QÜESTIIÓ, vol. 21, 1 i 2, p. 321-357, 1997

PROBLEMAS TIPO EN TEORÍA DE LA DECISIÓN

RAMÓN ALONSO SANZ*
Universidad Politécnica de Madrid

El objetivo de este artículo es ilustrar las técnicas y los conceptos básicos de la Teoría de la Decisión. Para lograr este objetivo se ha adoptado el problema tipo quizá más sencillo: el problema de la inversión. Éste queda caracterizado por dos decisiones alternativas (invertir o no invertir) y dos estados de la naturaleza (apreciación y depreciación). La información adicional adopta la forma de opinión de un experto. El problema se ha resuelto en forma extensa y normal. Las consecuencias se suponen expresadas en su forma primaria, como costes de oportunidad y como pérdidas. El árbol de decisión y la solución minimax también son considerados.

Type problems in Decision Theory

Keywords: Decision theory, problems.

Clasificación AMS: 62C05

* Ramón Alonso Sanz. ETSI Agrónomos. Unidad de Estadística. Universidad Politécnica de Madrid. C. Universitaria. 28040 Madrid. **e-mail:** `ralonso@ccupm.upm.es`

– Article rebut el febrer de 1995.

– Acceptat el desembre de 1996.

1. INTRODUCCIÓN

Los ejercicios de este artículo son casos particulares del planteado por la disyuntiva: invertir (d_1) o no invertir (d_2) una cierta cantidad x, en un proceso en el que se puede ganar (θ_1) o perder (θ_2) la cantidad y, con probabilidades $p(\theta_1) \equiv p$, $p(\theta_2) \equiv 1-p$.[1]

	θ_1	θ_2
d_1	$x+y$	$x-y$
d_2	x	x

La confianza del decisor en el experto al que se puede consultar se cuantifica mediante las verosilimitudes de acierto: $p(z_1/\theta_1) = p(z_2/\theta_2) = \pi$, siendo Z la variable aleatoria que designa la opinión de experto.

En los problemas 1.* se fija π a un valor que supone considerar al experto como tal: $\pi = 0,75$, siendo p un parámetro. Por el contrario, en los problemas 2.*, $p = 0,5$, valor que hace equivalentes ambas decisiones, siendo π el parámetro. En los problemas 3.*, tanto las probabilidades *a priori* como las verosimilitudes de acierto son parámetros. En el problema 4 se considera un contexto de incertidumbre total.

Índice de problemas

$\pi = 1/2$	$p = 3/4$				
1.1.A	2.1.A	forma	extensa	con	consecuencias primarias
1.1.B	2.1.B	«	«	«	costes de oportunidad
1.2.A	2.2.A	forma	normal	«	consecuencias primarias
1.2.B	2.2.B	«	«	«	costes de oportunidad
1.2.C	2.2.C	«	«	«	pérdidas
p y π parámetros					
3.1		forma	normal	con	costes de oportunidad
3.2		«	«	«	pérdidas
3.3		árbol de	decisión	con	consecuencias primarias
3.4		«	«	«	costes de oportunidad
π parámetro					
4		incertidumbre total			

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Sea el problema de decisión (D,Θ,X): un decisor ha de elegir una de entre m decisiones posibles (D); el resultado final (X) depende de su elección y de un conjunto de factores que él no controla, denominados genéricamente *Naturaleza* (Θ). Supondremos que ésta se puede presentar en n formas o *estados.*

		ESTADOS DE LA NATURALEZA				
		θ_1	$\cdots$	θ_j	$\cdots$	θ_n
	d_1					
	$\vdots$					
DECISIONES	d_i			x_{ij}		
	$\vdots$					
	d_m					

Si se decide d_i y la naturaleza se presenta en el estado θ_j, la consecuencia es x_{ij}; en su *forma primaria* consideraremos que es una *ganancia*.

2.1. Decisión en ambiente de incertidumbre parcial o riesgo

Las probabilidades asociadas a los estados de la naturaleza, $p(\theta_j)$, miden el *grado de creencia* en su verificación. Supondremos que el criterio de decisión es el de la maximización del valor medio.

Análisis en forma extensa

$$\underset{\text{Decisión de Bayes}}{d^*} = d_i \Big/ \left\{ \max_i \left(V_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, p(\theta_j) \right) \right\} = \underset{\text{Valor medio sin Información}}{V\text{sinI}}$$

- *Decisión con información adicional*

Supongamos que, antes de tomar la decisión el decisor pide información (opinión) a un experto. Sea Z la variable aleatoria que describe la opinión del experto y sea $\mathcal{Z} = \{z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n\}$ su dominio, donde z_k indica que el experto opina que se dará θ_k.

Ante la opinión del experto, el decisor modifica las probabilidades iniciales, *a priori*; los valores *a posteriori* se obtienen aplicando el teorema de Bayes:

a posteriori *a priori*

$$p(\theta_j/z_k) = \frac{p(z_k/\theta_j)\ p(\theta_j)}{p(z_k)}$$

Verosimilitudes: miden el grado de confianza del decisor en el experto

El criterio de elección seguirá siendo el de maximización del valor medio, pero utilizando ahora las probabilidades a posteriori. Es decir, supuesto $Z = z_k$:

$$d_i^* = d_i / \max_i \left\{ V_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \underbrace{\frac{p(z_k/\theta_j)\ p(\theta_j)}{p(z_k)}}_{p(\theta_j/z_k)} \right\}$$

• *Valor medio del proceso de decisión con información*

$$\boxed{V\mathrm{conI} = \sum_{k=1}^{n} \left(\max_i \left[\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \frac{p(z_k/\theta_j)\ p(\theta_j)}{\cancel{p(z_k)}} \right] \right) \cancel{p(z_k)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\max_i \left[\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, p(z_k/\theta_j) p(\theta_j) \right] \right)}$$

Valor de la información: $V\mathrm{deI} = V\mathrm{conI} - V\mathrm{sinI}$

Propiedad: $V\mathrm{deI} \geqslant 0$.

• *Información Perfecta:* Sería la que aportaría un «experto perfecto». Aquél que verificase (siempre en opinión del decisor):

$$p(z_k/\theta_k) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(\theta_k/z_k) = 1.$$

Se cumple[2] $V\mathrm{conIP} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\max_i x_{ij} \right) p(\theta_j)$. Ver Problema 1.1.A.

En el extremo opuesto, restringiendo el problema a $n = 2$, el decisor puede creer que el «experto» siempre falla, y asignar las verosimilitudes: $p(z_2/\theta_1) = p(z_1/\theta_2) =$

1 $\Rightarrow$ $p(\theta_2/z_1) = p(\theta_1/z_2) = 1$. En este caso, la regla de decisión es, naturalmente, hacer lo contrario de lo que opina el «experto».

• *Información irrelevante*

Si todas las verosimilitudes son iguales, $V\text{conI} = V\text{sinI}$[3] $\Rightarrow$ $V\text{deI} = 0$.

Costes de oportunidad

$$y_{ij} = \left(\max_i \ x_{ij}\right) - x_{ij}$$

Un mecanismo alternativo de resolver un problema de decisión, generalmente más cómodo, se basa en la *minimización del coste de oportunidad medio*[4]

$$d^* = d_i / \left(\min_i \left\{ C(d_i) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} p_j \right\}\right) = C\text{sinI}$$

Se cumple (ver nota):

(1) $$C\text{sinI} = V\text{conIP} - V\text{sinI} = V\text{deIP}$$

Con opinión del experto,

(2) $$C\text{conI} = V\text{conIP} - V\text{conI}^5$$

De la diferencia $[1] - [2]$: $$V\text{deI} = C\text{sinI} - C\text{conI}$$

• *Pérdidas (valores opuestos a las ganancias)*

$$\ell_{ij} = -x_{ij}$$

(3) $$d^* = d_i / \underbrace{\min_i \left\{ L(d_i) = \sum_{j=1}^{n} \ell_{ij} p_j \right\}}_{L\text{sinI}} = \underbrace{\min_i \left\{ -\sum_{j=1}^{n} x_{ij} p_j \right\}}_{-V\text{sinI}} \equiv \max_i \{V_i\}$$

Análogamente:

(4) $$L\text{conI} = -V\text{conI}.$$

De la diferencia $[3] - [4]$ resulta: $$V\text{deI} = l\text{sinI} - L\text{conI}.$$

En los problemas resueltos con la matriz de consecuencias en forma de pérdidas, se ha supuesto que a todos los elementos de dicha matriz en su forma primaria se les ha restado la cantidad x. De forma general, si se efectúa una traslación en k unidades:

$$x'_{ij} = x_{ij} - k,$$

resulta:

$$d^* = d_i / \left(\max_i \left(\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} p(\theta_j) \right) \right) = V\text{sinI}' = V\text{sinI} - k.$$

Análogamente: $\quad V\text{conI}' = V\text{conI} - k;\quad$ de la diferencia de igualdades

$$V\text{deI} = V\text{conI}' - V\text{sinI}'.$$

Análisis en forma normal

Se basa en la evaluación de las **estrategias** o **reglas de decisión:**

$$D = \{\sigma(z)/\delta : \quad \mathcal{Z} \longrightarrow D\}$$

$$\delta^* = \delta/\max_{\delta} \left(V(\delta) = \sum_{j=1}^{n} V(\delta/\theta_j) p(\theta_j) \right)$$

$$V(\delta/\theta_j) = \sum_{k=1}^{n} V(\delta/\theta_j, z_k) p(z_k/\theta_j)$$

En los problemas planteados con costes de oportunidad o pérdidas, la operación de *minimización* ha de sustituir a la de *maximización*.

