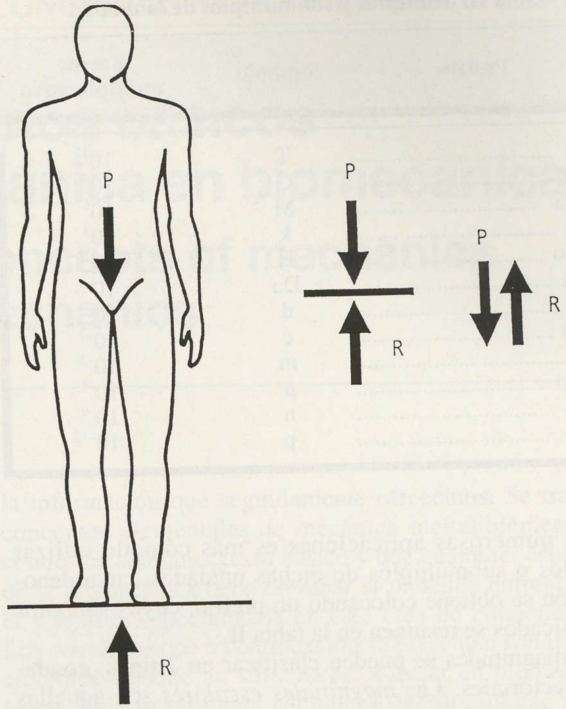

FIG. 4.—Equilibrio estático en un sistema de fuerzas lineal

que actúan sobre él. Vamos a ver cómo se alcanza el equilibrio estático en diferentes sistemas de fuerzas.

Primera condición de equilibrio estático

Sistema lineal de fuerzas

El caso del *sistema lineal de fuerzas* es el más sencillo. Se dice que un sistema de fuerzas es lineal cuando todas las fuerzas que actúan son colineales. En este caso el equilibrio se alcanza cuando la suma de las fuerzas que actúan en un sentido es igual a la de las fuerzas que actúan en el sentido opuesto, es decir, cuando la resultante de las fuerzas del sistema es 0.

Un ejemplo de sistema lineal de fuerzas lo componen el peso *P* de un individuo en pie y la fuerza de reacción *R* que ejerce el suelo sobre él (Fig. 4). El sistema lineal, aunque es demasiado simple, es interesante para clarificar el concepto de equilibrio estático.

Sistema de fuerzas concurrentes

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo con frecuencia no se sitúan a lo largo de la misma línea de acción, como sucede en el sistema lineal de fuerzas. Este es el caso de los sistemas de *fuerzas concurrentes,* en los que las líneas de acción de todas las fuerzas se cortan en un punto.

Como ejemplo puede mostrarse un bloque sobre un plano inclinado sujeto mediante una cuerda (Fig. 5). En este

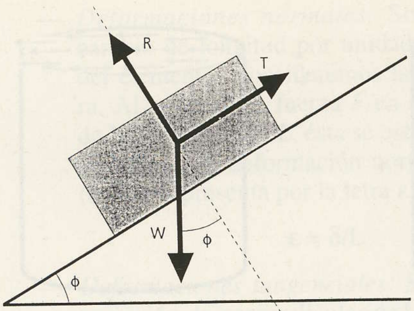

FIG. 5.—Sistema de fuerzas concurrentes.

caso las 3 fuerzas que actúan sobre el bloque son: su peso W, la reacción del suelo sobre el bloque R y la tensión de la cuerda T, despreciando la fuerza de rozamiento. La primera condición de equilibrio estático ($\Sigma F = 0$) nos conduce a plantear las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma Fx = 0$$

$$\Sigma Fx = Wx + Tx + Rx = 0$$

siendo x la dirección paralela al plano inclinado. Puesto que la fuerza de reacción es perpendicular a este plano y la tensión de la cuerda es paralela al mismo, la ecuación anterior se puede escribir:

$$T + Wx = T + W \operatorname{sen} \phi$$

$$T = -W \operatorname{sen} \phi$$

Planteando la primera condición de equilibrio en la dirección perpendicular al plano, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\Sigma Fy = 0$$

$$\Sigma Fy = R + W \cos \phi = 0$$

$$R = -W \cos \phi$$

Segunda condición de equilibrio estático

Sistema de fuerzas paralelas

En los sistemas vistos con anterioridad todas las líneas de acción de las fuerzas se cortaban en un punto. En general esto no suele ocurrir. En ese caso las fuerzas producen una rotación alrededor de un punto estacionario.

El ejemplo más simple de este tipo de fuerzas es el sistema de fuerzas paralelas, en el que todas las fuerzas son paralelas y están en el mismo plano, pero no tienen la misma línea de acción.

Como ejemplo se muestra el caso de 2 niños en un balancín (Fig. 6). Para que se encuentren en equilibrio deberá cumplirse la primera condición: en el apoyo se genera una fuerza de reacción de sentido ascendente paralela a los pesos de los niños y de magnitud igual a su suma ($\Sigma F = 0$). En esta situación, sin embargo, es necesario incluir una segunda condición de equilibrio. Una fuerza que actúa sobre un sólido a cierta distancia de un punto fijo tiende a producir la rotación del cuerpo. Como vemos en la figura, el peso B tiende a hacer girar el balancín en el sentido de las agujas del reloj, mientras que el A tiende a hacerlo girar en sentido opuesto. Además, cada uno de los pesos está aplicado a una distancia a y b del apoyo. La distancia del punto de aplicación de la fuerza al punto de rotación se denomina *brazo de palanca* y al producto de la fuerza F realizada por la distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza hasta el punto de apoyo d con la que actúa se le conoce con el nombre de *momento de la fuerza M*:

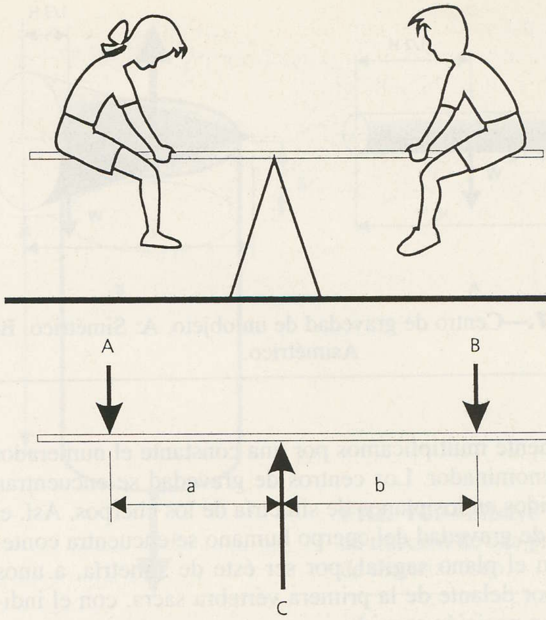

FIG. 6.—Sistema de fuerzas paralelas.

$$M = F \cdot d$$

Centro de gravedad

El centro de gravedad es un punto ficticio en el que se puede suponer concentrada toda la masa del cuerpo. Si suponemos un objeto formado por un número N determinado de partículas de masa m_i, la línea de acción de la fuerza resultante de la suma de todos los pesos (peso total del objeto M) pasa a través de un punto, alrededor del cual la suma de todos los momentos producidos por cada uno de los pesos de las partículas es 0. Por tanto, si el objeto es suspendido por dicho punto, permanecerá nivelado. Si un objeto no es simétrico, el centro de gravedad estará localizado hacia la zona de mayor masa (Fig. 7).

