Volume as an instrument in forming spatial concepts

Le volume comme instrument de conceptualisation de l'espace

Claude Janvier
CIRADE, UQAM
Case postale 8888, succursale A
Montréal (Québec)
H3C 3P8 Canada

English translation:
Traduction anglaise:
Peter Bottéas

Introduction

The ability to foresee the result of a rotation of a solid around an axis, recognize planes or parallel straight lines in two-dimensional representations of spatial configurations, and identify orthogonal directions in a diagram are all spatial skills that involve a grasp of spatial concepts. This paper explores the relationship between the development of the concept of volume in students and the development of spatial skills.

It is our premise that volume is basic to the development of spatial concepts. While some may tend to believe that concept of volume is grafted onto a previously structured notion of space and, at best, makes use of already developed skills, we are of the opinion that the specifics of the measurement process that pertain to exercises involving volume introduce new elements in one's structuring of space. An understanding of volume, along with all the underlying skills it implies, does not merely complement the usual organizational concepts, such as parallelism, ortho-

Introduction

Savoir prévoir le résultat d'une rotation d'un solide autour d'un axe, pouvoir reconnaître des plans ou droites parallèles dans des représentations 2D de configurations spatiales, identifier sur un dessin les directions orthogonales sont autant d'habiletés spatiales qui témoignent d'une conceptualisation de l'espace. Comment se présente le développement du concept de volume chez les élèves en rapport avec le développement des habiletés spatiales?

Voilà la question principale qui se pose dans le présent chapitre. Notre point de vue consiste à reconnaître le volume comme un instrument fondamental de conceptualisation de l'espace. En effet, alors que plusieurs sont portés à croire que le volume vient s'ajouter à un espace préalablement structuré par l'élève et vient tout au plus «utiliser» les habiletés déjà en place; nous pensons que les spécificités du processus de mesure présent dans les exercices impliquant le volume, introduisent des éléments nouveaux dans la gonality, dihedral angles, and distance; in many respects, it has distinct features. To illustrate this point of view, we shall demonstrate that finding the volume of various figures, taking apart solids in order to compare their volume, and deducing formulas for volume involve concepts of space that correspond to particular skills.

This paper is based on an in-class study coordinated by the author.[1] Through an examination of the main stages in a series of lessons, we shall retrace the points at which spatial skills become apparent, question the nature of the skills and, from time to time, provide brief descriptions. The ideas developed in this paper are illustrated in a video-tape intended for teachers that presents highlights of the experiment.

In activity-oriented teaching, it is not unusual for a certain number of questions to arise pertaining to spatial skills, nor is it unusual in the pursuit of the two primary objectives of (1) having students reason out formulas and (2) taking students' major difficulties into consideration.[2]

Becoming familiar with space beforehand

Volume is a characteristic that pertains to objects in space or even to portions of space. Although it seems essential to provide students with exercises that involve real objects, since problems that deal with the concept of volume generally use objects represented in the plane, it is also important that all the available means be used to enable students to work confidently with planar representations of space objects. This concern naturally led us to start students off with a number of exercises that are variations of exercises used in cognitive psychology to test a range of spatial skills. The first few lessons consisted of exercises that involved the construction of space objects on the basis of various drawings, and exercises that involved drawing various space objects. The lesson plans were designed to allow for an alternation between these two types of activities in order to ensure a frequent shift from working in the plane (through drawing) and in space (through constructing objects).

Upon examining such exercises, which require the student to relate the various elements involved in a given task (edges, faces, orthogonality, dihedral angles, etc.), we noted that certain exercises focus on area, while others are more concerned with volume. That may point to a criterion that could be used to establish categories of spatial skills.

structuration de l'espace. Le volume (avec toutes ses compétences sous-jacentes) ne joue pas seulement un rôle complémentaire par rapport aux autres concepts organisateurs usuels : parallélisme, orthogonalité, angle dièdre, distance... ; mais, à bien des égards, il agit d'un manière originale. Pour illustrer ce point de vue, nous entendons montrer que : trouver le volume de formes diverses, déformer des solides pour en comparer le volume, déduire des formules de volumes... entraînent une forme de conceptualisation de l'espace à laquelle correspondent des habiletés spéciales.

Ce texte sera articulé autour d'une expérience d'enseignement coordonnée par l'auteur.[1] Cet exposé retrace à partir des grandes étapes d'une série de leçons, les moments où ces habiletés se sont manifestées, questionne la nature de ces habiletés et en donne à l'occasion une description sommaire. Les idées exposées ici sont illustrées dans un vidéo qui présente les grands moments de cette expérience d'enseignement à l'intention des enseignants.[2]

Le fait que surgissent un certain nombre de questions relatives aux habiletés spatiales n'est pas étranger à la pédagogie active à laquelle a eu recours l'enseignant, ni aux deux objectifs majeurs visés : 1) faire raisonner les formules ; 2) prendre en considération les difficultés majeures des élèves.

Une familiarisation préalable avec l'espace

Le volume est un attribut des objets spatiaux ou encore des portions d'espace. Il apparaît essentiel de proposer aux élèves des exercices portant sur des objets concrets. Mais, étant donné que dans les problèmes portant sur la notion de volume, ces objets sont en général représentés dans le plan, il est important que tous les moyens soient mis en oeuvre pour que les élèves interprètent avec assurance les représentations dans le plan de ces objets spatiaux. Nous avons été naturellement conduit à proposer aux élèves, dans un premier temps, bon nombre d'exercices dont des variantes sont utilisées en psychologie cognitive comme épreuves visant à mesurer toute une gamme d'habiletés spatiales. Les premières leçons ont été consacrées à des exercices de construction d'objets spatiaux à partir de dessins divers et à des exercices de reproduction par dessin d'objets spatiaux variés. La planification fut, de plus, conçue de manière à respecter l'alternance entre ces deux types d'activité pour ainsi assurer des allers-retours fréquents entre le plan et l'espace (par le dessin et la construction).

[1] Carried out by Daniel Campeau, with the collaboration of Chantal Forget, among Secondary 3 (grade 9) students. The material used was developed by the participants in MAT-3029, a course held in the fall semester of 1990.

[2] The video-tape is entitled *Le volume, mais pourquoi les formules?* Some illustrations from the accompanying book are reproduced in this paper.

[1] Réalisée par Daniel Campeau avec la participation de Chantal Forget dans des classes de secondaire 3, à partir du matériel réalisé par le groupe de la session automne 1990 du cours MAT-3029.

[2] Ce vidéo est intitulé *Le volume, mais pourquoi les formules?* Nous reprendrons ici quelques illustrations du cahier d'accompagnement.

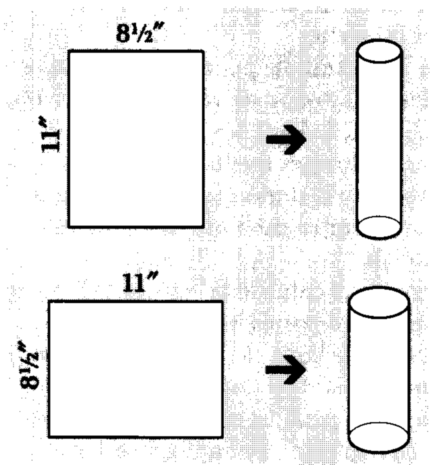


Figure 1

Area vs. volume

An a priori analysis of the concept of volume carried out with a group of students enabled us to identify a number of major difficulties, several of which have already been topics of research [2], [3]. To start, let us consider a central obstacle: the conflict between area and volume, which has its counterpart in plane geometry.