2.2. Decisión en ambiente de incertidumbre total

El decisor no tiene ninguna apreciación de la probabilidad de los estados de la naturaleza.

Supondremos planteado el problema con las consecuencias como pérdidas ℓ_{ij} (problema (D, Θ, L))y que el criterio de decisión es el *minimax*, en virtud del cual, la **decisión no aleatorizada** *minimax* es:

$$d^* = d_i / \min_i \, (\max_j \, \ell_{ij})$$

Decisiones aleatorizadas

Una distribución de probabilidad sobre D define una decisión aleatorizada. Así, $\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_m \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \end{pmatrix}$. Identificaremos Δ y Π.

La *pérdida media asociada a la decisión aleatorizada* Δ supuesto θ_j es

$$L_j(\Delta) = L(\Delta/\theta_j) = \sum_i \pi_i \ell_{ij}$$

Δ^* es una decisión *minimax* si:

$$\Delta^* = \Delta/\min_{\Delta} \underbrace{\left(\max_j L(\Delta/\theta_j) \right)}_{v} = \max_j L(\Delta^*/\theta_j) = V \quad (\text{valor } \textit{minimax})$$

Métodos de obtención de $\boldsymbol{\Delta^*}$

① *Programación Lineal*

$V = \min V$	$\min v$	$\min \sum_{i=1}^{m} \pi'_i$
$\mathcal{L}(\Delta/\theta_j) = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \ell_{ij} \leqslant v$	$\sum_{i=1}^{m} \overset{\pi_{ij}/v}{\pi'}_i \ell_{ij} \leqslant 1$	$\sum_{i=1}^{m} \pi'_i \ell_{ij} \leqslant 1$
$j = 1,2,\dots,n$	$j = 1,2,\dots,n$	$j = 1,2,\dots,n$
$\pi_i \geqslant 0 \quad \forall i \quad 1'\pi = 1$	$\sum_{i=1}^{m} \pi'_i = \dfrac{1}{v}$	$\pi'_i \geqslant 0 \quad \forall i$
		(supuesto v positivo)

② *Método gráfico* (supuesto $n = 2$).

El **conjunto de pérdidas** asociado a Δ es $\boldsymbol{L}(\Delta) = (L_1(\Delta), L_2(\Delta))$. Los conjuntos de pérdidas del conjunto de decisiones aleatorizadas forman la **región de pérdidas**. Si se aceptan únicamente decisiones puras, la región de pérdidas $(\mathcal{G})$ está formada por los puntos $(\circ) : \boldsymbol{L}(d_i) = (\ell_{i1}, \ell_{i2})$. Pero si se considera la posibilidad de aleatorizar las decisiones, problema extendido $(\mathcal{D}, \Theta, \Lambda)$, la *región de pérdidas* (G) está formada por la *envolvente convexa* de $\mathcal{G}$. Son **equivalentes** los puntos de la región de pérdidas que comparten el mismo valor máximo de la pérdida media: v; así son equivalentes (al valor de su mayor coordenada, v), los puntos de la frontera de todo conjunto de puntos de la forma $\{(x,y)/x \leq v, y \leq v\}$. Designando por $N(v)$ a dicho conjunto frontera, el punto *minimax* se encuentra en la «última» intersección de $N(v)$ y G:

$$V = \min v / N(v) \cap G \neq \emptyset.$$

Gráficamente:

3. PROBLEMAS RESUELTOS

Enunciado común:

Sea el problema de decisión con matriz de consecuencias:

	θ_1	θ_2
d_1	$x+y$	$x-y$
d_2	x	x

$y > 0 \quad p \equiv p(\theta_1)$

El decisor pide opinión a un experto, que le merece una confianza cuantificada por las verosimilitudes de acierto:

$$p(z_1/\theta_1) = p(z_2/\theta_2) = \pi.$$

Problema 1.1.A

Sea $\pi = \dfrac{3}{4}$ en el enunciado común.

Obtener, aplicando el método de análisis en **forma extensa**:

1) *a)* la regla de decisión y el valor medio del proceso de decisión sin información $[V\text{sinI}]$,

b) el valor medio del proceso de decisión con información perfecta $[V\text{conIP}]$, y

c) el valor medio de la información perfecta $[V\text{deIP}]$. Representar gráficamente $V\text{sinI}(p)$, $V\text{conIP}(p)$ y $V\text{deIP}(p)$.

2) La regla de decisión y el valor medio del proceso de decisión contando con la información (opinión) del experto $[V\text{conI}]$.

3) El valor medio de la información del experto $[V\text{deI}]$.

4) Representar gráficamente, en un cuadro conjunto, las expresiones de $V\text{sinI}(p)$ y $V\text{conI}(p)$. Destacar en dicho cuadro la expresión de $V\text{deI}(p)$.

Solución:

1) *a)* **Sin información:**

$$d^* = d_i / \left\{ \max_i \left(V_i = \sum_{j=1}^{2} x_{ij}\, p(\theta_j) \right) \right\} = V\text{sinI}$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= (x+y)p + (x-y)(1-p) = 2yp + x - y \\ V_2 &= xp + x(1-p) = x \end{aligned}\right\}$$

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad p_e = \frac{1}{2}, \quad V_e = x$$

$$\boxed{d^* = \begin{cases} d_2 & \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ d_1 & \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}}$$

p	$V\text{sinI}$
$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	x
$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$2yp + x - y$

b) ***Con información perfecta:***

$$V\text{conIP} = \sum_{j=1}^{2}\left(\max_i x_{ij}\right)p(\theta_j) = (x+y)p + x(1-p) = yp + x$$

c) ***Valor medio de la información perfecta:***

$$V\text{deIP} = V\text{conIP} - V\text{sinI}$$

$$V\text{deIP} = \begin{cases} yp & \text{si } p \leqslant 1/2 \\ -yp+y & \text{«} \quad p \geqslant 1/2 \end{cases}$$

2) ***Con información parcial:***

$$\boxed{Z = z_k} \qquad d^* = d_i / \max_i \left\{ V(d_1) = \sum_{j=1}^{2} x_{ij} \underbrace{\frac{p(z_k/\theta_j)p(\theta_j)}{p(z_k)}}_{p(\theta_j/z_k)} \right\}$$

$\boxed{Z = z_1}$

$$
\left.\begin{aligned}
V_1 &= (x+y)\frac{p\frac{3}{4}}{p(z_1)} + (x-y)\frac{(1-p)\frac{1}{4}}{p(z_1)} = \frac{1}{p(z_1)}\frac{1}{4}\left((2x+4y)p + x - y\right) \\
V_2 &= x\frac{p\frac{3}{4}}{p(z_1)} + x\frac{(1-p)\frac{1}{4}}{p(z_1)} = \frac{1}{p(z_1)}\frac{1}{4}(2xp + x)
\end{aligned}\right\} d^* = \begin{cases} d_2 & \overline{\left[0, \frac{1}{4}\right]}^{\,p} \\ \\ d_1 & \left[\frac{1}{4}, 1\right] \end{cases}
$$

$$
V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad p_e = \frac{1}{4}, \quad V_e = \frac{1}{p(z_1)}\frac{1}{4}\frac{3}{2}x
$$

$\boxed{Z = z_2}$

$$
\left.\begin{aligned}
V_1 &= (x+y)\frac{p\frac{1}{4}}{p(z_2)} + (x-y)\frac{(1-p)\frac{3}{4}}{p(z_2)} = \frac{1}{p(z_2)}\frac{1}{4}\left(-(2x+4y)p + 3(x-y)\right) \\
V_2 &= x\frac{p\frac{1}{4}}{p(z_2)} + x\frac{(1-p)\frac{3}{4}}{p(z_2)} = \frac{1}{p(z_2)}\frac{1}{4}(-2xp + 3x)
\end{aligned}\right\} d^* = \begin{cases} d_1 & \overline{\left[0, \frac{3}{4}\right]}^{\,p} \\ \\ d_2 & \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}
$$

$$
V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad p_e = \frac{3}{4}, \quad V_e = \frac{1}{p(z_2)}\frac{1}{4}\frac{7}{2}x
$$

Las **estrategias** (o reglas de decisión) posibles son:

$$
\delta_{12} = \begin{cases} d_1 & \text{si } Z = z_1 \\ d_2 & \text{si } Z = z_2 \end{cases} \quad \delta_{21} = \begin{cases} d_2 & \text{si } Z = z_1 \\ d_1 & \text{si } Z = z_2 \end{cases} \quad \delta_{11} = \ d_1 \quad \forall\, z \quad \delta_{22} = \ d_2 \quad \forall\, z
$$

decisión inducida por el experto	decisión opuesta a la inducida por el experto	caso omiso al experto

Las estrategias óptimas del problema son:

$$
V\text{conI} \ = \ \sum_{k=1}^{2} \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{2} x_{ij}\, p(z_k/\theta_j)\, p(\theta_j) \right\}
$$

$$
\boxed{d^* = \left\{ \begin{array}{lc} & p \\ \delta_{22} & \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ & \\ \delta_{12} & \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \\ & \\ \delta_{11} & \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{array} \right.}
\quad
\begin{array}{|c|l}
V\text{conI} & \\
x & = \frac{1}{4}\left((2\cancel{xp} + x) + (-2\cancel{xp} + 3x)\right) \\
 & \\
yp + x - \frac{y}{4} & = \frac{1}{4}\left((\cancel{2x} + 4y)p + x - y) + (-2\cancel{xp} + 3x)\right) \\
 & \\
2yp + x - y & = \frac{1}{4}\left(((\cancel{2x} + 4y)p + x - y) + (-\cancel{2x} + 4y)p + 3(x - y)\right)
\end{array}
$$

Obsérvese como para la resolución del problema, no ha sido necesario calcular las expresiones de $p(z_k)$.