Las coordenadas del centro de gravedad en el espacio vienen dadas por las expresiones siguientes:

$$x_{cg} = \Sigma\, m_i x_i / M$$

$$y_{cg} = \Sigma\, m_i y_i / M$$

$$z_{cg} = \Sigma\, m_i z_i / M$$

Las expresiones anteriores son igualmente correctas si en vez de emplear masas se emplean los pesos, puesto que

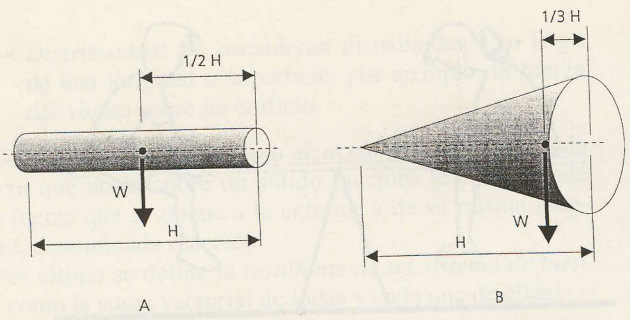

FIG. 7.—Centro de gravedad de un objeto. A: Simétrico. B: Asimétrico.

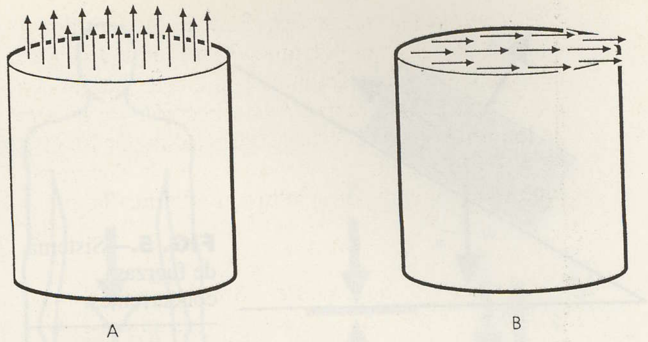

FIG. 8.—Tensiones. A: Normales. B: Tangenciales.

únicamente multiplicamos por una constante el numerador y el denominador. Los centros de gravedad se encuentran contenidos en los planos de simetría de los cuerpos. Así, el centro de gravedad del cuerpo humano se encuentra contenido en el plano sagital, por ser éste de simetría, a unos 4 cm por delante de la primera vértebra sacra, con el individuo en posición erguida.

Ciencia de materiales

La ciencia de materiales estudia los valores de las fuerzas internas (tensiones) y las deformaciones que experimenta un cuerpo al ser sometido a cargas mecánicas (fuerzas y momentos).

Concepto de tensión y deformación

Tensión

Cuando se aplican fuerzas o momentos sobre un objeto sólido de forma estática, es decir, cuando existen restricciones que no permiten su movimiento, éste se deforma. Para caracterizar la intensidad de las fuerzas internas producidas por las cargas aplicadas se define la *tensión* como la fuerza actuante por unidad de superficie. La unidad en la que se expresan las tensiones en el sistema internacional (SI) es el Pascal (Pa), que corresponde a una fuerza de un Newton aplicada sobre una superficie de un metro cuadrado (N/m^2). El Pascal es una unidad muy pequeña, empleándose, en la práctica, múltiplos de ésta como el kilopascal (kPa = 10^3 Pa) y el megapascal (MPa = 10^6 Pa). También está ampliamente extendida la utilización del kgf/cm^2 (o kg/cm^2).

Existen 2 tipos de tensiones (Fig. 8):

— *Tensiones normales:* Son aquellas en las que la fuerza actuante es perpendicular a la superficie sobre la que actúa, es decir, que tienden a estirar o aplastar los cuerpos.

— *Tensiones tangenciales o de cizalladura:* Son aquellas en las que la fuerza actuante es paralela a la superficie, es decir, que tienden a distorsionar la forma de los cuerpos.

Las tensiones normales se denominan con la letra griega σ y las tangenciales (o de cizalladura) por la letra τ.

Para que el estado de tensiones en un punto de un cuerpo esté completamente definido es necesario conocer 2 tensiones normales (σ_x y σ_y) y una tensión tangencial (τ_{xy}) si el punto pertenece a la superficie y 3 tensiones normales y 3 tangenciales si el punto está en el interior del cuerpo.

Deformación

Para representar el grado de deformación de un elemento se utilizan las *deformaciones unitarias* (en general se denominan únicamente deformaciones). Estas deformaciones son también, como en el caso de las tensiones, de 2 tipos (Fig. 9):

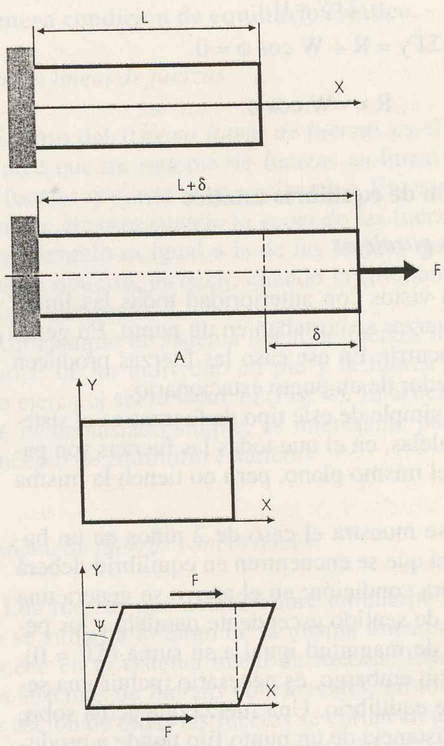

FIG. 9. Deformaciones. A: Normales. B: Tangenciales.

— *Deformaciones normales:* Son las que miden el cambio de longitud por unidad de longitud original del elemento. Consideremos la situación de la figura. Al aplicar una fuerza *F* en dirección *x* a la barra de longitud inicial *L*, ésta se estira hasta una longitud de $L + \delta$. La deformación normal en la dirección *x* (que se representa por la letra ε) se define como:

$$\varepsilon = \delta/L$$

— *Deformaciones tangenciales:* Son las que miden la variación de perpendicularidad de las superficies laterales del elemento, es decir, la distorsión sufrida por el mismo. Consideremos el paralelogramo de la figura. Los lados son perpendiculares 2 a 2 y, por tanto, el ángulo formado por las caras verticales y las horizontales es 0. Al someter al elemento a una fuerza tangencial (o de cizalladura), 2 de sus caras pierden la perpendicularidad, quedando un paralelogramo no rectangular. Se define la deformación tangencial γ como la mitad del ángulo ψ (expresado en radianes) que forman las caras del paralelogramo

$$\gamma = \psi/2$$

Las deformaciones unitarias, tal y como están definidas, son adimensionales y se expresan en microdeformaciones —*microstrains*— (με), que corresponde a una deformación de 10^6 mm por cada milímetro.