It is widely known that senior elementary-school students easily see a close link between the length (perimeter) of a closed curve and its area, to the point that they confuse the two notions in certain problems. (Piaget and Inhelder [1] conducted a series of studies on this issue.) Once that difficulty is overcome, new obstacles arise when problems involve changes in perimeter or area. For example, students may conclude that a closed curve whose form has been transformed but whose perimeter has remained unchanged will nevertheless have the same area. Such problems have been dealt with in a number of studies from a Piagetian perspective.

Where volume is concerned, there is a similar problem: students naturally tend to think that solids that have an identical lateral area are necessarily identical in volume. The first introductory lesson to the concept of volume dealt with that point of confusion.

First, the teacher instructed the students to form two cylinders from two standard-sized sheets of paper by rolling one lengthwise and the other widthwise (see **Figure 1**). He prompted them to reflect on whether each cylinder could contain the same quantity of sand or sugar. An in-class survey led to surprising results: only a few of the students believed that the two cylinders were different in volume. The teacher then carried out an experiment in front of the class. Much to the surprise of most students, the two cylinders were indeed different in volume. However, how can students be convinced by other means than hands-on experimentation?

We therefore wondered whether the skill involved in avoiding that trap corresponded to a particular spatial skill and, if so, whether it could be developed. Let us examine a common reasoning strategy: the use of extreme positions. If the volume remains the same, it should remain the same for any rectangle. First of all, a square, whether rolled lengthwise or widthwise, will obviously produce the same cylinder. However, could very long, thin rectangles not re-

Un examen de ces exercices, lesquels exigent la mise en relation des éléments concernés par la tâche (arêtes, face, orthogonalité, angle dièdre...), montre que certains d'entre eux favorisent une familiarisation avec l'aire de ces solides, alors que d'autres concernent davantage le volume. Peut-on reconnaître là un critère permettant l'établissement de catégories d'habiletés spatiales?

L'aire vs le volume

Une analyse a priori du concept de volume, réalisée par l'auteur avec ses étudiants, a permis de cerner plusieurs difficultés majeures dont certaines ont déjà fait l'objet de recherche [2], [3]. Mentionnons d'abord un obstacle central, le conflit aire-volume qui a son pendant dans le plan.

Il est en effet bien connu que les élèves (à la fin du primaire) rapprochent facilement la longueur d'un courbe fermée (son périmètre) et son aire, jusqu'à confondre dans certains problèmes les deux notions. Piaget et Inhelder [1] ont lancé une série de recherches sur le sujet. Cette dernière difficulté surmontée, c'est lorsque se présentent des changements de périmètre ou d'aire que surgissent de nouveaux obstacles. Par exemple, les élèves affirmeront que les courbes fermées dont on fera varier la forme tout en maintenant le périmètre fixe ont la même aire. Ces difficultés ont donné lieu à plusieurs recherches dans une perspective piagétienne portant sur les invariants.

Pour le volume, une situation équivalente se présente: les élèves sont portés naturellement à considérer que les solides ayant des aires latérales identiques ont des volumes identiques. C'est à cette confusion que s'adresse une première leçon de familiarisation avec la notion de volume.

L'enseignant a préalablement demandé de former deux cylindres à partir de deux feuilles de dimensions standards en enroulant l'une dans le sens de la longueur et l'autre dans le sens de la largeur [voir **figure 1**]. Il a aussi incité les élèves à réfléchir à la question de savoir si la quantité de sable ou de sucre que contiendrait chacun de ces cylindres serait la même. Une enquête menée en classe a conduit à des résultats surprenants: seuls quelques uns ont cru que les volumes renfermés différaient. L'enseignant a alors procédé à une vérification devant la classe. À la surprise générale, les deux volumes diffèrent! Mais comment se convaincre autrement que par la manipulation?

Nous avons donc été amenés à nous poser la question à sult in cylinders that are perceptibly different in volume? Is there means of carrying out a mental calculation to compare the two? If we take a pair of long, thin rectangles, one could be rolled to resemble a piece of spaghetti and the other a shallow cake (**Figure 2**). We must be able to imagine the cake becoming flatter and wider, like a pancake, and the piece of spaghetti becoming thinner and longer as the initial rectangle stretches out.

How can one be sure through visualization that the spaghetti will fit into the pancake? We might be inclined to curl it inside the pancake, or cut it into pieces and place them inside the pancake. It is at that stage that it becomes evident that in the transformation of those objects, the linear dimensions that characterize them must be considered. Throughout the visualization the following must be borne in mine: (1) the circumference of the pancake is equal to the length of the spaghetti, and (2) the thickness of the pancake is equal to a section of spaghetti. Therefore, the thickness of the pancake is π times the diameter of the spaghetti. It can thus be concluded that if the spaghetti is sectioned into four pieces, each piece will be smaller than the diameter of the pancake. Therefore, the quarter-length pieces of spaghetti will all fit into the pancake.

This example is useful in identifying certain spatial skills that relate to the notion of volume. It has been determined that the rectangle must first be transformed into two cylinders. Then, once mental images are formed, taking into consideration the linear dimensions of the cylinders, a comparison can be made that clears up any initial confusion.

Another interesting case is that of the bottomless box. Students initially tend to think that the volume remains unchanged when the box is transformed (**Figure 3**). Only when major transformations are carried out and the volume shrinks significantly do they realize that the volume has in fact changed. Why, however, would the volume suddenly change at a particular stage in the transformation? What would lead to the conclusions that volume cannot change suddenly, and that if it does change, the changes—though perhaps imperceptible—must have started at the beginning of the transformation.

Merely visualizing the various configurations of the box is insufficient; visualization must be accompanied by 'reasoning by contradiction,' as in the following statement: "Suppose that only substantial transformations produce a

savoir si la compétence à résister à ce type d'obstacle correspond à une habileté spatiale particulière. Peut-on la développer ? Examinons une stratégie que plusieurs utilisent à savoir : le recours aux positions extrêmes. Si le volume est conservé, il devrait l'être pour tout rectangle. D'abord, il est évident qu'un carré fournit deux cylindres identiques. Ne serait-il pas possible que des rectangles très allongés donnent des cylindres qui ont des volumes perceptivement différents ? Peut-on fournir mentalement des calculs qui établissent la différence entre les deux cylindres ? Pour le cas qui nous concerne, avec un rectangle très allongé donc très mince, un des cylindres ressemble à un spaghetti et l'autre à une galette. Cette galette et ce spaghetti (voir **figure 2**) doivent être visualisés de manière à ce que l'on puisse imaginer la galette devenant de plus en plus plate et large et le spaghetti de plus en plus fin et long, lorsque le rectangle de base s'allonge. Comment ensuite s'assurer « mentalement » que le spaghetti rentre toujours dans la galette ? On peut être tenté de l'enrouler à l'intérieur de la galette ou encore de le mettre en morceaux dans la galette. C'est là que l'on constate qu'il faut conjuguer ces transformations d'objets avec les dimensions linéaires qui les caractérisent. Dans toute cette visualisation, il faut se rappeler que : 1) la circonférence de la galette vaut la longueur du spaghetti ; 2) l'épaisseur de la galette vaut la circonférence d'une section de spaghetti. Donc, l'épaisseur de la galette vaut π fois le diamètre du spaghetti. On peut donc conclure que si le spaghetti est coupé en quatre, chaque bout de spaghetti est plus petit que le diamètre de la galette. On peut donc insérer nos quarts de bouts de spaghetti dans la galette.