En definitiva,

a) si el decisor se encuentra *a priori* «muy seguro», adopta la decisión en la que confía,

b) en caso contrario, adopta la decisión inducida por el experto.

En el primer supuesto, no aprecia en ninguna medida la opinión del experto ($V\text{deI} = 0$), mientras que su valoración es creciente conforme se consideren valores de p próximos a 0,5. (ver apartado 3) y figura 4)).

3)

$$
\boxed{V\text{deI} = \left\{ \begin{array}{cc} & p \\ 0 & \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ yp - \frac{y}{4} & \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ -yp + \frac{3}{4}y & \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 0 & \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{array} \right.}
$$

4)

Problema 1.1.B

Resolver *1.1.A* utilizando **costes de oportunidad**.

Solución:

Matriz de costes[6]:

$$y_{ij} = \left(\max_i x_{ij}\right) - x_{ij}$$

	θ_1	θ_2
d_1	0	y
d_2	y	0

1) *Sin información:*

$$d^* = d_i / \left(\min_i \left\{ C(d_i) = \sum_{j=1}^{2} y_{ij}\, p(\theta_j) \right\} \right) = C\text{sinI}$$

$$C(d_i) = V\text{conIP} - C(d_i)$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 0p + y(1-p) = y - yp = (x+yp) - (x - y + 2yp) \\ C_2 &= yp + 0(1-p) = \quad yp = (x+yp) - (x) \end{aligned}\right\}$$

$$C_1 = C_2 \quad \Rightarrow \quad p_e = \frac{1}{2} \quad C_e = \frac{y}{2}$$

$$= V\text{deIP} = V\text{conIP} - V\text{sinI}$$

2) *Con información parcial:*

$$\boxed{Z = z_k} \qquad d^* = d_i / \min_i \left\{ C(d_1) = \sum_{j=1}^{2} y_{ij} \frac{p(z_k/\theta_j)\, p(\theta_j)}{p(z_k)} \right\}$$

$$\boxed{Z = z_1}$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 0\frac{p\frac{4}{3}}{p(z_1)} + y\frac{(1-p)\frac{1}{4}}{p(z_1)} = \frac{1}{p(z_1)}\frac{1}{4}(-yp+y) \\ C_2 &= y\frac{p\frac{3}{4}}{p(z_1)} + 0\frac{(1-p)\frac{1}{4}}{p(z_1)} = \frac{1}{p(z_1)}\frac{1}{4}(3yp) \end{aligned}\right\} d^* = \begin{cases} d_2 & \dfrac{p}{\left[0, \frac{1}{4}\right]} \\ & \\ d_1 & \left[\frac{1}{4}, 1\right] \end{cases}$$

$$C_1 = C_2 \quad \Rightarrow \quad p_e = \frac{1}{4}, \quad C_e = \frac{1}{p(z_1)}\frac{1}{4}\frac{3}{4}y$$

$\boxed{Z = z_2}$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 0\frac{p\frac{1}{4}}{p(z_2)} + y\frac{(1-p)\frac{3}{4}}{p(z_2)} = \frac{1}{p(z_2)}\frac{1}{4}(3y-3yp) \\ C_2 &= y\frac{p\frac{1}{4}}{p(z_2)} + 0\frac{(1-p)\frac{3}{4}}{p(z_2)} = \frac{1}{p(z_2)}\frac{1}{4}(yp) \end{aligned}\right\} d^* = \left\{\begin{array}{ll} & \underline{p} \\ d_2 & \left[0, \frac{3}{4}\right] \\ & \\ d_1 & \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{array}\right.$$

$$C_1 = C_2 \quad \Rightarrow \quad p_e = \frac{3}{4}, \quad C_e = \frac{1}{p(z_2)}\frac{1}{4}\frac{3}{4}y$$

Resulta: $$C\text{conI} = \sum_{k=1}^{2} \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{2} y_{ij}\, p(z_k/\theta_j)\, p(\theta_j) \right\}$$

$$\boxed{d^* = \left\{\begin{array}{lll} & \underline{p} & \underline{C\text{conI}} \\ \delta_{22} & \left[0, \frac{1}{4}\right] & yp \\ \delta_{12} & \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] & y/4 \\ \delta_{11} & \left[\frac{3}{4}, 1\right] & y - yp \end{array}\right.} \quad \begin{array}{l} = ((3yp) + (yp))/4 \\ = ((y - yp) + (yp))/4 \\ = (y - yp) + (3y - 3yp))/4 \end{array}$$

3) La expresión de VdeI calculada en *1.1.B* se obtiene igualmente calculando la diferencia $C\text{sinI} - C\text{conI}$

4) Ver gráfico del problema *1.2.B*.

Problema 1.2.A

Resolver *1.1.A* aplicando el método de análisis en **forma normal**.

Solución:

$$\delta^* = \delta/\max_{\delta}\{V(\delta) = V(\delta/\theta_1)\theta_1 + V(\delta/\theta_2)(1-p)\}$$

$$V(\delta/\theta_1) \;=\; V(\delta/\theta_1,z_1)p(z_1/\theta_1)+V(\delta/\theta_1,z_2)p(z_2/\theta_1)=V(\delta/\theta_1,z_1)\frac{3}{4}+V(\delta/\theta_1,z_2)\frac{1}{4}$$

$$V(\delta/\theta_2) \;=\; V(\delta/\theta_2,z_1)p(z_1/\theta_2)+V(\delta/\theta_2,z_2)p(z_2/\theta_2)=V(\delta/\theta_2,z_1)\frac{1}{4}+V(\delta/\theta_2,z_2)\frac{3}{4}$$

$$V(\delta_{12}/\theta_j,z_k)=x_{kj} \quad V(\delta_{21}/\theta_j,z_1)=x_{2j} \quad V(\delta_{21}/\theta_j,z_2)=x_{1j}$$

$$V(\delta_{11}/\theta_j,z_k)=x_{ij} \quad V(\delta_{22}/\theta_j,z_k)=x_{2j}$$

$$V(\delta_{12}) \;=^{7} \boxed{yp+x-\frac{y}{4}} \; V(\delta_{21}) \;=^{8} \boxed{yp+x-\frac{3y}{4}}=V(\delta_{12})-\frac{y}{2}$$ ➪ δ_{21} dominada

$$V(\delta_{11}) \;=^{9} \boxed{2yp+x-y} \; V(\delta_{22}) \;=\; \boxed{x}$$

Resulta:

Problema 1.2.B

Resolver *1.2.A* con **costes de oportunidad**.

Solución:

$$\delta^* = \delta / \min_{\delta}\{C(\delta) = C(\delta/\theta_1)p + C(\delta/\theta_2)(1-p) = \underbrace{V\,\mathrm{conIP}}_{x+yp} - V(\delta)\}$$

$$C(\delta_{12}) \;=^{10}\; \boxed{\frac{y}{4}p} \qquad C(\delta_{21}) \;=^{11}\; \boxed{\frac{3}{4}y = C(\delta_{12}) + \frac{y}{2}} \Rightarrow \quad \delta_{21} \quad \text{dominada}$$

$$C(\delta_{11}) \;=^{12}\; \boxed{y - yp} \qquad C(\delta_{22}) \;=^{13}\; \boxed{yp}$$

Problema 1.2.C

Resolver *1.2.A* con **pérdidas**.

Solución:

La matriz de pérdidas, efectuada la traslación de magnitud x, resulta:

	θ_1	θ_2
d_1	$-y$	y
d_2	0	0

1) ***Sin información:***

$$d^* = d_i / \left(\min_i \left\{ L(d_i) = \sum_{j=1}^{2} \ell_{ij}\, p(\theta_j) \right\} \right) = L\text{sinI}$$

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= -yp + y(1-p) = y - 2yp \\ L_2 &= 0p + 0(1-p) \quad = \quad 0 \end{aligned}\right\} L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} p_e &= \frac{1}{2} \\ L_e &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{d^* = \left\{ \begin{array}{lcc} & p & L\text{sinI} \\ d_2 & \left[0, \frac{1}{2}\right] & 0 \\ d_1 & \left[\frac{1}{2}, 1\right] & y - 2yp \end{array} \right.}$$

2) $$d^* = \delta / \min_{\delta} \{ L(\delta) = L(\delta/\theta_1)\, p + L(\delta/\theta_2)(1-p) \}$$

$L(\delta_{12})$ =[14] $\boxed{-yp + y/4}$ $\quad L(\delta_{21})$ =[15] $\boxed{-yp + 3y/4} = L(\delta_{12}) + \frac{y}{2} \quad \Rightarrow \quad \delta_{21}$ dominada

$L(\delta_{11})$ =[16] $\boxed{-2yp + y}$ $\quad L(\delta_{22}) = \boxed{0} = -V(\delta_{22}) - x$

Problema 2.1.A

Sea $p=\dfrac{1}{2}$ en el enunciado común.