Por un punto de una estructura sometida a cargas mecánicas pueden pasar innumerables planos en varias direcciones. En cada uno de estos planos hay tensiones normales y tensiones tangenciales, con proporciones variables de cada una de ellas. Pues bien, siempre es posible encontrar 3 planos, que son mutuamente perpendiculares, en los que las deformaciones tangenciales son nulas y, por tanto, sólo están sometidas a tensiones normales y, además, éstas alcanzan sus valores máximos. Dichos planos se denominan *planos principales.* En una superficie dichos planos se reducen a 2 direcciones, perpendiculares entre sí, que se denominan *direcciones principales.* Las tensiones normales correspondientes a dichos planos se denominan *tensiones principales.*

Del mismo modo existen 2 direcciones donde la tensión tangencial es máxima. Estas direcciones forman un ángulo de 45° con las direcciones principales.

Carga axial. Diagrama de tensión-deformación

Para conocer el comportamiento de los materiales es útil estudiar una estructura regular, de forma conocida, sometida a unas condiciones de carga bien definidas. Así, el ensayo universalmente aceptado para la determinación de las propiedades mecánicas de un material es el ensayo de tracción. Como ejemplo veamos cómo se realizaría un ensayo de tracción de hueso trabecular de un cuerpo vertebral. Se toma una muestra del material y se le da una forma regular (sección constante de área *A* y longitud *L*). Dicha muestra, a la que llamaremos probeta, es sometida a una fuerza de tracción de valor *F* aplicada en la dirección de su eje longitudinal (Fig. 10) hasta llegar a la rotura.

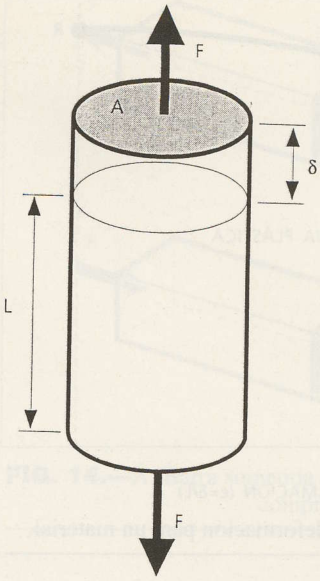

FIG. 10.—Ensayo de tracción de una probeta de material óseo.

Al aumentar la fuerza *F* la probeta comienza a alargarse. Esta situación puede asimilarse al fenómeno de alargamiento de un muelle al que se le aplica una fuerza. La ecuación que define el fenómeno es:

$$F = K \cdot \delta$$

donde *F* es la fuerza aplicada, δ el alargamiento y *K* la rigidez.

Si representamos la variación de la fuerza aplicada frente al alargamiento experimentado δ, para probetas con secciones de tamaños diferentes obtenemos curvas distintas (Fig. 11).

La pendiente de la parte inicial de cada una de las curvas es lo que se conoce como *rigidez estructural* de la probeta (de valor *K*), que como se observa depende de la geometría de la misma y representa cuánto se deforma la pro-

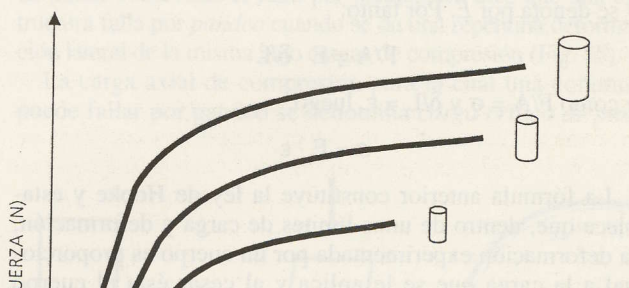

FIG. 11.—Diagrama fuerza-alargamiento para diferentes probetas de material óseo.

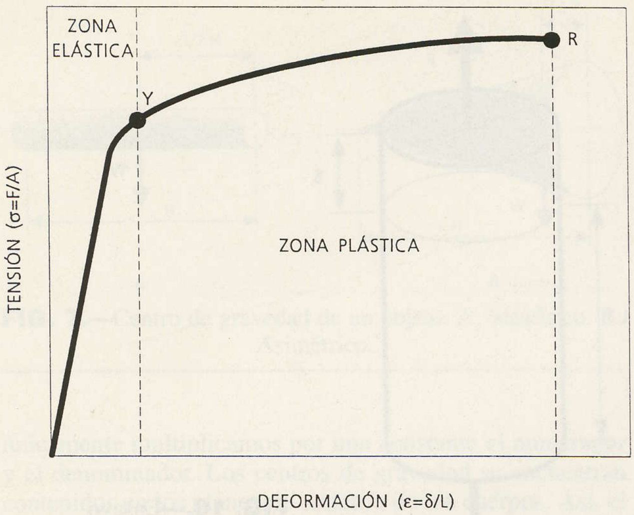

FIG. 12.—Curva tensión-deformación para un material.

beta al aplicarle una carga dada. Así, la probeta será más rígida cuanto menos se deforme.

La curva anterior carga-desplazamiento no es exclusiva para el ensayo de tracción. En general puede obtenerse para cualquier tipo de carga (fuerza o momento) y cualquier desplazamiento asociado (traslación o giro).

Para eliminar el efecto de la geometría de la pieza en las curvas anteriores se divide la fuerza aplicada por la sección *A* de la probeta y el alargamiento δ por la longitud original *L* y así las diferentes curvas fuerza-alargamiento se funden en una única curva cuya forma depende exclusivamente del material (Fig. 12). Como hemos visto anteriormente, la fuerza dividida por el área de la sección es lo que se conoce como tensión y el alargamiento dividido por la longitud inicial como deformación, obteniendo así la curva de tensión-deformación.

La pendiente de la curva en su tramo inicial se denomina ahora módulo de Young o módulo elástico del material y se denota por *E*. Por tanto:

$$F/A = E \cdot \delta/L$$

y como $F/A = \sigma$ y $\delta/L = \varepsilon$, luego:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

La fórmula anterior constituye la ley de Hooke y establece que, dentro de unos límites de carga y deformación, la deformación experimentada por un cuerpo es proporcional a la carga que se le aplica y al cesar ésta el cuerpo vuelve a sus dimensiones originales. Este fenómeno se conoce con el nombre de elasticidad. En la tabla III se muestran los módulos elásticos de algunos materiales.

En general, la curva tensión-deformación de los tejidos biológicos no presenta una única pendiente. Este comportamiento se denomina no-lineal.