Ce problème est un bon exemple pour cerner certaines habiletés spatiales reliées à la notion de volume. Nous avons constaté que le rectangle doit d'abord être transformé en deux cylindres. Ensuite, les images mentales élaborées lorsqu'elles sont conjuguées aux dimensions linéaires des cylindres permettent une comparaison qui écarte manifestement la confusion initiale.

Un autre cas intéressant est celui de la boîte sans fond, ni dessus. Les élèves sont d'abord portés à croire que le volume ne change pas lorsque la boîte est déformée (**figure 3**). Il faut faire des déformations suffisamment grandes pour que, le volume devenant très petit, ils affirment soudainement que le volume a changé. Mais pourquoi faudrait-il qu'à un certain stade de la transformation le volume change

change in volume, and that small transformations do not. Yet how can one transformation produce a change while similar transformations do not?" The use of extremes can help to demonstrate that our perception may not be accurate and that slight transformations may not result in identical volume.

In passing, another difficulty should be noted: the comparison of the volumes of various solids is often hampered by a disproportionate influence of their linear dimensions on reasoning. Imagine a block made from several pieces of Lego and a rod made from the same number of pieces. When both solids are shown to the students, the length of the rod will incite several of them to conclude that the volume of the rod is greater than that of the block. The primary strategy for demonstrating the contrary is to dismantle the rod and use its parts to construct (either mentally or physically) a block identical to the first one. The ability to dismantle and reconstruct space objects therefore seems to be a key spatial skill. Of course, since only a close approximation of the volumes of the two solids can be put forth, no convictions can be expressed.

In the introduction, it was mentioned that we consider volume to be basic to the development of spatial concepts. The volume-comparison problem described above (the spaghetti vs. the pancake) is an interesting illustration of this point of view.

Figure 2
Sheet of paper, cake, and piece of spaghetti.
Feuille, galette et spaghetti.

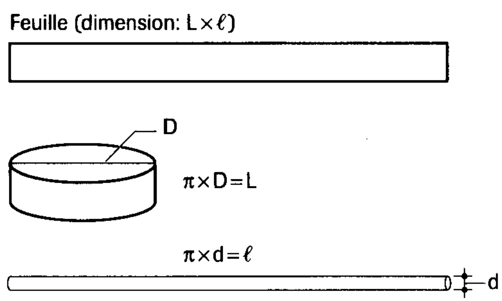
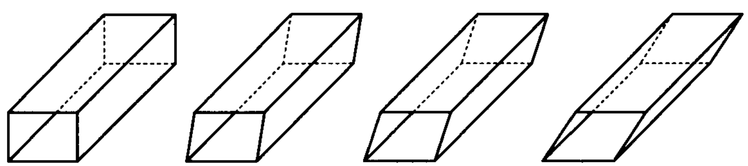


Figure 3
The box.
La boîte.



soudainement ? Qu'est-ce qui les porte à affirmer que le volume ne peut subitement changer ? Et que, si l'on constate soudainement un changement, c'est qu'il devait y avoir des changements imperceptibles dès le début de la transformation.

Nous croyons qu'il ne suffit pas de simuler mentalement les différentes positions que peut prendre la boîte mais que cette évocation visuelle doit être accompagnée d'un raisonnement par contradiction fondé sur la continuité et qui peut se formuler à peu près comme suit : « Supposons que l'on n'ait pas de changement de volume pour des déformations petites et que l'on constate à un certain point qu'une certaine déformation change le volume, pourquoi la transformation immédiatement voisine ne produit-elle pas de changements de volume ? » Le recours aux cas extrêmes permet de constater que l'égalité perceptive est prise en défaut et de douter de l'égalité des volumes pour les déformations plus petites.

Notons au passage une autre difficulté : la comparaison entre les volumes de divers solides est souvent gênée par une influence démesurée de leurs dimensions linéaires. Imaginons ainsi une brique faite de plusieurs pièces de « Lego » et le même nombre de pièces utilisées pour produire un bâton. Lorsque les deux solides sont présentés aux élèves, la longueur du bâton en incite plusieurs à fixer un volume plus grand au bâton plutôt qu'à la brique. Ici, le raisonnement prédominant qui permet de contourner la difficulté est la décomposition du bâton en petites parties à partir desquelles on reconstruit mentalement (ou sur l'objet) la brique initiale. La capacité à décomposer et à recomposer des objets spatiaux nous apparaît donc comme une habilité spatiale centrale. Bien sûr, aucune conviction chez les élèves ne peut être formulée ; car seulement la valeur très rapprochée du volume des deux solides peut être alléguée.

Nous avons souligné dans l'introduction que nous considérons le volume comme un instrument fondamental de conceptualisation de l'espace. Ce problème de comparaison de volumes (spaghetti vs galette) que nous venons d'exposer est un exemple intéressant qui illustre notre point de vue.

The concept of volume: semantic problems

In addition to the problems and reasoning described previously, an enlightened approach to the teaching of volume must take semantic problems into account. In everyday language, the term *volume* is sometimes used ambiguously to refer to content, and in some circumstances, weight and volume are confused. Moreover, the amount of space occupied by objects such as tables and chairs is more an issue of area. Therefore, we favour hands-on activities that allow for clarifications to be made in order to dispel any semantic confusion. Certain spatial skills are undoubtedly required; however, we will limit our discussion to an analysis of the concept of volume in terms of magnitude. (Our analysis will be saved for the end of this paper so as not to interrupt the flow of the text.)

Basic formula for a right rectangular prism

At the elementary-school level, students determined the number of units contained in a solid in a somewhat haphazard way. Teachers would generally have them find the volume of several right prisms on the basis of tables listing the values assigned to the sides, leading to the conclusion that volume was the product of three dimensions: length × width × height. This formula, which produces a result, can also be presented as a generalization of the formula for determining the area of a rectangle. Thus, for many teachers, volume is the result of calculations validated by a series of verifications. For students, the formula is a mystery, since it is only discovered once the series of verifications has been carried out. At best, they can merely confirm that the formula works. *Our approach to volume diverges from that approach* and requires the use of spatial skills, as we shall attempt to explain.

With students, we approach the formula as a *systematic means of quantifying* the units that make up the solid in question. The objective is therefore to use reasoning to discover how to quantify the units. Thus, a *specific quantification procedure* can take the form of an *expression* that describes how to determine the number of basic units contained in the solid. The expression devised will, of course, be equivalent to the basic formula. It translates into words the actions required by the formula.