Obtener, aplicando el método de análisis en **forma extensa**:

1) Obtener la regla de decisión y el valor medio del proceso de decisión sin contar con la información del experto [VsinI], el valor medio del proceso contando con información perfecta [VconIP] y el valor medio de la información perfecta [VdeIP].

2) La regla de decisión y el valor medio del proceso de decisión contando con la información (opinión) del experto [$V\text{conI}(\pi)$]

3) El valor medio de la información del experto [$V\text{deI}(\pi)$].

4) Representar gráficamente, en un cuadro conjunto, las expresiones de $V\text{sinI}(\pi)$ y $V\text{conI}(\pi)$. Destacar en dicho cuadro la expresión de $V\text{deI}(\pi)$.

Solución:

1) ***Sin información:***

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= (x+y)\ \frac{1}{2} + (x-y)\ \frac{1}{2} = x \\ V_2 &= \quad x \quad \frac{1}{2} + \quad x \quad \frac{1}{2} = x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V\text{sinI} = x \\ d_1 \quad \text{y} \quad d_2 \quad \text{equivalentes} \end{array}\right.$$

Con información perfecta:

$$\begin{aligned} V\text{conIP} &= (x+y)\frac{1}{2}+x\frac{1}{2} = x+\frac{y}{2}, \\ V\text{deiP} &= V\text{conIP} - V\text{sinI} = x+\frac{y}{2}-x = \frac{y}{2} \end{aligned}$$

2) ***Con información parcial:***

$\boxed{Z=z_1}$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= (x+y)\ \frac{\pi\frac{1}{2}}{p(z_1)} + (x-y)\ \frac{(1-\pi)\frac{1}{2}}{p(z_1)} = \frac{1}{p(z_1)}\frac{1}{2}(2y\pi+x-y) \\ V_2 &= \quad x \quad \frac{\pi\frac{1}{2}}{p(z_1)} + \quad x \quad \frac{(1-\pi)\frac{1}{2}}{p(z_1)} = \frac{1}{p(z_1)}\frac{1}{2}x \end{aligned}\right\} \quad d^* = \left\{\begin{array}{ll} & \pi \\ d_2 & \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ d_1 & \left[\frac{1}{2},1\right] \end{array}\right.$$

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \pi_e = \frac{1}{2} \qquad V_e = \frac{1}{p(z_1)}\frac{1}{2}x$$

$$\boxed{Z = z_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = (x+y)\,\dfrac{(1-\pi)\frac{1}{2}}{p(z_2)} + (x-y)\,\dfrac{\pi\frac{1}{2}}{p(z_2)} = \dfrac{1}{p(z_2)}\dfrac{1}{2}(-2y\pi+x+y) \\[2em] V_2 = \quad x \quad \dfrac{(1-\pi)\frac{1}{2}}{p(z_2)} + \quad x \quad \dfrac{\pi\frac{1}{2}}{p(z_2)} = \dfrac{1}{p(z_2)}\dfrac{1}{2}x \end{array}\right\} \quad d^* = \left\{\begin{array}{ll} & \pi \\ d_1 & \left[0, \frac{1}{2}\right] \\[1em] d_2 & \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{array}\right.$$

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \pi_e = \frac{1}{2} \qquad V_e = \frac{1}{p(z_2)}\frac{1}{2}x$$

Resulta:

$$\boxed{d^* = \left\{\begin{array}{ll} & p \\ \delta_{21} & \left[0, \frac{1}{2}\right] \\[1em] & \frac{1}{2} \\[1em] \delta_{12} & \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{array}\right.} \quad \boxed{\begin{array}{c} V\text{conI} \\ -y\pi + x + \frac{y}{2} \\[1em] x \\[1em] y\pi + x - \frac{y}{2} \end{array}} \begin{array}{l} \\ = \frac{1}{2}(x + (-2y\pi + x + y)) \\[1em] \\[1em] = \frac{1}{2}((2y\pi + x - y) + x) \end{array}$$

$$V\text{conI}(\pi = 1) = V\text{conIP} = y \times 1 + x - \frac{y}{2} = x + \frac{y}{2}.$$

3)

$$V\text{deI} = \left\{\begin{array}{c} -y\pi + x + \frac{y}{2} \\[1em] x \\[1em] y\pi + x + \frac{y}{2} \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c} x \\[1em] x \\[1em] x \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} & p \\ -y\pi + \frac{y}{2} & \left[0, \frac{1}{2}\right] \\[1em] 0 & 1/2 \\[1em] y\pi - \frac{y}{2} & \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{array}\right.$$

4) Ver figura del problema *2.2.A*.

Problema 2.1.B

Resolver *2.1.A* utilizando **costes de oportunidad**.

Solución:

1) ***Sin información:***

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 0\frac{1}{2} + y\frac{1}{2} = \frac{y}{2} \\ C_2 = y\frac{1}{2} + 0\frac{1}{2} = \frac{y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C\text{sinI} = \frac{y}{2} \\ d_1 \quad \text{y} \quad d_2 \quad \text{equivalentes} \end{array}\right.$$

2) ***Con información:***

$\boxed{Z = z_1}$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 0\dfrac{\pi\frac{1}{2}}{p(z_1)} + y\dfrac{(1-\pi)\frac{1}{2}}{p(z_1)} = \dfrac{1}{p(z_1)}\dfrac{1}{2}(y - y\pi) \\[2ex] C_2 = y\dfrac{\pi\frac{1}{2}}{p(z_1)} + 0\dfrac{(1-\pi)\frac{1}{2}}{p(z_1)} = \dfrac{1}{p(z_1)}\dfrac{1}{2}y\pi \end{array}\right\} d^* = \left\{\begin{array}{ll} & \pi \\ d_2 & \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ d_1 & \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{array}\right.$$

$$C_1 = C_2 \quad ➪ \quad \pi_e = \frac{1}{2} \qquad C_e = \frac{1}{p(z_1)}\frac{1}{2}\frac{y}{2}$$

$\boxed{Z = z_2}$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 0\dfrac{(1-\pi)\frac{1}{2}}{p(z_2)} + y\dfrac{\pi\frac{1}{2}}{p(z_2)} = \dfrac{1}{p(z_2)}\dfrac{1}{2}y\pi \\[2ex] C_2 = y\dfrac{(1-\pi)\frac{1}{2}}{p(z_2)} + 0\dfrac{\pi\frac{1}{2}}{p(z_2)} = \dfrac{1}{p(z_2)}\dfrac{1}{2}(y - y\pi) \end{array}\right\} d^* = \left\{\begin{array}{ll} & \pi \\ d_1 & \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ d_2 & \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{array}\right.$$

$$C_1 = C_2 \quad ➪ \quad \pi_e = \frac{1}{2} \qquad C_e = \frac{1}{p(z_2)}\frac{1}{2}\frac{y}{2}$$

Resulta:

$$\boxed{d^* = \left\{\begin{array}{ll} & p \\ \delta_{21} & \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ & \frac{1}{2} \\ \delta_{12} & \left[\frac{1}{2}, 0\right] \end{array}\right.} \quad \begin{array}{|c|} C\text{conI} \\ y\pi \\ \frac{y}{2} \\ y - y\pi \end{array} \begin{array}{l} \\ = \frac{1}{2}(y\pi + y\pi) \\ \\ = \frac{1}{2}\left((y - y\pi) + (y - y\pi)\right) \end{array}$$

4) Ver figura del problema *2.2.B*.

Problema 2.2.A

Resolver *2.1.A* aplicando el método de análisis en **forma normal**.

Solución:

$$\delta^* = \delta/\max_{\delta}\left\{V(\delta) = V(\delta/\theta_1)p(\theta_1) + V(\delta/\theta_2)p(\theta_2) = \frac{1}{2}\left(V(\delta/\theta_1) + V(\delta/\theta_2)\right)\right\}$$

$$V(\delta/\theta_1) = V(\delta/\theta_1, z_1)p(z_1/\theta_1) + V(\delta/\theta_1, z_2)p(z_2/\theta_1) = V(\delta/\theta_1, z_1)\pi + V(\delta/\theta_1, z_2)(1-\pi)$$

$$V(\delta/\theta_2) = V(\delta/\theta_2, z_1)p(z_1/\theta_2) + V(\delta/\theta_2, z_2)p(z_2/\theta_2) = V(\delta/\theta_2, z_1)(1-\pi) + V(\delta/\theta_2, z_2)$$

$$V(\delta_{12}) =^{17} \boxed{y\pi + x - \frac{y}{2}} \quad V(\delta_{21}) =^{18} \boxed{-y\pi + x + \frac{y}{2}} \quad V(\delta_{11}) =^{19} \boxed{x} = V(\delta_{22})$$

Problema 2.2.B Resolver *2.2.A* con **costes de oportunidad**.