Volviendo a la curva tensión-deformación podemos definir en ella algunos parámetros (además del ya conocido módulo de Young) característicos de cada material. El valor en el que la curva pierde su comportamiento elástico se denomina *límite elástico* o *límite de fluencia* del material (punto *Y*). Por debajo de este valor de tensión, si se libera la carga que deforma el material, éste recobra su longitud inicial, es decir, que la energía utilizada para deformar el material queda almacenada en forma de energía elástica de forma reversible. Pero si seguimos cargando el material por encima de dicho límite, al liberar la carga no vuelve a su longitud inicial, quedando una deformación permanente. Se dice entonces que presenta *deformación plástica* o que el material ha entrado en *fluencia*. Por último, podemos definir como tensión de rotura la *tensión calculada* en el punto de rotura del material (punto *R*). A este último parámetro también se le denomina *resistencia de rotura* del material.

Tabla III. Módulos elásticos y tensiones de rotura de algunos materiales

Materiales	Módulo elástico (MPa)	Tensión de rotura (MPa)
Polietileno (UHMW)	1.500	34
Polimetil metacrilato (PMMA)	3.000	60
Acero inoxidable 316L	200.000	540-620
Aleación Cr-Co (forja)	230.000	900
Aleación de titanio Ti6AI4	110.000	900
Cerámica (Al_2O_3)	363.000	490
Hueso cortical (fémur long.)	17.200	121

El área encerrada entre la curva de tensión-deformación y el eje de deformaciones representa la *energía de deformación* en la que se ha transformado el trabajo realizado sobre la probeta.

En este ensayo se observa que la probeta, además del alargamiento, presenta un estrechamiento en su sección. POISSON demostró que entre la deformación longitudinal y el estrechamiento (que corresponde a una deformación lateral) existe una relación de proporcionalidad. La constante que expresa dicha relación se denomina módulo de Poisson y se define como:

$$\mu = \text{deformación lateral/deformación longitudinal}$$

En los materiales elásticos las tensiones tangenciales también presentan proporcionalidad con las deformaciones tangenciales. La constante de proporcionalidad se denomina módulo elástico a cortante *G* y se relaciona (para materiales isótropos) con las otras 2 constantes del material mediante la ecuación:

$$E = 2\,G\,(1 + \mu)$$

Se denomina material *isótropo* a aquel cuyas propiedades mecánicas son iguales en todas las direcciones (por ejemplo, el acero). En caso contrario se dice que el material es anisótropo. Un caso particular de material anisótropo es aquel en el que las características elásticas son diferentes en 3 direcciones mutuamente perpendiculares (por ejemplo, la madera o el hueso cortical diafisario). Este tipo de materiales se denomina ortótropo.

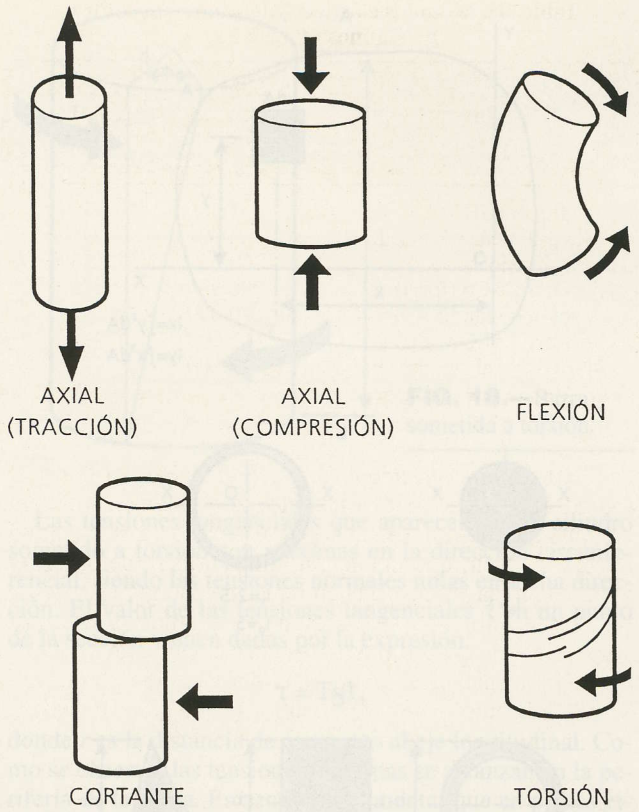

FIG. 13.—Representación esquemática de los modos de carga básicos.

Modos de carga

Un cuerpo, como estructura, puede estar sometido a cargas tanto por aplicación de fuerzas como de momentos. Cualquier estado de carga complejo puede siempre expresarse en función de los modos de carga básicos, que son: las fuerzas axiales (de tracción y de compresión), la fuerza cortante, los momentos de flexión y los momentos de torsión (Fig. 13).

Para que la estructura sometida a un estado de carga complejo no llegue al fallo será necesario que las tensiones internas no superen unos límites máximos impuestos por las características del material. Estos límites se fijarán de acuerdo a unos criterios de fallo, entre los que se pueden considerar, entre otros, el límite de fluencia y la tensión de rotura.

Por ello se hace necesario poder conocer las tensiones internas que se generan en el cuerpo cuando se le aplica una determinada carga. Es la teoría de la resistencia de materiales la que, por medio de la resolución de las ecuaciones de la elasticidad, suponiendo hipótesis simplificativas, nos permite el cálculo de dichas tensiones.

Fuerza axial

Como fuerzas axiales conocemos a aquellas cuya dirección coincide con el eje longitudinal que pasa por el centro de gravedad del cuerpo sobre el que están aplicadas.

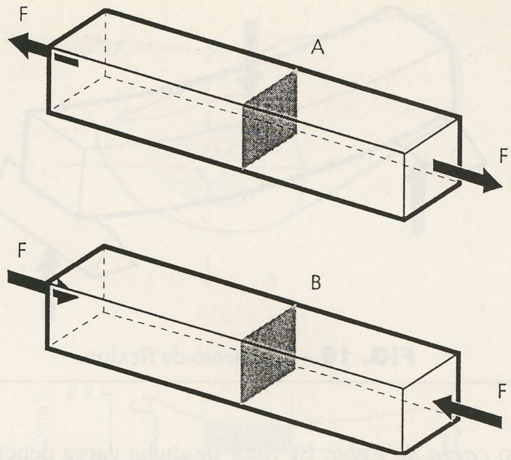

FIG. 14.—A: Barra sometida a tracción. B: Barra sometida a compresión.

Existen, pues, 2 tipos de cargas axiales: las de tracción y las de compresión. Fijándonos en la barra de la figura 14 decimos que está sometida a tracción cuando la fuerza actuante *F* tiende a alargarla y estará sometida a compresión en el caso contrario.

En este caso la determinación de las tensiones es muy simple, pues la única fuerza que actúa lo hace en el eje longitudinal de la barra, dando lugar únicamente a tensión en esa dirección. Para el caso de una barra de sección constante *A*:

$$\sigma = F/A$$

La tensión σ está distribuida en toda la sección de la barra de forma uniforme.

Para establecer un convenio de signos se considera que la compresión produce tensiones negativas y la tracción tensiones positivas.