At this stage, the notion of "layers" or "slices" is introduced (**Figure 4**). The ability to section a right prism into

Le concept de volume, difficultés sémantiques

Outre les difficultés et raisonnements mentionnés jusqu'ici, nous devons prendre en considération, dans toute pédagogie éclairée de la notion de volume, les problèmes sémantiques de désignation. Il existe dans le langage courant des utilisations ambiguës par lesquelles on associe volume et contenu et des circonstances où l'on confond poids et volume. De plus, l'espace occupé par des objets (tables, chaises...) renvoie plus directement à l'encombrement produit par ces objets.

Il convient donc de privilégier des manipulations qui permettent de bien réaliser les mises au point qui élucident ces confusions de langage. Certaines habiletés spatiales sont sans doute requises pour mener à bien ces distinctions. Nous nous limiterons cependant à analyser la notion de volume en tant que grandeur, analyse que nous n'aborderons qu'à la fin pour ne pas rompre la continuité de ce texte.

Une première formule pour le prisme droit à base rectangulaire

Dans ce qu'ils ont fait antérieurement, les élèves (au primaire) ont procédé au dénombrement plus ou moins désordonné des unités d'un solide considéré. En trouvant le volume de plusieurs prismes droits à partir de tables de valeurs données aux côtés, les enseignants font habituellement «conclure» aux élèves que le volume est donné par le produit des trois dimensions: longueur × largeur × hauteur. Cette formule (qui fait apparaître un produit) peut aussi être présentée comme une généralisation de la formule de l'aire du rectangle. Pour plusieurs enseignants, le volume est donc l'aboutissement d'une expérience de dénombrement validée par une suite de vérifications. La formule a un caractère mystérieux en ce qu'elle est «découverte» après une suite de vérifications. Au mieux, les élèves peuvent vérifier qu'elle fonctionne. Notre approche du volume s'écarte de cette perspective et exige le recours à des habiletés spatiales que nous allons décrire.

Nous abordons la formule avec les élèves comme une *systématisation du dénombrement* des unités dans le solide considéré. On vise à découvrir par raisonnement *cette manière d'organiser le dénombrement des unités*. Ainsi, une *démarche particulière* de dénombrement se traduit par *une expression* qui décrit une manière de calculer le nombre d'unités contenues dans la «boîte». L'expression trouvée

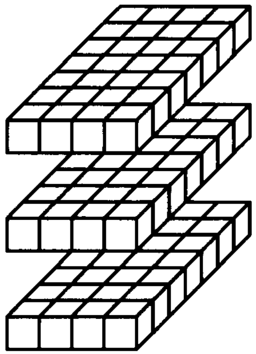


Figure 4

layers, or even **the ability to visualize the operation and express it in terms of quantification**, is the primary skill required to discover the formula for the volume of a right prism. Also involved is the notion that the sum of the units in the solid as a whole is the sum of the units in each layer —a natural property of measurement. Therefore, the first formula we arrive at is as follows:

VOLUME = number of units per layer × number of layers

From a pedagogical point of view, we considered it expedient to avoid the introduction of volume directly in terms of standard units: cm^3. Instead, we opted for a situation in which the students could reflect on the possible forms of a box of sugar containing a specific number of cubes. The use of previously memorized formulas is thus avoided. The resulting expression does not depend heavily on symbols and it enables the students to focus on the object for which the volume is sought, as well as on the procedure used.

The obstacle of round objects

In any subsequent application of the basic formula to more complex objects, the problem of breaking up units arises. A single sugar cube is not the same as two half cubes or four quarter cubes. The introduction of formulas of volume must therefore involve a stage of *acceptance* that the unit of measure can take on very diverse forms when a solid is dissected. This is a familiar problem when dealing with round objects. According to teachers at the secondary level, when students begin secondary school,† they are very reticent to accept that round objects can have a calculable volume, as they do not see how such objects can contain cubic units—a foreseeable aftermath of the teaching dispensed in elementary school! Are there any critical experiments that can dispel such views? In our study, we felt it would be important to introduce solids with fractional linear dimensions early on. However, in doing so, we merely initiated students to smaller and smaller subunits. For students at that level, calculating the volume of a rounded solid will never approximate an abstract process such as that devised by Archimedes or, later, Newton. It is by accepting the invariance of the volume of solids that have undergone transformations that they will be able to equate the volume of a rounded solid with that of a right prism that is deemed

† Translator's note: In the Québec school system, the first year of secondary school is equivalent to seventh grade.

sera évidemment équivalente à la formule de base ; elle traduit en mots les « actions commandées » par la formule.

C'est la notion de tranche ou d'étage qui est ici introduite (**figure 4**). La décomposition en tranches du prisme droit ou encore **la capacité de visualiser cette décomposition tout en l'articulant avec le dénombrement** requis pour trouver le volume est une habileté majeure requise pour obtenir la formule de volume du prisme droit. Intervient également la conviction que la somme des unités du solide entier est la somme du nombre d'unités dans chaque tranche : une propriété naturelle de la mesure. La première formule à laquelle on aboutit est donc :

VOLUME = nombre d'unités par tranche × nombre de tranches

Pédagogiquement, nous avons considéré comme rentable d'éviter d'introduire le volume directement à partir des unités standard : cm^3. Nous avons opté pour une situation dans laquelle les élèves s'interrogent sur la forme que peuvent prendre des boîtes de sucre contenant un certain nombre de cubes. Le recours aux formules déjà mémorisées est ainsi en partie contrecarré. L'expression obtenue a un caractère peu symbolique et encourage l'élève à revenir à l'objet pour lequel le volume est exigé et aux actions qu'il a posées pour le trouver.

L'obstacle des corps ronds

Par la suite, toute généralisation de la formule à des objets plus complexes posera le problème de la *fragmentation des unités*. En effet, un cube de sucre n'est pas la même chose que deux demi-cubes et il en est ainsi pour quatre quarts de cube. L'introduction des formules de volume doit donc passer, à une certaine étape, par une *acceptation* que l'unité de volume peut se retrouver dans des formes spatiales diverses lorsqu'on procède à leur découpage. Cette difficulté est reconnue comme l'obstacle des « corps ronds ». Selon les enseignants de ce niveau, c'est en effet avec beaucoup de réticence que les élèves, à leur entrée au secondaire, acceptent que les corps de forme arrondie puissent avoir un volume calculable. Comment peuvent-ils « contenir » des unités de forme cubique ? Conséquence prévisible de l'enseignement primaire ! Mais existe-t-il des expériences critiques qui induisent des convictions contraires ? Nous avons cru bon d'introduire rapidement des solides dont les dimensions linéaires sont fractionnaires. Mais on ne fait ainsi qu'initier

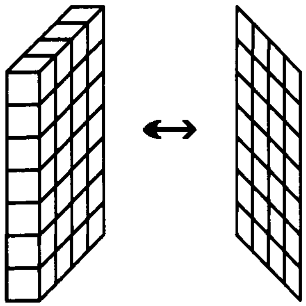


Figure 5

equivalent. Nevertheless, we maintain that the early introduction of subunits is a step in the right direction.