Solución:

$$C(\delta) = C(\delta/\theta_1)p(\theta_1) + C(\delta_{12}/\theta_2)p(\theta_2) = \frac{1}{2}\left(C(\delta/\theta_1) + C(\delta/\theta_2)\right) = V\text{conIP} - V(\delta)$$

$$C(\delta_{12}) =^{20} \boxed{y - y\pi} \quad C(\delta_{21}) =^{21} \boxed{y\pi} \quad C(\delta_{11}) =^{22} C(\delta_{22}) =^{23} \boxed{y/2}$$

Las figuras precedentes resumen los resultados del tipo de problemas 2. Se observa en ellas una perfecta simetría en el valor de la información $(V\mathrm{deI})$. Para los casos extremos: $\pi = 1$ (experto) y $\pi = 0$ («antiexperto»), la información alcanza su máximo valor, ya que ambos son perfectamente útiles al decisor. El valor de la información es nulo para el «aexperto»: $\pi = 1/2$. Excepto en este caso, en el que se podría afirmar que «el experto está como el decisor»: $p = \pi = 1/2$, la opinión del experto, real o supuesto, tiene valor, bien para hacer lo que induce, bien para tomar la decisión contraria.

Problema 2.2.C

Resolver *2.2.B* con **pérdidas**.

Solución:

$$L(\delta) = \frac{1}{2}\left(L(\delta/\theta_1) + L(\delta/\theta_2)\right) = -V(\delta) - x$$

$$L(\delta_{12}) \;=^{24}\; \boxed{\frac{y}{2} - y\pi} \quad L(\delta_{21}) \;=^{25}\; \boxed{y\pi - \frac{y}{2}} \quad L(\delta_{11}) \;=^{26}\; \boxed{0} = L(\delta_{22})$$

Problema 3.1

Considérese el problema planteado en su enunciado común.

Determinar las expresiones de los costes de oportunidad medios de las posibles estrategias y las funciónes $C\text{conI}(p,\pi)$ y $V\text{deI}(p,\pi)$.

Solución:

$$C(\delta) = C(\delta/\theta_1)p + C(\delta/\theta_2)(1-p)$$

$$C(\delta/\theta_1) \;=\; C(\delta/\theta_1,z_1)p(z_1/\theta_1) + C(\delta/\theta_1,z_2)p(z_2/\theta_1) = C(\delta/\theta_1,z_1)\pi + C(\delta/\theta_1,z_2)(1-\pi)$$

$$C(\delta/\theta_2) \;=\; C(\delta/\theta_2,z_1)p(z_1/\theta_2) + C(\delta/\theta_2,z_2)p(z_2/\theta_2) = C(\delta/\theta_2,z_1)(1-\pi) + C(\delta/\theta_2,z_2)\pi$$

Tomando del Problema *2.2.B* las expresiones de $C(\delta/\theta,z)$, resulta:

$$C(\delta_{12}) \;=^{27}\; \boxed{y(1-\pi)} \qquad C(\delta_{21}) \;=^{28}\; \boxed{y\pi}$$

$$C(\delta_{11}) \;=^{29}\; \boxed{y(1-p)} \qquad C(\delta_{22}) \;=^{30}\; \boxed{yp}$$

De *1.1.B:*

$$d^* = \left\{ \begin{array}{lcc} & p & C\text{sinI} \\ d_2 & \left[0,\frac{1}{2}\right] & yp \\ d_1 & \left[\frac{1}{2},1\right] & y-yp \end{array} \right.$$

$V\text{deI} = C\text{sinI} - C\text{conI}$

La superficie $C\text{conI}(p,\pi)$ es una pirámide de base en el plano $C = 0$ y de altura $y/2$ en $p = \pi = 1/2$. Su proyección sobre el plano $p - \pi$ genera las cuatro regiones destacadas en la figura siguiente.

La forma de la función $V\text{deI}$ queda caracterizada por las secciones visualizadas en los problemas *1.1.A* y *2.2.A*: es nula en las dos regiones en las que no influye el experto (δ_{11} y δ_{22}) y simétrica respecto a la vertical $p = 0,5$ en el resto. Sobre esta línea se producen los máximos valores de $V\text{deI}$ fijado $\pi : y(\pi - 1/2)$ en δ_{12} e $y(-\pi + 1/2)$ en δ_{21}. El máximo absoluto aparece cuando $\pi = 1$ en el primer caso y $\pi = 0$ en el segundo, es decir:

$$\max(V\text{deI}(p,\pi)) = V\text{deI}(1/2,1)) = V\text{deI}(1/2,0)) = y/2.$$

Resultado ya obtenido en el problema *2.2.A*; corresponde con una situación de máxima incertidumbre del decisor $(p = 1/2)$ y máxima seguridad de acierto/desacierto en el experto.

Problema 3.2

Resolver *3.1* con **pérdidas**.

Solución: Tomando del Problema *2.2.C* las expresiones de $L(\delta/\theta, z)$, resulta:

$L(\delta_{12}) =$[31] $\boxed{y(1-(p+\pi))}$ $\quad$ $L(\delta_{21}) =$[32] $\boxed{y(\pi - p)}$

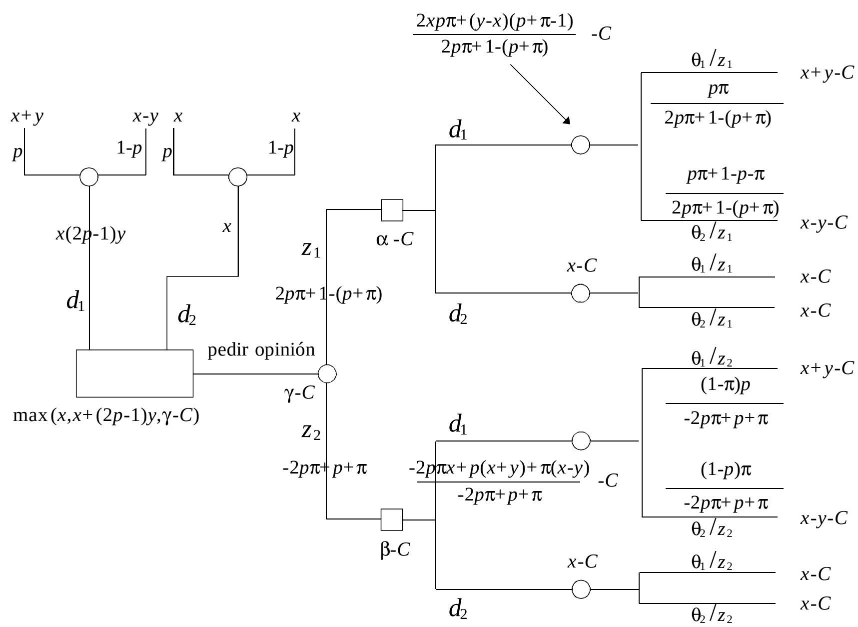
$L(\delta_{11}) =$[33] $\boxed{y(1-2p)}$ $\quad$ $L(\delta_{22}) = \boxed{0}$

La forma de la superficie $L\text{conI}(p,\pi)$ queda caracterizada por las secciones visualizadas en los problemas *1.2.C* y *2.2.C*. En la figura precedente aparecen también las pérdidas medias $L\text{conI} = L\text{sinI} - V\text{deI}$.

Problema 3.3

Dibujar el árbol de decisión correspondiente al *Problema 3.1* planteado con consecuencias dadas en forma primaria. Discutir las decisiones a adoptar en el supuesto de que el experto pida C unidades monetarias.