En una barra sometida a compresión por una fuerza centrada puede sobrevenir el fallo por pandeo. Se dice que una estructura falla por *pandeo* cuando se da una repentina deformación lateral de la misma bajo cargas de compresión (Fig. 15).

La carga axial de compresión para la cual una columna puede fallar por pandeo se denomina *carga crítica de pan-*

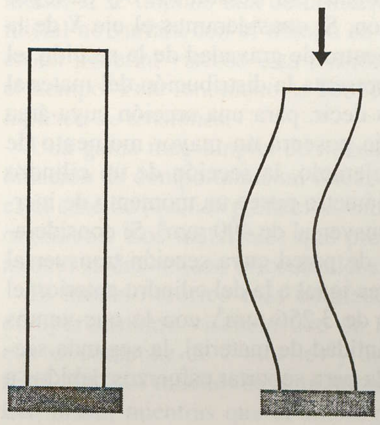

FIG. 15.—Pandeo de una columna.

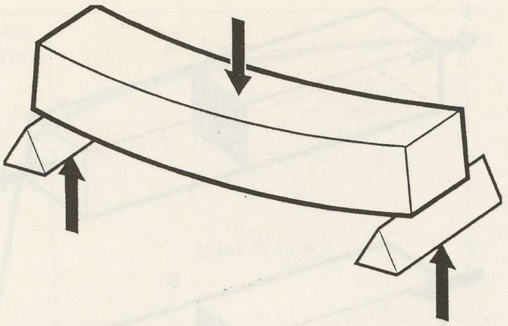

FIG. 16.—Momento de flexión.

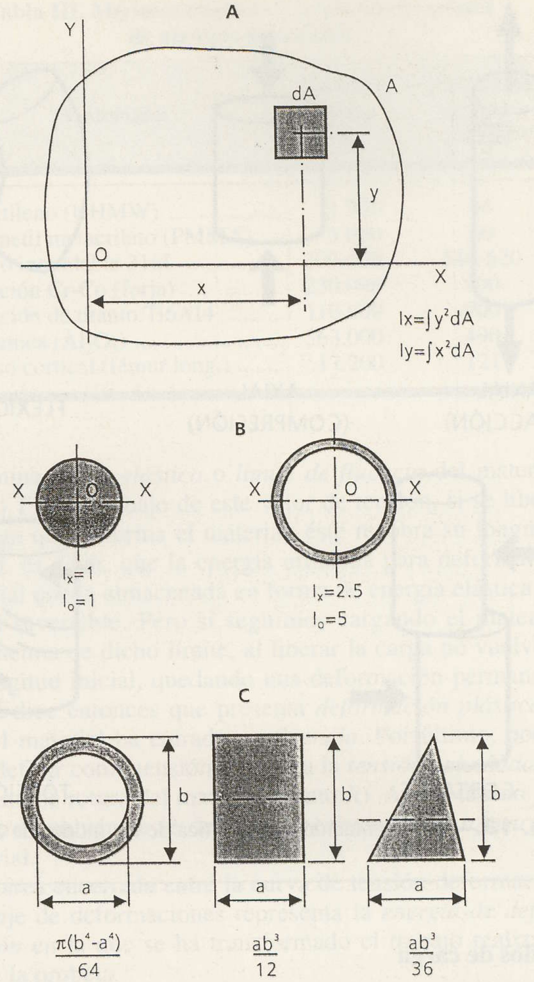

FIG. 17.—Momentos de inercia de secciones planas. A: Definición matemática. B: Comparación de los momentos de inercia de un tubo macizo y uno hueco. C: Momentos de inercia de algunas secciones simples.

deo o *carga de Euler.* El valor de dicha carga depende de la rigidez de la columna, de su longitud y de la disposición de sus extremos, siendo mayor cuanto menos esbelta es la columna (altura/sección transversal) y más rígido es el material. En cuanto a las condiciones de contorno, la carga crítica de pandeo es máxima para columnas biempotradas y mínimas para barras empotradas en un extremo y el otro libre.

Si la carga se aplica sobre la columna de forma excéntrica, a la carga de compresión se le suma un momento de flexión que reduce la carga crítica de pandeo.

Flexión

Un cuerpo estará sometido a flexión cuando esté actuando sobre él una o más fuerzas sobre puntos que no sean de apoyo (Fig. 16). El valor del momento en un punto será igual a la fuerza aplicada por la distancia al punto de aplicación *(brazo de palanca).*

Las cargas de flexión generan tensiones normales de compresión en el lado cóncavo de la deformada y de tracción en el lado opuesto. El valor de las tensiones viene dado por la siguiente fórmula:

$$\sigma = -M \cdot y/I$$

donde *M* es el valor del momento de flexión, *y* es la distancia del eje neutro al punto para el que se calcula la tensión, e *I* es el momento de inercia. El eje neutro es una línea en la que las tensiones normales por flexión son 0 y pasa por el centroide de la sección. Si consideramos el eje *X* de la figura que pasa por el centro de gravedad de la sección, el momento de inercia representa la distribución del material respecto a dicho eje, es decir, para una sección cuya área está más alejada del eje poseerá un mayor momento de inercia (Fig. 17). Por ejemplo, la sección de un cilindro macizo de 10 mm de diámetro posee un momento de inercia respecto a un eje transversal de 490 mm^4. Si consideramos un tubo de 1 mm de pared cuya sección transversal tenga una sección de área igual a la del cilindro anterior, el momento de inercia es de 3.256 mm^4, con lo que vemos que para una misma cantidad de material, la segunda sección está mejor diseñada para soportar esfuerzos debidos a cargas de flexión.

Torsión

Un cuerpo está sometido a *torsión* cuando actúan sobre él 2 fuerzas iguales, paralelas y de sentidos opuestos. El efecto de la torsión es un giro relativo de unas secciones respecto a otras a lo largo de la longitud del cuerpo.

Sea una barra (de sección circular) sometida a torsión como la representada en la figura 18, el ángulo total girado por uno de sus extremos viene dado por la ecuación:

$$\phi = TL/GI_o$$

donde *T* es el momento torsor aplicado, *L* la longitud total de la pieza, *G* el módulo de elasticidad a cortante e I_o el momento polar de inercia de la sección.

El momento polar de inercia (Fig. 19) indica la distribución de material respecto al centroide o centro de gravedad de la sección, de forma que las secciones que presentan un menor giro al estar sometidas a torsión son las huecas, pues el material está lo más alejado posible del centroide.

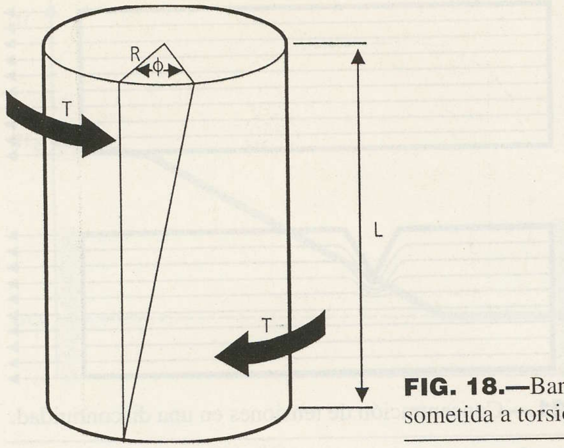

FIG. 18.—Barra sometida a torsión.