The standard formula

The transition from the basic formula to the standard formula requires reasoning that goes beyond pure empiricism. In the formula, "number of units per layer" must be replaced by "base area." This is achieved by the teacher manipulating both a layer, and a rectangle representing the base. The manipulation illustrates a one-to-one correspondence between each cm^3 of the layer and each cm^2 of the base. This correspondence does not establish an equivalence between two calculations but rather suggests that both calculations, because of their similarity, will lead to the same results. In that respect, this correspondence is much more a form of reasoning than the result of evidence found through experimentation (see **Figure 5**).

Through a similar argument, we can demonstrate that the height accurately represents the number of layers, especially when a fraction of a layer is involved. This leads us, therefore, to the standard formula:

VOLUME = base area × height

Cavalieri's principle applied to inclined solids

Experiments conducted in the classroom have demonstrated that the sectioning of objects into layers in order to determine their volume naturally leads students to use dissection to find the volume of inclined solids. Thus, students without any specific briefing are able to ascertain that the volume of an inclined solid is the base area times the height, since solids can always be sectioned into layers. In fact, students envisage very thin layers that can slide on top of one another. They implicitly use Cavalieri's principle[3] in this type of analysis of inclined solids.

> **Cavalieri's principle** Given two solids and a plane, suppose that every plane parallel to the given plane, intersecting one of the two solids, also intersects the other, and gives cross sections with the same area. Then the two solids have the same volume.[4]

Figure 6a illustrates Cavalieri's principle as applied to an inclined solid. As **Figure 6b** illustrates, however, there are more complex cases as well. Cavalieri's principle is based on

les élèves à des sous-unités de plus en plus petites. Calculer le volume de solide ayant des formes arrondies ne correspondra jamais, pour les élèves de ce niveau, à la limite d'un processus abstrait semblable à celui imaginé par Archimède et, après lui, par Newton. C'est en acceptant l'invariance du volume de solides que l'on transforme qu'ils attribueront à un solide de forme arrondie un volume égal à celui d'un prisme droit décidé équivalent ; en attendant que les formules viennent évacuer la difficulté. Nous croyons cependant que l'introduction rapide de sous-unités reste un pas dans la bonne direction.

La formule standard

Le passage de la formule de base à la formule standard exige un autre raisonnement qui dépasse un recours exclusif à l'empirisme. Il faut, en effet, remplacer « nombre d'unités par tranche » par « aire de la base ». Ceci est réalisé grâce à une manipulation de l'enseignant avec une tranche et un carton de forme rectangulaire représentant la base. Cette manipulation met en évidence l'existence d'une correspondance bi-univoque entre les cm^3 de la tranche et les cm^2 de la base. Cette mise en correspondance ne conduit pas à l'égalité de deux calculs mais mène plutôt à une analyse implicite du fait que les deux démarches, par leur similarité, vont conduire à la même réponse. En ce sens, elle tient beaucoup plus du raisonnement que d'une conviction issue d'une évidence expérimentale (voir **figure 5**).

Par une argumentation semblable, on montre que la hauteur représente précisément le nombre de tranches et surtout dans le cas où on a une fraction de tranche. On aboutit à la formule standard:

VOLUME = aire de la base × hauteur

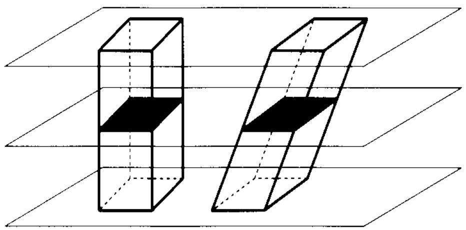
Des tranches au principe de Cavalieri pour les solides inclinés

Comme l'a montré l'expérimentation faite en classe, découper les objets en tranches pour trouver leur volume conduit naturellement les élèves à recourir au découpage pour « trouver le volume » de solides inclinés. C'est ainsi que les élèves, sans préparation particulière affirment que, pour les solides inclinés, on fait toujours le produit de l'aire de la base par la hauteur car on peut toujours découper en tranches. En fait, les élèves imaginent des tranches qui peuvent glisser

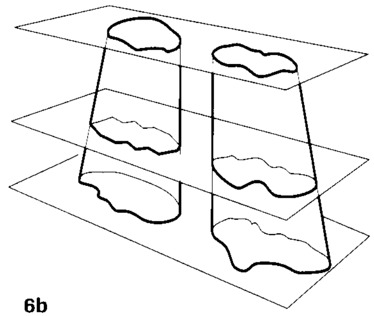
[3] Cavalieri: c. 1598-1647.

[4] P.G. O'Daffer and S.R. Clemens, *Geometry: An Investigative Approach.* Menlo Park, CA: Addison Wesley, 1976, p. 406.

Principe de Cavalieri
Cavalieri's principle



6a



6b

Figure 6

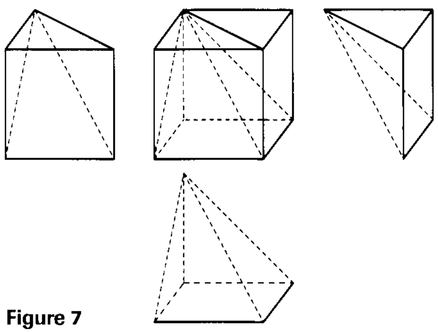
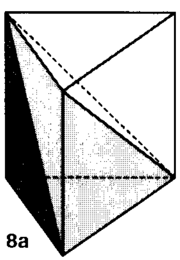
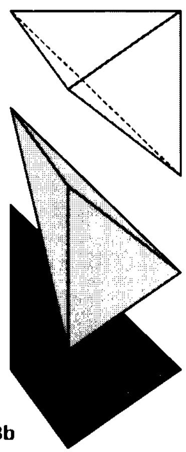


Figure 7



8a



8b

Figure 8
8a. Breakdown. 8b. Completion
8a. Décomposition. 8b. Composition.

the fact that in certain transformations, solids retain their volume. *Cavalierian transformations appear as slide transformations of the thinnest possible layers.* (Of course, a rigorous analytical definition could be formulated for such transformations.) Cavalierian transformations are, in the author's opinion, *opposed to transformations of non-rigid structures that are carried out by pivoting and that generally do not conserve the same volume.* Such is the case with the bottomless box that can be taken apart, as illustrated in **Figure 3**.

Sectioning a prism into pyramids

Another important step in applying the standard formula of volume is determining the volume of pyramids. In this case, sectioning two- and three-dimensional representations is essential. The starting point can be a cube sectioned into square-based pyramids. We can work with both two- and three-dimensional representations, but eventually a planar representation of a cube will have to be broken down, as illustrated in **Figure 7**.

The objective is to develop students' representation skills so as to enable them to transform any triangular right pyramid into a right prism with the same base and height. Transformations involving breakdown and completion are illustrated in **Figures 8a and 8b** respectively. Though complementary, the two transformations must be distinguished from each other.

We should add, however, that the actual transformation skill is undoubtedly not needed in order to establish the formula. The mere knowledge that a triangular prism can always be broken down into three pyramids of the same volume and that a prism can always be constructed from a

les unes sur les autres ; ces tranches sont imaginées « très minces ». Ils font implicitement usage, dans ce genre d'analyse des solides inclinés, du principe de Cavalieri[3] que nous allons maintenant formuler.