Solución:



$p(z_1) = 2p\pi + 1 - p - \pi$ $\Rightarrow$[34] $p(z_2) = -2p\pi + p + \pi$

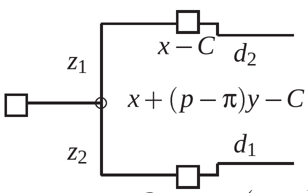
$$p(\theta_1/z_1) \;=\; \frac{p(z_1/\theta_1)p(\theta_1)}{p(z_1)} = \frac{\pi p}{2p\pi+1-(p+\pi)} \quad\Rightarrow\quad p(\theta_2/z_1) = \frac{p\pi+1-(p+\pi)}{2p\pi+1-(p+\pi)}$$

$$p(\theta_1/z_2) \;=\; \frac{p(z_2/\theta_1)p(\theta_1)}{p(z_2)} = \frac{(1-\pi)p}{-2p\pi+p+\pi} \quad\Rightarrow\quad p(\theta_2/z_2) = \frac{-p\pi+\pi}{-2p\pi+p+\pi}$$

$$\frac{2xp\pi+(y-x)(p+\pi-1)}{2p\pi+1-(p+\pi)} - C \;=\; x-C \quad\Rightarrow\quad \boxed{p+\pi=1}$$

$$\frac{-2xp\pi+p(x+y)+\pi(x-y)}{-2p\pi+p+\pi} - C \;=\; x-C \quad\Rightarrow\quad \boxed{p=\pi}$$

$$\frac{\pi \;<\; p, p+\pi \;<\; 1 \quad\Rightarrow\quad \delta_{21}}{C \;<\; \max\{(1-(p+\pi)y,(p-\pi)y\}}$$ [35]

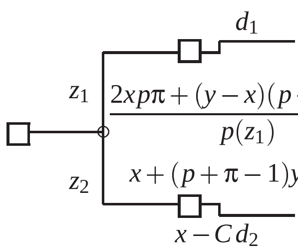


Problema 2.2.A

$$x+(p-\pi)y-C = V(\delta_{21}) = \left\{ \begin{array}{l} p=1/2 \\ \pi \;<\; 1/2 \end{array} \right\} = x+\frac{1}{2}y-\pi y-C$$

$$\frac{-2p\pi x+p(x+y)+\pi(x-y)}{p(z_2)} - C$$

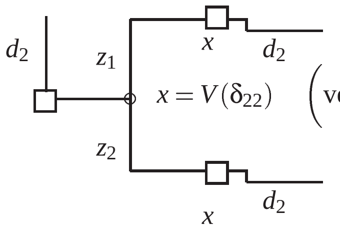
$$\frac{\pi \;>\; p, p+\pi \;>\; 1 \quad\Rightarrow\quad \delta_{12}}{C \;<\; \max\{(\pi-p)y,((p+\pi)-1)y\}}$$ [36]



$$\frac{2xp\pi+(y-x)(p+\pi-1)}{p(z_1)} - C$$

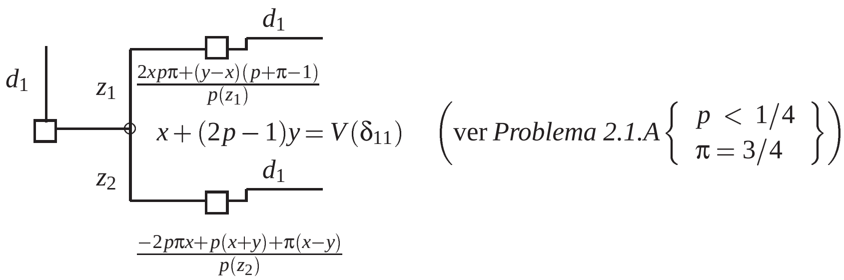
$$x+(p+\pi-1)y-C = V(\delta_{12}) = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\textit{Problema 1.2.A}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \pi=3/4 \\ 1/4 \;<\; p \;<\; 3/4 \end{array} \right\} = x-\frac{1}{4}y+py-C \\ \\ \underline{\textit{Problema 2.2.A}} \\ \left\{ \begin{array}{l} p=1/2 \\ \pi \;>\; 1/2 \end{array} \right\} = x-\frac{1}{2}y+\pi y-C \end{array} \right\}$$

$$\frac{\pi \;>\; p, p+\pi \;>\; 1 \quad\Rightarrow\quad \delta_{22}}{C=0} \equiv d_2 \quad \text{sin experto}$$ [37]



$$x = V(\delta_{22}) \qquad \left(\text{ver } \textit{Problema 2.1.A:} \quad \left\{ \begin{array}{l} p \;<\; 1/4 \\ \pi=3/4 \end{array} \right\}\right)$$

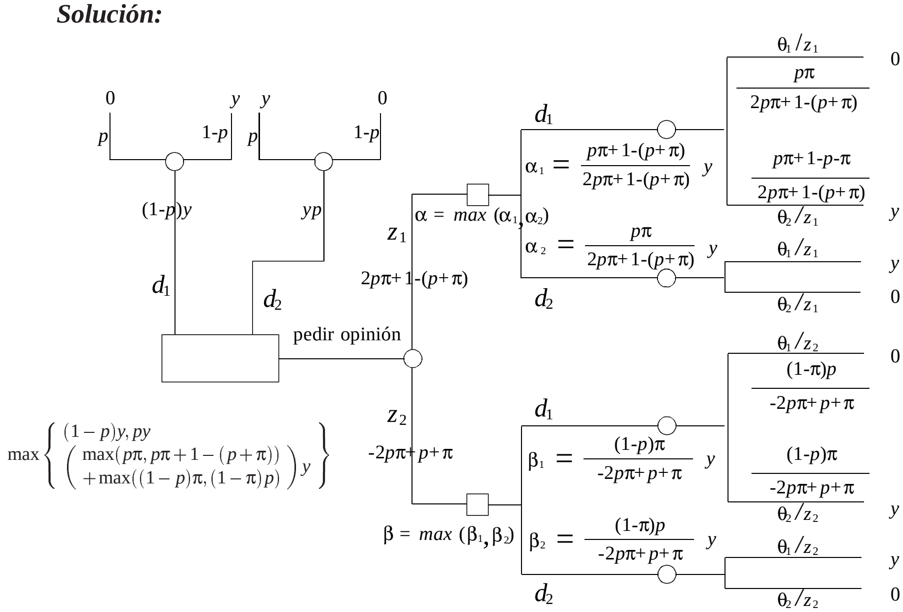
$$\frac{\pi < p, p+\pi > 1 \quad \Rightarrow \quad \delta_{11}}{C=0} \equiv d_1 \quad \text{sin experto}$$ [38]



Problema 3.4

Plantear el problema *3.3* utilizando **costes de oportunidad**.

Solución:



Problema 4

Resolver *3.2* en un contexto de **incertidumbre total**.

Solución:

Decisión no aleatorizada *minimax*

$$\min_i \left(\max_j \ell_{ij} \right) = \min(-y, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d^* = d_2$$

Decisiones aleatorizadas

$$\Delta = \begin{pmatrix} \pi_1 & d_1 \\ \pi_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

1) *Programación lineal*

Para asegurar que el parámetro v es positivo, se ha de tratar una matriz de pérdidas con todos sus valores no negativos. Sumando la cantidad y se consigue este objetivo. Al valor *minimax* obtenido en el problema transformado, $\mathcal{V}$, se le ha de restar y para obtener el del problema original.

max $z = \pi_1' + \pi_2'$

Forma estándar *Solución inicial:*

$$\left.\begin{array}{l} 0\pi_1' + y\pi_2' \leqslant 1 \\ 2y\pi_1' + y\pi_2' \leqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0\pi_1' + y\pi_2' + \pi_3' = 1 \\ 2y\pi_1' + y\pi_2' + \pi_4' = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \pi_1' = \pi_2' = 0 \quad \pi_3' = 1 \\ \pi_4' = 1 \end{array}$$

Método simplex:

						θ
π_3'	0	y	1	0	1	∞
π_4'	$\boxed{2y}$	y	0	1	1	$\leftarrow$
	-1	-1	0	0	0	
	$\uparrow$					

						θ
π_3'	0	0	1	0	1	∞
π_1'	1	$\boxed{1/2}$	0	$1/2y$	$1/2y$	$\leftarrow$
	0	$-1/2$	0	$1/2y$	$1/2y$	
		$\uparrow$				

π_3'	0	0	1	0	1	
π_2'	2	1	0	$1/y$	$1/y$	$\Rightarrow \pi_2 = 1$
	1	0	0	$1/y$	$1/y$	$\Rightarrow \mathcal{V} = y \Rightarrow V = 0$

2) *Método gráfico*

La decisión aleatorizada minimax es por tanto la pura d_2: domina al resto. El valor *minimax* es nulo.

Estrategias aleatorizadas:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_{12} & \delta_{21} & \delta_{11} & \delta_{22} \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{pmatrix}$$

$$L(\Delta/\theta_j) = \sum_k \pi_k L(\delta_k/\theta_j) \qquad \Delta^* = \Delta/\min_{\Delta}\left(\max_j L(\Delta/\theta_j)\right)$$

Del *Problema 3.2:*

$$\begin{aligned} L(\delta_{12}/\theta_1) &= -y\pi & L(\delta_{12}/\theta_2) &= y(1-\pi) & L(\delta_{11}/\theta_1) &= -y = -L(\delta_{11}/\theta_2) \\ L(\delta_{21}/\theta_1) &= -y(1-\pi) & L(\delta_{21}/\theta_2) &= y\pi & L(\delta_{22}/\theta_1) &= 0 = L(\delta_{22}/\theta_2) \end{aligned}$$

En todos los supuestos, el valor *minimax* es nulo.