Las tensiones tangenciales que aparecen en un cilindro sometido a torsión son máximas en la dirección circunferencial, siendo las tensiones normales nulas en dicha dirección. El valor de las tensiones tangenciales τ en un punto de la sección vienen dadas por la expresión:

$$\tau = Tr/I_o$$

donde *r* es la distancia de ese punto al eje longitudinal. Como se observa, las tensiones máximas se alcanzan en la periferia de la pieza. Es necesario comentar que en piezas cilíndricas macizas las fibras centrales tienen un nivel de tensiones muy bajo, lo que indica que aportan poco a la resistencia estructural de la pieza. Esta es la explicación de que en sistemas en los que el peso es importante, las piezas solicitadas a torsión sean huecas, pues aligeran peso, manteniendo prácticamente constante la resistencia estructural.

Por último, queda comentar que cualquier estado de carga que se presente en la realidad puede descomponerse en los modos de carga básicos hasta aquí estudiados. Por ello, y dentro de la elasticidad lineal, será posible obtener el estado de tensiones y deformaciones de ese estado de cargas complejo mediante la aplicación del principio de superposición, como la suma de cada uno de los efectos producidos por cada uno de los modos de carga básicos.

Viscoelasticidad

Como se vio en apartados anteriores, los materiales elásticos son aquellos que deformados por debajo de un determinado límite, no presentan deformaciones permanentes, es decir, que cesando la causa externa que produce la deformación, recobran la forma original. La energía aplicada para la deformación es almacenada en forma de energía elástica reversible.

En el extremo opuesto se encuentran los fluidos que se caracterizan por disipar la energía aplicada sobre el material. La disipación de la energía se debe a la fricción interna entre las partículas que componen el material. La viscosidad del fluido es una medida de la fricción interna entre partículas.

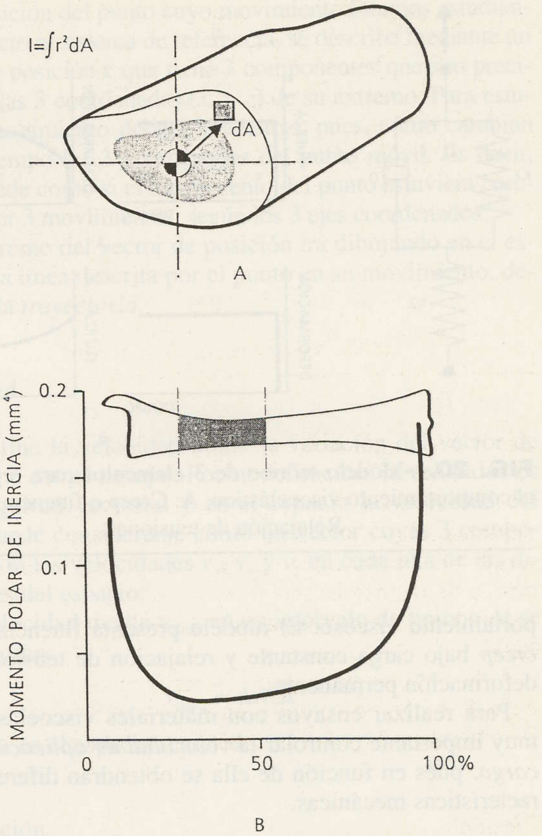

FIG. 19.—Momento polar de inercia. A: Definición matemática. B: Variación del momento polar de inercia a lo largo de la longitud de la tibia.

La línea divisoria entre el estado líquido y sólido se traza de forma bastante arbitraria para un valor de viscosidad prefijado, pero un modo mucho más satisfactorio de expresar la diferencia es en términos de la capacidad del material para relajarse bajo una carga aplicada.

Un sólido elástico ideal soportará una carga constante dada durante un período de tiempo indefinido con una deformación constante. Un material viscoso se irá deformando bajo dicha carga con el tiempo. Este fenómeno se conoce con el nombre de *fluencia lenta* o *creep*. Del mismo modo, si se impone una deformación constante, la tensión inicial no variará con el tiempo en un sólido elástico, pero en un material viscoso esta tensión irá disminuyendo con el tiempo. Este fenómeno se conoce con el nombre de *relajación de tensiones*.

Una gama muy amplia de materiales muestra una combinación de comportamiento lineal elástico y viscoso. Este es el caso de muchos polímeros, biomateriales y materiales orgánicos. Los materiales que presentan este comportamiento se denominan viscoelásticos.

El modelo teórico más empleado para representar el comportamiento viscoelástico de los materiales biológicos se compone de 2 muelles y un amortiguador ideales (Fig. 20). Los muelles se asimilan al comportamiento elástico lineal, mientras que el amortiguador lo hace al com-

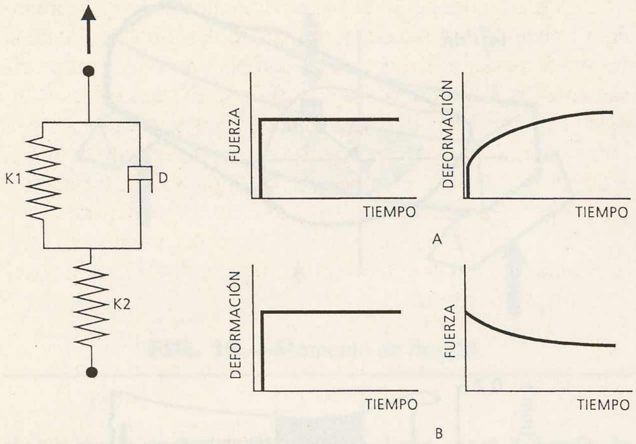

FIG. 20.—Modelo teórico de 3 elementos para representar el comportamiento viscoelástico. A: Creep o fluencia lenta. B: Relajación de tensiones.

portamiento viscoso. El modelo presenta fluencia lenta o *creep* bajo carga constante y relajación de tensiones bajo deformación permanente.

Para realizar ensayos con materiales viscoelásticos es muy importante controlar la *velocidad de aplicación de la carga,* pues en función de ella se obtendrán diferentes características mecánicas.

Mecánica de la fractura

Básicamente la fractura aparece en una estructura cuando la carga que está soportando supera la resistencia del material. Sin embargo, hay algunos factores que pueden modificar la resistencia del material. Dos de estos fenómenos son la concentración de tensiones y la fatiga.

Concentradores de tensiones

Como se ha comentado en apartados anteriores, la resistencia a tracción de un material se define como la tensión límite a la que rompe el material sometido a una carga de tracción.