> **Principe de Cavalieri** Si chacun des plans d'une famille de plans parallèles à une direction donnée coupe deux solides selon des figures ayant la même aire, alors ces deux solides ont le même volume.[4]

La **figure 6a** montre l'application du principe de Cavalieri pour un solide incliné; mais il existe des cas plus complexes comme le montre la **figure 6b**. Le principe de Cavalieri repose sur le fait que certaines transformations appliquées à des solides conservent leur volume. *Les transformations de Cavalieri se présentent comme des glissements de tranches que l'on imagine aussi petites que possible.* Elles pourraient, bien entendu, être analytiquement définies d'une manière rigoureuse. À mon sens, les transformations de Cavalieri *sont à opposer à d'autres transformations de structures non rigides qui, elles, s'effectuent par pivotement et ne conservent en général pas le volume.* C'est le cas de la boîte sans fond que l'on peut déformer et que nous avons présentée à la **figure 3**.

Le découpage de prisme en pyramides

Une autre étape importante dans la généralisation de la formule standard du volume est le passage au volume des pyramides. Ici, il nous apparait que l'articulation des représentations 2D et 3D est essentielle. On peut d'abord se limiter au cube à couper en pyramides à base carrée. On peut travailler sur des représentations 2D et 3D mais il faudra éventuellement bien réaliser la décomposition d'un cube représenté dans le plan, comme nous l'avons illustré à la **figure 7**.

Le but visé est de développer chez les étudiants leur compétence à représenter, de manière à leur permettre de transformer toute pyramide droite à base triangulaire en un prisme droit ayant la même base et la même hauteur. Les transformations de décomposition et de composition sont illustrées aux **figures 8a et 8b**. Elles sont surtout à distinguer l'une de l'autre même si elles sont complémentaires.

Cependant, l'habileté proprement dite n'est sans doute pas nécessaire à l'établissement de la formule. En effet, *la seule conviction* que l'on peut toujours *décomposer* un prisme

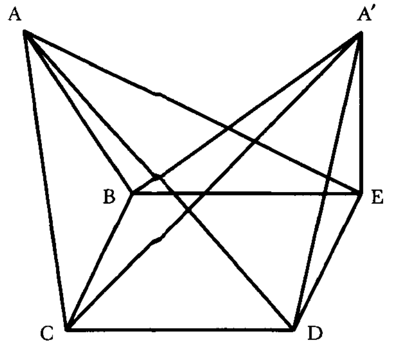


Figure 9

pyramid by adding two other pyramids of the same volume is sufficient to conclude that the volume of a pyramid can be determined by dividing the volume of a prism by 3. That knowledge may be the result of the student doing the construction himself, which is preferable, or of a demonstration by the teacher.

Cavalieri and pyramids of identical volume

Pyramids with the same base and height have the same volume. This assertion is used in determining the volume of a pyramid on the basis of that of a prism. The teacher can use a model of a pyramid made of elastic bands. By moving the vertex while keeping it in the same plane, the teacher can illustrate an entire family of pyramids of the same height and base and, by using Cavalieri's principle, can conclude that all the pyramids are identical in volume. In fact, each has the same volume as a reference pyramid, A′B′C′D′. As **Figure 9** illustrates, each intersecting plane produces shapes that are identical in area.

To demonstrate that these shapes have the same area, the teacher can simply argue on the basis of a plane (π) intersecting the height of the pyramids by a ratio 1:2 or 1:3. Thus, a ratio of 1:3 applied to the height of each (AH and A′H′)[5] will result in the following:

$$AX/AH = A'H'/A'H' = 1/3$$

(X and X′ being the intersection point of π).

If Thales' theorem is applied to the triangles whose two sides consist of a height and an edge , we can conclude that the sides will be intersected in the same ratio:

$$AS/AB = AT/AC = AU/AD = 1/3$$

and $$A'S'/A'B' = A'T'/A'C' = A'U'/A'D' = 1/3.$$

Finally, upon considering each face of the pyramid, we can conclude using Thales' theorem once again that each side of the triangle intersected by π and π', namely ST, TU and US, is a third of the length of AB, BC, CA. Similarly, S′T′, T′U′ and U′S′ are a third of the length of A′B′, B′C′ and C′A′.

Furthermore, since

$$AB = A'B',\ BC = B'C' \text{ and } CA = C'A'$$

(the sides of the base of the pyramid), it follows that

$$ST = S'T',\ TU = T'U' \text{ and } US = U'S'.$$

triangulaire en trois pyramides de même volume et toujours *construire* un prisme à partir d'une pyramide en y accolant deux autres pyramides de même volume, permet d'établir la nécessité de la division par 3 pour passer du volume du prisme à celui de la pyramide. Cette conviction peut résulter du fait que l'élève a lui-même réalisé ces constructions (ce qui est préférable) ou que l'enseignant en a fait une démonstration.

Cavalieri et les pyramides de même volume

Les pyramides de même base et de même hauteur ont le même volume. Cette proposition est utilisée dans le passage du volume du prisme à celui de la pyramide. Grâce à un petit montage (**figure 9**), l'enseignant peut présenter une pyramide faite de bandes élastiques et, en déplaçant son sommet de manière à le maintenir dans un même plan, il peut illustrer toute une famille de pyramides de même hauteur et de même base. En utilisant le principe de Cavalieri, il peut conclure que toutes ces pyramides ont le même volume. En effet, chacune d'elles a le même volume qu'une pyramide de référence A′B′C′D′. Comme le montre la **figure 9**, chaque coupe détermine des figures de même aire.

Pour montrer que ces figures ont la même aire, il peut en classe argumenter simplement en considérant un plan quelconque π coupant la hauteur des pyramides à la moitié ou au tiers. Alors, pour chacune des hauteurs AH et A′H′ [5] (voir **figure 10**), on aura, par exemple, le rapport 1/3

$$AX/AH = A'H'/A'H' = 1/3$$

X et X′ étant les points d'intersection de π avec les hauteurs.

Et, en appliquant le théorème de Thalès aux triangles dont deux des côtés sont respectivement la hauteur et une arête, on déduit que chacune des arêtes sera coupée dans un même rapport. On aura donc

$$AS/AB = AT/AC = AU/AD = 1/3$$

et $$A'S'/A'B' = A'T'/A'C' = A'U'/A'D' = 1/3.$$

Finalement, en considérant chacune des faces des pyramides, le théorème de Thalès nous permet de conclure que chaque côté de la figure découpée par π et π', soit ST, TU et US vaut le tiers de AB, BC, CA. De même, S′T′, T′U′ et U′S′ vaut le tiers de A′B′, B′C′ et C′A′.

Et, comme

$$AB = A'B',\ BC = B'C' \text{ and } CA = C'A'$$

[5] In this paper, AH refers to the measurement (AH) for all letter symbols A and H.

[5] Dans le présent chapitre, AB désigne la mesure de (AB) pour toutes majuscules A et B.