NOTAS

1. Este ejemplo es utilizado por Lindley, D.V. (1985). *Making Decisions*. Wiley.

2. $$V\text{conI} = \sum_{k=1}^{n}\left(\max_i\left[\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\,p(z_k/\theta_j)\,p(\theta_j)\right]\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\max_i\left[x_{ik}\,p(\theta_k)\right]\right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\max_i x_{ik}\right]p(\theta_k)\right)}_{V\text{conIP}}$$

3. En efecto, si $p(z_k/\theta_j) = 1/n, \quad \forall k, j,$:

$$V\text{conI} = \sum_{k=1}^{n}\left[\max_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\,p(z_k/\theta_j)\,p(\theta_j)\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\max_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\frac{1}{n}p(\theta_j)\right] =$$

$$= n\frac{1}{n}\max_i \sum_j x_{ij}\,p_j = \max_i \sum x_{ij}\,p_j = V\text{sinI}$$

ya que ha desaparecido el subíndice k

4. $$C_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\max_i x_{ij}\right) - x_{ij}\right)p_j = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\max_i x_{ij}\right)p_j\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\,p_j\right) =$$

$$= V\text{conIP} - V(d_i) \quad ➪ \quad \underbrace{\min_i(C(d_i))}_{C\text{sinI}} = V\text{conIP} - \underbrace{\max_i\,(V(d_i))}_{V\text{sinI}}.$$

5. $$Z = z_k \quad ➪ \quad \min_i\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\max_i x_{ij}\right)p(\theta_j/z_k)\right] = \left(\sum_{j=1}^{n}(\max_i x_{ij})\,p(\theta_j/z_k)\right) - V\text{conI}_k$$

$$C\text{conI} = \sum_{k=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}(\max_i x_{ij})\,p(\theta_j/z_k)\right) - V\text{conI}_k\right)p(z_k) =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}(\max_i x_{ij})\,p(\theta_j(z_k)\right)\right.} \quad - V\text{conI}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(\max_i x_{ij})\,p(\theta_j/z_k)\,p(z_k)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left((\max_i x_i)\underbrace{\sum_{k=1}^{n} p(\theta_j/z_k)\,p(z_k)}_{p(\theta_j)}\right) = V\text{con IP}p(z_k)$$

6. Al resolver el problema planteado con esta matriz de costes, queda resuelto el problema planteado con la misma matriz, en el supuesto de que las consecuencias fueran, originalmente, pérdidas. Este importante supuesto es analizado *en* el epígrafe 8.11 de De Groot (1970).Optimal Statistial Decisions.McGraw-Hill.

$$
\begin{aligned}
7.\quad V(\delta_{12}) &= \left(x+\frac{3}{4}y\right)p+\left(x-\frac{1}{4}y\right)(1-p)=\boxed{yp+x-\frac{y}{4}}\\
V(\delta_{12}/\theta_1) &= (x_{11}=x+y)\frac{3}{4}+(x_{21}=x)\frac{1}{4}=x+\frac{3}{4}y\\
V(\delta_{12}/\theta_2) &= (x_{12}=x-y)\frac{1}{4}+(x_{22}=x)\frac{3}{4}=x+\frac{1}{4}y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8.\quad V(\delta_{21}) &= \left(x+\frac{3}{4}y\right)p+\left(x+\frac{3}{4}y\right)(1-p)=\boxed{yp+x-\frac{3y}{4}}\\
V(\delta_{21}/\theta_1) &= (x_{21}=x)\frac{3}{4}+(x_{11}=x+y)\frac{1}{4}=x+\frac{1}{4}y\\
V(\delta_{21}/\theta_2) &= (x_{22}=x)\frac{1}{4}+(x_{12}=x-y)\frac{3}{4}=x-\frac{3}{4}y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
9.\quad V(\delta_{11}) &= (x+y)p+(x-y)(1-p)=\boxed{2yp+x-y}\\
V(\delta_{11}/\theta_1) &= (x_{11}=x+y)\frac{3}{4}+(x_{11}=x+y)\frac{1}{4}=x+y\\
V(\delta_{11}/\theta_2) &= (x_{12}=x-y)\frac{1}{4}+(x_{12}=x-y)\frac{3}{4}=x-y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
10.\quad C(\delta_{12}) &= \left(\frac{y}{4}\right)p+\left(\frac{y}{4}\right)(1-p)=\boxed{\frac{y}{4}p}=x+yp-\left(yp+x-\frac{y}{4}\right)\\
C(\delta_{12}/\theta_1) &= (y_{11}=0)\frac{3}{4}+(y_{21}=y)\frac{1}{4}=\frac{1}{4}y=C(\delta_{12}/\theta_2)=(y_{12}=y)\frac{1}{4}+(y_{22}=0)\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
11.\quad C(\delta_{21}) &= \left(\frac{3}{4}y\right)p+\left(\frac{3}{4}y\right)(1-p)=\boxed{\frac{3}{4}y}=x+yp-\left(yp+x-\frac{y}{4}\right)\\
C(\delta_{21}/\theta_1) &= (y_{21}=y)\frac{3}{4}+(y_{11}=0)\frac{1}{4}=\frac{3}{4}y=\\
&= C(\delta_{21}/\theta_2)=(y_{22}=0)\frac{1}{4}+(y_{12}=y)\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12.\quad C(\delta_{11}) &= 0(p)+(y)(1-p)=\boxed{y-yp}=x+yp-(2yp+x-y)\\
C(\delta_{11}/\theta_1) &= (y_{11}=0)\pi+(y_{11}=0)(1-\pi)=0\\
C(\delta_{11}/\theta_2) &= (y_{21}=y)(1-\pi)+(y_{21}=y)\pi=y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
13.\quad C(\delta_{22}) &= y(p)+(0)(1-p)=\boxed{yp}=x+yp-x\\
C(\delta_{22}/\theta_1) &= (y_{21}=y)\pi+(y_{21}=y)(1-\pi)=y\\
C(\delta_{22}/\theta_2) &= (y_{22}=0)(1-\pi)+(y_{21}=0)\pi=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
14. \quad L(\delta_{12}) &= \left(-\frac{3}{4}y\right)p + \left(\frac{1}{4}y\right)(1-p) = \boxed{-yp+y/4} = -V(\delta_{12}) - x \\
L(\delta_{12}/\theta_1) &= (\ell_{11} = -y)\frac{3}{4} + (\ell_{21} = 0)\frac{1}{4} = -\frac{3}{4}y \\
L(\delta_{12}/\theta_2) &= (\ell_{12} = y)\frac{1}{4} + (\ell_{22} = 0)\frac{3}{4} = \frac{1}{4}y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
15. \quad L(\delta_{21}) &= \left(-\frac{1}{4}y\right)p + \left(\frac{3}{4}y\right)(1-p) = \boxed{-yp+\frac{3}{4}y} = -VM(\delta_{21}) - x \\
L(\delta_{21}/\theta_1) &= (\ell_{21} = 0)\frac{3}{4} + (\ell_{11} = -y)\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}y \\
L(\delta_{21}/\theta_2) &= (\ell_{22} = 0)\frac{1}{4} + (\ell_{12} = y)\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
16. \quad L(\delta_{11}) &= (-y)p + (y)(1-p) = \boxed{-2yp+y} = -VM(\delta_{11}) - x \\
L(\delta_{11}/\theta_1) &= (\ell_{11} = -y)\pi + (\ell_{11} = -y)(1-\pi) = -y \qquad L(\delta_{11}/\theta_2) = (\ell_{21} = y)(1-\pi) + (\ell_{21} = y)\pi = y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
17. \quad V(\delta_{12}) &= \frac{1}{2}\left(2(y\pi + x - \frac{1}{2}\right) = \boxed{y\pi + x - \frac{1}{2}} \\
V(\delta_{12}/\theta_1) &= (x_{11} = x+y)\pi + (x_{21} = x)(1-\pi) = V(\delta_{12}/\theta_2) = (x_{12} = x-y)(1-\pi) + (x_{22} = x)\pi = yp + x - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
18. \quad V(\delta_{21}) &= \frac{1}{2}\left(2\left(-y\pi + x + \frac{1}{2}\right)\right) = \boxed{-y\pi + x + \frac{y}{2}} \\
V(\delta_{21}/\theta_1) &= (x_{21} = y)\pi + (x_{11} = x+y)(1-\pi) = V(\delta_{21}/\theta_2) = (x_{22} = x)(1-\pi) + (x_{12} = x-y)\pi = -yp + x - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
19. \quad V(\delta_{11}) &= \frac{1}{2}\left((x+y) + (x-y)\right) = \boxed{x} \\
V(\delta_{11}/\theta_1) &= (x_{11} = x+y)\pi + (x_{11} = x+y)(1-\pi) \\
V(\delta_{11}/\theta_2) &= (x_{12} = x-y)(1-\pi) + (x_{12} = x-y)\pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
20. \quad C(\delta_{12}) &= \frac{1}{2}\left(2(y(1-\pi))\right) = \boxed{y - y\pi} = x + \frac{y}{2} - \left(y\pi + x - \frac{y}{2}\right) \quad V\text{conIP} \quad V(\delta_{12}) \\
C(\delta_{12}/\theta_1) &= (y_{11} = 0)\pi + (y_{21} = y)(1-\pi) = C(\delta_{12}/\theta_2) = (y_{12} = y)(1-\pi) + (y_{22} = 0)\pi = y(1-\pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
21. \quad C(\delta_{21}) &= \frac{1}{2}\left(2(y\pi)\right) = \boxed{y\pi} = x + \frac{y}{2} - \left(-y\pi + x + \frac{y}{2}\right) \\
C(\delta_{21}/\theta_1) &= (y_{21} = y)\pi + (y_{11} = 0)(1-\pi) = y\pi = C(\delta_{21}/\theta_2) = (y_{22} = 0)(1-\pi) + (y_{12} = y)\pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
22. \quad C(\delta_{11}) &= \frac{1}{2}(0+y) = \boxed{\frac{y}{2}} = x + \frac{y}{2} - x \\
C(\delta_{11}/\theta_1) &= (y_{11} = 0)\pi + (y_{11} = 0)(1-\pi) = 0 \qquad C(\delta_{11}/\theta_2) = (y_{21} = y)(1-\pi) + (y_{21} = y)\pi = y
\end{aligned}
$$