La definición anterior de resistencia supone que la fuerza se aplica uniformemente sobre toda la sección transversal de la muestra. Sin embargo, si en el material existe algún defecto o aparece un cambio brusco de la geometría de la pieza, aparece en las proximidades de dicha discontinuidad un aumento de la tensión (Fig. 21). Esta situación se puede comprender mejor con la analogía del flujo. Supongamos un río en el que el agua fluye sin ningún obstáculo, de forma que las líneas de flujo discurren paralelas y separadas una distancia constante. Sin embargo, si encuentran un obstáculo en su camino, las líneas de flujo tienden a acercarse, a concentrarse, de forma que este acercamiento sería mayor cuanto mayor fuera el obstáculo en relación con la anchura del río.

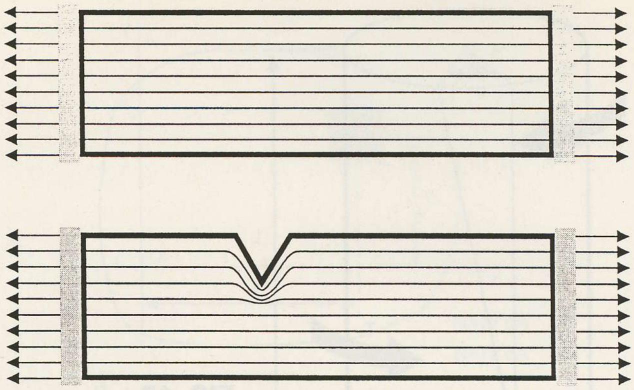

FIG. 21.—Concentración de tensiones en una discontiuidad.

Fatiga

La fatiga es otro de los fenómenos físicos que modifica la resistencia de un material. Cualquier material sometido a cargas variables en el tiempo tiende a fallar a tensiones muy inferiores a las necesarias para que sobrevenga el fallo bajo carga puramente estática. Así, cuando la rotura de un material se debe a la repetición continuada de esfuerzos se dice que el material ha fallado por *fatiga.*

Las fallos por fatiga comienzan con una grieta tan pequeña que no es perceptible a simple vista. Esta grieta se desarrollará normalmente en un punto de concentración de tensiones, tal como un cambio brusco en la sección transversal, imperfecciones en el interior o exterior del material, un orificio, etc. Una vez que se forma la grieta, el efecto de concentración de tensiones se hace mayor y ésta se extiende más rápidamente. Como el área que soporta la carga es cada vez menor, la tensión va aumentando hasta que la sección falla por fractura de forma instantánea.

Para determinar la resistencia de materiales bajo la acción de cargas variables se someten probetas de dichos materiales a cargas cíclicas, generalmente senoidales, y se registra la carga y el número de ciclos al que rompe la probeta. Si se representan el número necesario de ciclos para que la probeta rompa frente a la tensión a la que se realiza el ensayo, se obtiene una gráfica como la mostrada en la figura 22. En ella podemos ver que a partir de un número elevado de ciclos no ocurrirá la rotura. La tensión límite por debajo de la cual el material no rompe, independientemente del número de ciclos de aplicación de cargas, se denomina *límite de fatiga.* El límite de fatiga se ve modificado por varios factores, entre los que podemos nombrar como más importantes el acabado superficial del material, las características geométricas de la pieza, la existencia de concentradores de tensiones y la temperatura.

Dinámica

La mayor parte de las actividades fisiológicas conllevan el movimiento de alguna parte del cuerpo, y para su estu-

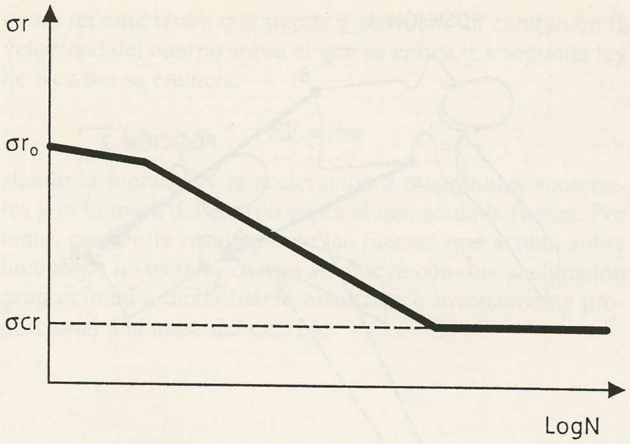

FIG. 22.—Diagrama tensión de rotura-número de ciclos de un ensayo de fatiga.

dio y caracterización es necesario acudir a la parte de la mecánica que llamamos dinámica.

La dinámica, a su vez, se subdivide en las áreas cinemática, que consiste en el estudio de las características del movimiento, y cinética, que estudia las causas que producen dicho movimiento.

La cinemática nos permite describir los movimientos a partir de magnitudes como la posición, la velocidad y la aceleración. Por ejemplo, para el cálculo de las cargas a las que está sometido el raquis al realizar determinada tarea interesa conocer la posición del centro de gravedad del cuerpo a lo largo del movimiento, el rango de movilidad de los diferentes segmentos involucrados y sus velocidades y aceleraciones. La cinética, sin embargo, se ocupa de todas las causas que provocan el movimiento o lo modifican, como son las fuerzas musculares y las cargas externas.

Cinemática

Un cuerpo se mueve cuando en el transcurso del tiempo cambia de posición respecto a un sistema de referencia fijo. Su movimiento estará perfectamende definido cuando conozcamos en cada instante dónde se encuentra el cuerpo (posición) y cómo se está moviendo (velocidad y aceleración) referido a un sistema de coordenadas. Para definir los conceptos utilizados en cinemática nos referiremos inicialmente al movimiento de un punto, para generalizar posteriormente los conceptos al movimiento de un sólido.

Cinemática del punto

Posición

Para estudiar el movimiento de un punto es necesario conocer en cada instante su posición respecto a un sistema de coordenadas fijo. De este modo hablamos de posición de un punto o de un cuerpo respecto a un punto fijo, origen del sistema de referencia escogido.

La posición del punto cuyo movimiento estamos estudiando, respecto al sistema de referencia, se describe mediante un vector de posición **r** que tiene 3 componentes que son precisamente las 3 coordenadas (x, y, z) de su extremo. Para estudiar el movimiento deberá analizarse, pues, cómo cambian con el tiempo las 3 coordenadas del punto móvil. Es decir, todo sucede como si el movimiento del punto estuviera compuesto por 3 movimientos, según los 3 ejes coordenados.

El extremo del vector de posición irá dibujando en el espacio una línea descrita por el punto en su movimiento, denominada *trayectoria.*

Velocidad

Se define la velocidad como la variación del vector de posición **r** con el tiempo. Por su definición, la velocidad es una magnitud vectorial y en el espacio la velocidad del punto puede considerarse como un vector cuyas 3 componentes son las velocidades v_x, v_y y v_z en cada una de las direcciones del espacio.

La velocidad media $\mathbf{v}_{med}$ en un intervalo de tiempo Δt se define como:

$$\mathbf{v}_{med} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$$

donde Δr es el espacio recorrido.

Aceleración

Se define la aceleración de un punto como la variación de la velocidad con el tiempo, y también es una magnitud vectorial.