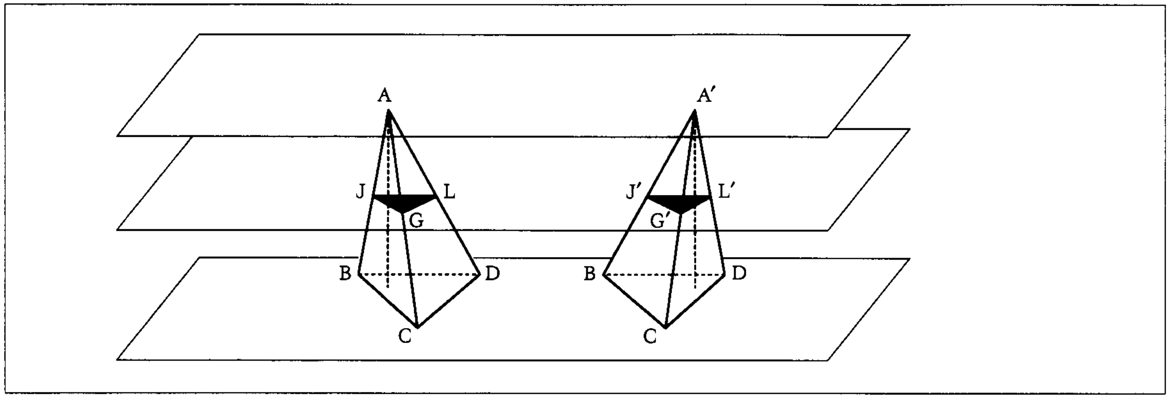


Figure 10

Consequently, figures STU et S'T'U' are equal in area, as they are congruent. Therefore, by using Cavalieri's principle, we can conclude that both pyramids are identical in volume. Although a specific ratio of 1:3 has been used here for purposes of illustration, *m/n* can be used instead in order to make a generalization.

Breakdown of a cone and sphere into pyramids

Once the volume of the given triangular pyramids is known, the volume of polygonal-based pyramids can be established. The base simply has to be broken down into triangles. Thus, students will conclude that the volume of a pyramid with a polygonal base is the product of height times base area divided by 3.

The progression to the volume of a cone is then simple. **Figure 11** illustrates how a cone can *always* be approached by means of a series of pyramids, each with a regular polygonal base. As the number of sides of the polygon increases, the pyramid increasingly resembles a cone. The principle of extremes is applied to the polygon, which then becomes a circle, thus transforming the pyramid into a cone. Without hesitation, students will assert that the formula remains valid—the volume is still the product of the base area (πr^2) times height divided by 3.

For the sphere, the process is similar. The starting point is a soccer ball: a truncated icosahedron. Its surface consists of 12 pentagons and 20 hexagons—polygons that can be sectioned into triangles. Since a soccer ball can be broken down into triangular pyramids, the following formula can be used to determine the approximate volume of a sphere:

VOLUME = (area of polygons × height) / 3.

étant les côtés respectifs des bases des pyramides, on conclut que:

ST = S'T', TU = T'U' and US = U'S'.

Ainsi les figures STU et S'T'U' ont la même aire car elles sont congrues. On conclut donc en s'appuyant sur le principe de Cavalieri que les deux pyramides ont le même volume.

Nous avons pris pour la démonstration le rapport particulier 1/3, mais il suffit de remplacer 1/3 par *m/n* dans la démonstration pour la généraliser.

Décomposition du cône et de la sphère en pyramides

Une fois le volume de pyramides triangulaires connu, on peut passer au volume de pyramides polygonales quelconque; il suffit de décomposer la base en triangles. Ainsi, les élèves affirmeront que le volume des pyramides est le produit de la hauteur par l'aire de la base divisé par 3.

On aborde ensuite facilement le volume du cône. La **figure 11** montre comment le cône peut *toujours* être approché par une suite de pyramides à bases polygonales régulières. Lorsque le nombre de côtés des polygones augmente, la pyramide s'approche de plus en plus d'un cône. Le passage à la limite se fait sur le polygone devenant un cercle ce qui amène la pyramide à se transformer en cône. Les élèves affirmeront sans hésitation que la formule est toujours valable; le volume est toujours le produit de l'aire de la base (πr^2) par la hauteur divisé par 3.

Pour la sphère, la démarche est semblable. On part d'un ballon de soccer: un icosaèdre tronqué. Sa surface est composée de 12 pentagones et de 20 hexagones; ces polygones sont décomposables en triangles. On peut donc décomposer un ballon de soccer en pyramides triangulaires. Pour la sphère, on a donc trouver un volume approximatif avec la formule:

VOLUME = (aire des polygones × hauteur) / 3.

La discussion avec les élèves conduit à établir que l'aire des polygones à la limite devient l'aire de la sphère et la hauteur des pyramides sera le rayon de la sphère. Ainsi, le volume de la sphère peut s'écrire:

VOLUME = (aire de la sphère × rayon) / 3.

Bien que le passage à la limite pose, pour la rigueur mathématique, des problèmes qui exigeraient de prendre des précautions spéciales pour le découpage en triangles, les

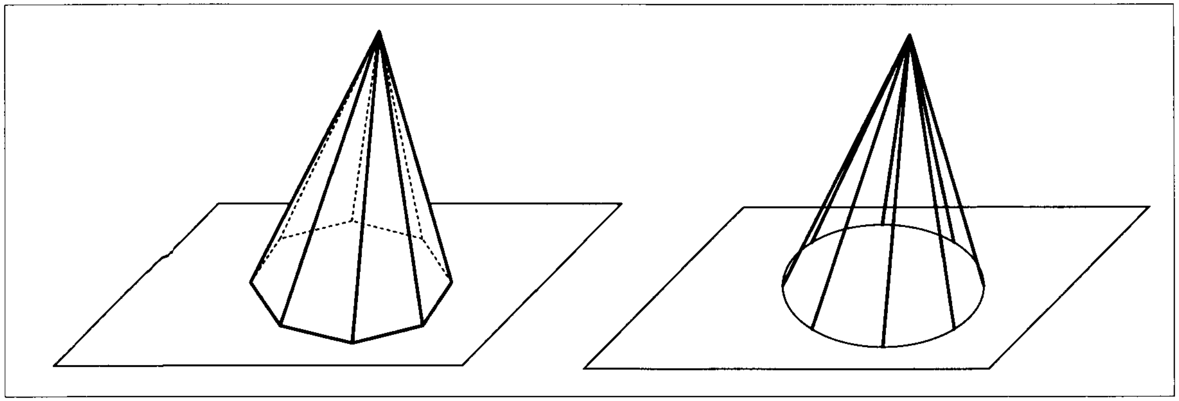


Figure 11

Through discussion with the students, it is determined that the area of the polygons is essentially the area of the sphere and the height of the pyramids is the radius of the sphere. Thus, the volume of the sphere can be expressed as follows:

VOLUME = (area × radius of the sphere) / 3.

Although the use of extremes, from the perspective of mathematical precision, presents certain problems that require special precautions to be taken when shapes are sectioned into triangles, students are quickly convinced of the validity of the process. The spatial skills that would enable students to detect incorrect extremes are of a higher level and would merit further study.