23. $C(\delta_{22}) = \frac{1}{2}(y+0) = \frac{y}{2} = x + \frac{y}{2} - x$

$C(\delta_{22}/\theta_1) = (y_{11} = y)\pi + (y_{11} = y)(1-\pi) = y \qquad C(\delta_{22}/\theta_2) = (y_{21} = 0)(1-\pi) + (y_{21} = 0)\pi = 0$

24. $L(\delta_{12}) = \frac{1}{2}((-y\pi) + (y(1-\pi))) = \boxed{\frac{y}{2} - y\pi}$

$L(\delta_{12}/\theta_1) = (\ell_{11} = -y)\pi + (\ell_{21} = 0)(1-\pi) = -y\pi \qquad L(\delta_{12}/\theta_2) = (\ell_{12} = y)(1-\pi) + (\ell_{22} = 0) = y(1-\pi)$

25. $L(\delta_{21}) = \frac{1}{2}((-y+y\pi) + (y\pi)) = \boxed{y\pi - \frac{y}{2}}$

$L(\delta_{21}/\theta_1) = (\ell_{21} = 0)\pi + (\ell_{11} = -y)(1-\pi) = -y(1-\pi) \qquad L(\delta_{21}/\theta_2) = (\ell_{22} = 0)(1-\pi) + (\ell_{12} = y) = y\pi$

26. $L(\delta_{11}) = \frac{1}{2}((-y) + (y)) = \boxed{0}$

$L(\delta_{11}/\theta_1) = (\ell_{11} = -y)\pi + (\ell_{11} = -y)(1-\pi) = -y\pi \qquad L(\delta_{11}/\theta_2) = (\ell_{21} = y)(1-\pi) + (\ell_{21} = y)\pi = y\pi$

27. $C(\delta_{12}) = C(\delta_{12}/\theta_1)p + C(\delta_{12}/\theta_2)(1-p) = y(1-\pi)p + y(1-\pi)(1-p) = \boxed{y(1-\pi)}$

28. $C(\delta_{21}) = C(\delta_{21}/\theta_1)p + C(\delta_{21}/\theta_2)(1-p) = y\pi p + y\pi(1-p) = \boxed{y\pi}$

29. $C(\delta_{11}) = C(\delta_{11}/\theta_1)p + C(\delta_{11}/\theta_2)(1-p) = 0p + y(1-p) = \boxed{y(1-p)}$

30. $C(\delta_{22}) = C(\delta_{22}/\theta_1)p + C(\delta_{22}/\theta_2)(1-p) = yp + 0(1-p) = \boxed{yp}$

31. $L(\delta_{12}) = L(\delta_{12}/\theta_1)p + L(\delta_{12}/\theta_2)(1-p) = -y\pi p + y(1-\pi) = y(1-(p+\pi))$

32. $L(\delta_{21}) = L(\delta_{21}/\theta_1)p + L(\delta_{21}/\theta_2)(1-p) = -y(1-\pi)p + y\pi(1-p) = y(\pi - p)$

33. $L(\delta_{11}) = L(\delta_{11}/\theta_1)p + L(\delta_{11}/\theta_2)(1-p) = -yp + y(1-p) = y(1-2p)$

34. $p(z_1) = p(z_1/\theta_1)p(\theta_1) + p(z_1/\theta_2)p(\theta_2) = p\pi + (1-\pi)(1-p) = p\pi + 1 - \pi - p + p\pi$

35. $V(\delta_{21}) - V(d_2) = (p-\pi)y > 0 \Rightarrow d_2$ sin experto descartada

$V(\delta_{21}) - V(d_1) = (1-(p+\pi))y > 0 \Rightarrow d_1$ sin experto descartada

36. $V(\delta_{12}) - V(d_1) = (\pi - p)y > 0 \Rightarrow d_1$ sin experto descartada

$V(\delta_{12}) - V(d_2) = (p+\pi-1)y > 0 \Rightarrow d_2$ sin experto descartada

37. $V(\delta_{22}) - V(d_1) = (1-2p)y > (1-(p+\pi))y > 0 \Rightarrow d_1$ sin experto descartada

38. $V(\delta_{11}) - V(d_2) = (2p-1)y > ((p+\pi)-1)y > 0 \Rightarrow d_2$ sin experto descartada

ENGLISH SUMMARY

TYPE PROBLEMS IN DECISION THEORY

RAMÓN ALONSO SANZ*
Universidad Politécnica de Madrid

This paper aims to illustrate the basic concepts and techniques underlying Decision Theory. To accomplish that, the somewhat simplest example is considered: the investment example. This problem is featured by

a) two alternative decisions: to invest (d_1) *or not to invest* (d_2) *the amount* x*, and*

b) two uncertain events: appreciation (θ_1) *measured by the gain* y*, and depreciation* (θ_2) *t supposed also of extent* y*.*

Additional information has in the example the form of an expert opinion (Z). The problem is solved in the extensive and normal forms. Its decision tree is also specified. Consequences are supposed to be given in its primary form $(x+y, x-y, y)$*, as regrets, and as losses. Decision tree and minimax solution are also obtained.*

Keywords: Decision theory, problems.

AMS Classification: 62C05

* Ramón Alonso Sanz. ETSI Agrónomos. Unidad de Estadística. Universidad Politécnica de Madrid. C. Universitaria. 28040 Madrid. **e-mail:** ralonso@ccupm.upm.es

– Received february 1995.

– Accepted december 1996.

Extensive form

- Without additional Information

$$\underset{\text{Bayes decision}}{d^* = d_i/}\left\{V_i = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, p(\theta_j)\right)\right\} = \underset{\text{Expected Value without Inf.}}{V\text{sinI}}$$

- With additional Information (expert opinion Z)

$$Z = z_k \quad \Rightarrow \quad d_i^* = d_i/\max_i \left\{ V_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \underbrace{\frac{p(z_k/\theta_j)p(\theta_j)}{p(z_k)}}_{p(\theta_j/z_k)} \right\}$$

Expected Value with Information

$$\text{VconI} = \sum_{k=1}^{n} \left(\max_i \left[\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, p(z_k/\theta_j)\, p(\theta_j) \right] \right)$$

Expected Value of Information

$$V\text{deI} = V\text{conI} - V\text{sinI}$$

Perfect information $(p(z_k/\theta_k))$:

$$\text{Expected Value with Perfect Information:} \quad V\text{conIP} = \sum_{j=1}^{n} \left(\max_i x_{ij} \right) p(\theta_j)$$

Regrets: $y_{ij} = \left(\max_i x_{ij} \right) - x_{ij}$

$$d^* = d_i/\left(\min_i \left\{ C(d_i) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} p_j \right\} \right) = C\text{sinI} = V\text{conIP} - V\text{sinI} = V\text{deIP}$$

Similarly:

$$C\text{conI} = V\text{conIP} - V\text{conI} \quad \Rightarrow \quad V\text{deI} = C\text{sinI} - C\text{conI}$$

Losses: $\ell_{ij} = -x_{ij}$

$$d^* = d_i/\left(\min_i \left\{ L(d_i) = \sum^{n} \ell_{ij} p_j \right\} \right) = L\text{sinI} = -V\text{sinI}$$

Similarly, $L\text{conI} = -V\text{conI} \quad \Rightarrow \quad V\text{deI} = L\text{sinI} - L\text{conI}$

Normal form

Strategies (decision rules):

$$D = \{\delta(z)/\delta : \mathcal{X} \longrightarrow D\}$$

$$\delta^* = \delta/\max_{\delta}\left(V(\delta) = \sum_{j=1}^{n} V(\delta/\theta_j)p(\theta_j)\right)$$

$$V(\delta/\theta_j) = \sum_{k=1}^{n} V(\delta/\theta_j),z_k)p(z_k/\theta_j)$$

Dealing with regrets or losses, *min*imization must substitute the above *max*imization.

Minimax solution

Pure decisions: $d^* = d_i/\min_i \left(\max_j ell_{ij}\right)$

Random decisions: $\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_m \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \end{pmatrix}.$

minimax decision: $\Delta^* = \Delta/\min_{\Delta}\left(\max_j L(\Delta/\theta_j)\right)$

$$L(\Delta/\theta_j) = \sum_i \pi_i \ell_{ij}$$

Random strategies: $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_k & \dots & \delta_{mn} \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_k & \dots & \pi_{mn} \end{pmatrix}$

minimax strategy: $\Delta^* = \Delta/\min_{\Delta}\left(\max_j L(\Delta/\theta_j)\right)$

$$L(\Delta/\theta_j) = \sum_k \pi_k L(\delta_k/\theta_j)$$

The graphic method based on the plotting of the $(L(\delta_k/\theta_1), L(\delta_k/\theta_2))$ region and the analytic based on linear programming, have been used to obtain Δ^*.