La aceleración media $\mathbf{a}_{med}$ en cierto intervalo de tiempo Δt se define como:

$$\mathbf{a}_{med} = \Delta v/\Delta t$$

En el espacio el vector aceleración puede considerarse compuesto por 3 aceleraciones a lo largo de los ejes de coordenadas a_x, a_y y a_z.

Movimiento circular

Vamos a estudiar ahora el movimiento de un punto cuya trayectoria es circular. En este caso el vector velocidad lineal, tangente a la trayectoria, es perpendicular al radio. La distancia recorrida en el movimiento circular *S* será:

$$S = R \cdot \phi$$

donde ϕ es el ángulo girado y *R* el radio de giro. La velocidad lineal del punto está relacionada con la variación del ángulo ϕ con el tiempo (denominada velocidad angular ω) de acuerdo a la fórmula:

$$v = R \cdot \omega$$

Si la velocidad angular varía con el tiempo, se define la *aceleración angular* α como:

$$\alpha = d\omega/dt$$

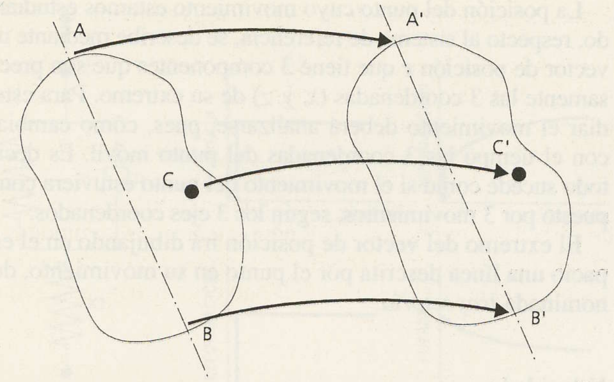

FIG. 23.—Movimiento de traslación de un sólido rígido.

Cinemática de un sólido rigido

Un *sólido rígido* se define como un sistema de partículas cuyas distancias relativas entre ellas permanecen constantes. Un sólido rígido puede describir 2 tipos básicos de movimiento: uno de *traslación* y otro de *rotación* alrededor de un eje.

Se dice que un sólido rígido se desplaza según un movimiento de traslación cuando las trayectorias de todos sus puntos son paralelas (Fig. 23). Del mismo modo toda recta ligada al mismo se mantiene paralela después del desplazamiento.

Puesto que las velocidades y aceleraciones de todos los puntos del sólido coinciden, esta circunstancia permite reducir el estudio del movimiento de traslación del sólido al estudio del movimiento de un único punto (por ejemplo, su centro de gravedad), siguiendo la teoría de la cinemática del punto vista anteriormente.

En el movimiento de rotación de un sólido rígido las partículas del mismo se mueven en planos paralelos sobre circunferencias con centro en el punto de intersección del eje de rotación con el plano correspondiente (Fig. 24).

La velocidad angular ω será en cada instante igual para todas las partículas del sistema.

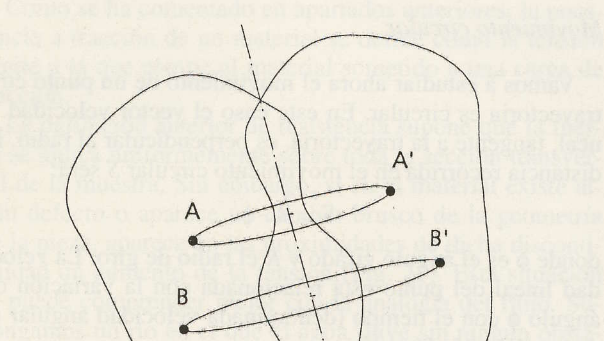

FIG. 24.—Movimiento de rotación de un sólido rígido.

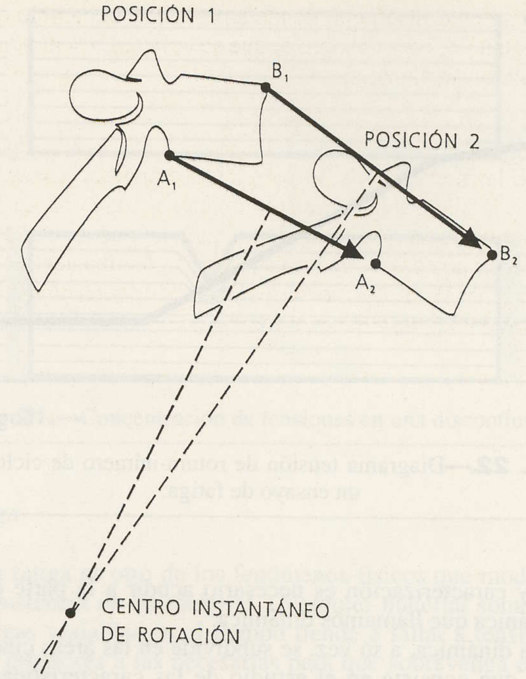

FIG. 25.—Determinación del eje instantáneo de rotación del movimiento de una vértebra en el plano sagital.

Para un sólido desplazándose con movimiento general, en cada instante puede definirse un eje de forma que el desplazamiento del sólido puede expresarse como una traslación y un giro a lo largo y alrededor del mismo. Dicho eje se conoce con el nombre de *eje instantáneo de rototraslación*.

En el caso particular de movimiento contenido en el plano existe un punto de velocidad 0 que se denomina centro instantáneo de rotación. Dicho punto puede obtenerse, de acuerdo a la regla de Reuleaux, como la intersección de las bisectrices de los vectores de desplazamiento de 2 puntos cualesquiera del cuerpo (Fig. 25).

Cinética

Como se comentó anteriormente, la cinética es la parte de la dinámica que estudia cuáles son las causas del movimiento, es decir, qué causas crean o modifican el desplazamiento de un cuerpo.

Según se vio en el capítulo de estática, cuando la suma de las fuerzas y momentos actuantes sobre un cuerpo era 0, el cuerpo permanecía en equilibrio estático, es decir, en reposo. Cuando dejan de cumplirse las condiciones de equilibrio estático el cuerpo comienza a moverse con una cierta aceleración.

Segunda ley de Newton

Anteriormente se definió la fuerza como un impulso o interacción entre cuerpos, pero también puede definirse como un ente físico que tiende a provocar un cambio en la velocidad del cuerpo sobre el que se aplica. La segunda ley de Newton se enuncia:

$$\Sigma F = ma$$

siendo la fuerza F y la aceleración a magnitudes vectoriales y m la masa del cuerpo sobre el que actúa la fuerza. Por tanto, cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo no es 0, el cuerpo se mueve con una aceleración proporcional a dicha fuerza resultante e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

Ecuación fundamental de la dinámica de rotación

La ecuación fundamental de la dinámica de rotación relaciona el momento M necesario para imprimir a un sólido una aceleración angular α:

$$M_{ext} = I\,\alpha$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje de giro. Esta expresión es la equivalente a la segunda ley de Newton, pero para movimiento circular. El momento de inercia I da idea, por tanto, de cómo está distribuida la masa respecto al eje de giro.