Magnitude and measurement

Before concluding, let us look at a major obstacle to the effective use of the concept of volume. Volume must be considered in terms of magnitude, a term that has fallen out of use in mathematics. As it is traditionally defined, magnitude refers to a numerical quantitative measure of an object. For instance, when considered in terms of magnitude, a segment is expressed as length, a surface as area, and a solid as volume. There is therefore a duality between the object being measured and the measurement itself, even though in everyday life, such a distinction is not always made. Therefore, a segment may commonly be referred to as a length, and a surface as an area.[6]

It would be appropriate to bring the process of measurement to the forefront. We must make it easier to distinguish between the object being measured and the measurement itself. However, such a distinction, which is purely math-

[6] In terms of magnitude, volume is primarily numerical. In French, there is often confusion between a solid or space figure and its corresponding measurement of volume. For example, three-dimensional figures are sometimes referred to (incorrectly) as *volumes* rather than *solides*.

élèves se laissent facilement convaincre de la validité du processus. Ici, les habiletés spatiales qui les rendraient vigilants par rapport aux passages à la limite incorrecte sont d'un niveau supérieur et mériteraient d'être mieux étudiées.

Grandeur et mesure

Terminons avec l'une des difficultés majeures s'opposant à l'utilisation efficace de la notion de volume. Le volume est une grandeur, terme maintenant absent du vocabulaire mathématique. Selon son acception traditionnelle, une grandeur se présente comme une caractéristique numérique d'un objet auquel on applique une mesure. Les segments, les surfaces et les solides sont autant d'objets géométriques qui, lorsque considérés comme grandeurs, deviennent des longueurs, des aires et des volumes. Les grandeurs ont donc une «double personnalité» que leur confère cette dualité objet-mesure. On constate d'ailleurs que dans la vie courante on ne fait pas toujours la distinction entre l'objet et sa mesure. On parle d'une longueur comme d'un segment, on confond souvent surface et aire. En tant que grandeur, le volume est avant tout numérique. Mais la distinction entre solide ou espace occupé et la mesure qui en est le volume n'est pas toujours faite. On dira, par exemple, que l'on a différents volumes sur la table (en se référant à des solides); ou encore que l'on cherche l'espace occupé plutôt que la mesure de l'espace occupé.

Il convient de mettre le processus par lequel on établit la mesure au premier plan; on doit faciliter la distinction entre l'objet mesuré et sa mesure. Mais cette distinction, toute mathématique, n'est ni toujours commode, ni toujours efficace. Il arrive que la formulation de problèmes, s'effectuant dans le langage courant, néglige la distinction entre l'objet et sa mesure. Cette difficulté, provenant d'une absence de précision dans l'expression, s'inscrit cependant dans la logique de l'utilisation de la métonymie qui confond ici l'objet avec sa mesure. Faut-il s'en prendre à l'utilisation métonymique du terme volume. Elle entraîne peu d'erreurs de raisonnement ou de calcul; ainsi, nous croyons qu'il faudra tolérer certaines ambiguïtés tout en prenant les précautions qui s'imposent. Et, c'est là que nous revenons aux habiletés spatiales. En effet, le volume comme la mesure de l'espace occupé par un solide est une interprétation qui est à l'occasion prise en défaut. Il arrive souvent que «l'objet» ematical, is not always convenient or expedient. In everyday language, problems are often expressed with a lack of precision. Metonymy is often used, and the distinction between the object and its measurement is thus neglected. We will have to tolerate the long-standing ambiguity surrounding magnitude, which likely stems from the way language is used in reasoning. However, certain precautions must be taken, which takes us back to spatial skills. The definition of volume as the measure of space occupied by a solid is sometimes erroneous. The object of measure (for the purpose of determining volume) is often simply a portion of space that has been designated or circumscribed by various means. Therefore, the same means of measurement is applied to empty space and the potential contents of a container or residual space between the surfaces of solids. If certain students suddenly accept volume as a measure of empty space, can this be attributed to certain spatial skills? If such is the case, will they have mentally created portions of space at a higher level of abstraction?

Conclusion

The analysis of the concept of volume that has been presented and illustrated here is intended to demonstrate how volume can be a catalyst for the development of spatial skills. In order to find formulas, transformations of space objects must be carried out (by means of Cavalieri's principle, for instance). This involves spatial skills. Spatial skills are combined with various forms of reasoning, such as the use of extremes and limitations. We have stressed the fact that such skills require the coordination of numerical and visual elements—a deeper understanding of which will lead to more effective teaching of the concept of volume.

The reader will hopefully be convinced that the introduction of the concept of volume in academic programs provides an excellent opportunity to foster the development of various skills that can be applied to other space-related problems. This paper has nevertheless not dealt with describing basic spatial skills that should be developed by means of basic construction and drawing. There is still a great deal of work to be done in exploring basic spatial skills alongside those that relate more specifically to the concept of volume. As our studies have shown, that is where a large portion of our students' difficulties lie. Further analysis and research is certainly needed.

dont on cherche le volume soit simplement une portion d'espace désigné ou circonscrit à l'aide de diverses modalités: le contenu potentiel d'un contenant ou encore l'espace résiduel déterminé entre les surfaces de solides. Peut-on expliquer par le recours à certaines habiletés spatiales que, soudainement, des élèves acceptent que le volume soit une «mesure de vide»? Ont-ils alors créé dans leur esprit des portions d'espace de niveau d'abstraction plus grand?

Conclusion

L'analyse de la notion de volume que nous avons présentée avec quelques épisodes d'enseignement a permis de montrer comment le concept de volume peut être considéré comme un catalyseur d'habiletés spatiales. La recherche des formules, entre autres, exige des transformations d'objets spatiaux comme celle de Cavalieri qui renvoie à des habiletés spatiales. Ces habiletés sont combinées à des formes diverses de raisonnement: recours aux cas extrêmes, utilisation de processus limite... Nous avons insisté sur le fait qu'elles exigent une coordination du numérique avec le visuel, coordination qu'il faudrait mieux connaître pour concevoir un enseignement amélioré de la notion de volume.

Nous espérons avoir convaincu le lecteur que l'introduction du volume dans les programmes devrait être envisagée comme une occasion exceptionnelle conduisant au développement d'habiletés diverses transférables à d'autres problèmes qui concernent l'espace. Cependant, il n'en demeure pas moins que ce texte a négligé la description d'habiletés spatiales de base dont le développement devait être assuré par des activités initiales de constructions et de dessins. L'articulation de ces habiletés avec celles plus proprement reliées au volume reste un domaine à approfondir: c'est surtout à ce niveau que réside la plus grande partie des difficultés des élèves après notre expérience d'enseignement. Il faut y voir un champ d'analyse et de recherche.

Bibliography / Bibliographie

[1] Piaget J. et Inhelder B., 1941. *Le développement des quantités physiques chez l'enfant.* Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

[2] Ricco G., Vergnaud G.et Rouchier A., 1983. "Représentation du volume et arithmétisation—entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans." *Recherches en didactique des mathématiques*, 4.1.

[3] Vergnaud G., Rouchier A., Desmoulières S., Landre C., Marthe P., Ricco G., Samurçay R., Rogalski J. et Viala A., 1983. "Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 à 13 ans)." *Recherches en didactique des mathématiques*, 4.1.