

# Estrategias para acelerar la convergencia del método *DNL*

Ruperto Bonet, Norberto Nigro, Mario Storti y Sergio Idelsohn

Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC)

INTEC-(CONICET-UNL)

Güemes 3450

3000 Santa Fe, Argentina

Tel.: 54-342-455 91 75 , Fax: 54-342-455 09 44

e-mail: rbonet@trantor.arctide.edu.ar

## Resumen

La condición de frontera *DNL* circular es una condición absorbente usada para el cálculo de ondas exteriores. Dos técnicas numéricas son introducidas para acelerar la convergencia del método *DNL* circular mediante el empleo del filtro de esponjas o de un filtro de Gauss. Aquí examinamos cómo diseñamos una capa finita óptima para los cálculos de dispersión de ondas.

## Summary

The circular *DNL* boundary condition is an absorbing boundary condition used for the calculus of exterior waves. Two numerical techniques are introduced to accelerate the convergence of the *DNL* circular method by means of the using of a sponge filter or a Gauss filter. Here we examine how to design a finite optimal layer for wave scattering calculations.

## INTRODUCCIÓN

La cuestión relativa a una condición de frontera no-reflejante, eficiente y precisa para su uso en la solución numérica del problema exterior para modelos ondulatorios ha sido desarrollada desde principios de los años 1970 y ha recibido mucha atención en los últimos años. La necesidad de una tal condición de frontera aparece en muchos campos de aplicación, incluyendo acústica subacuática, geofísica y un análisis de interacción sólido-fluidos.

Es bien conocido que las condiciones de frontera artificiales simplificadas producen reflexiones “espurias” de las ondas desde la frontera hacia el interior del dominio computacional, y con ello se originan grandes errores en la solución computada<sup>19</sup>. La efectividad de la mayoría de las *RBC* mejora cuando la frontera artificial es alejada del dispersor hacia el infinito. En efecto, para resolver numéricamente un problema exterior ondulatorio dependiente del tiempo, uno puede simplemente tomar la frontera tan lejos que las ondas no alcancen esta frontera en todos los intervalos de tiempo en el cual la solución es buscada. Sin embargo esta aproximación es altamente ineficiente debido al aumento del dominio computacional y de manera consecuyente una malla numérica con muchos grados de libertad. Por tanto, la tendencia en los últimos años ha sido el empleo sobre la frontera artificial de una *RBC* que sea suficientemente precisa cuando la frontera está localizada próxima al dispersor.

Otras soluciones acoplan elementos finitos con las soluciones analíticas exteriores mediante soluciones en series. Tales procedimientos han sido propuestos por Zienkiewicz *et al.*<sup>30</sup>, Chen y Mei<sup>13</sup>, etc.

En las técnicas anteriormente mencionadas se usan expresiones explícitas de las soluciones del dominio exterior mediante *matcheo* en la frontera artificial. Bayliss, Gunzburger y Turkel<sup>2</sup> obtuvieron otra sucesión de *RBC* basadas en la solución asintótica de la ecuación de onda en grandes distancias. De esta manera derivaron un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales, las cuales pueden ser impuestas a una distancia finita sobre una frontera artificial. Los operadores eliminan los primeros  $m$  términos de la expansión, y por tanto sustituyen de manera implícita estas expresiones explícitas. Los operadores de orden inferior de este conjunto de condiciones de radiación representan las condiciones de radiación aproximadas más usadas en el cálculo numérico. Las condiciones de primer orden fueron obtenidas por Engquist y Majda<sup>17,18</sup>. Estas condiciones han sido usadas en un esquema de elementos finitos por Bayliss<sup>2</sup>. Pinsky y Abboud<sup>27,1</sup> y Higdon<sup>20</sup> derivaron una familia de condiciones de frontera locales los cuales absorben todas las ondas con ángulos de incidencia específico. Condiciones de fronteras análogas en coordenadas circunferenciales han sido derivadas por Kriegsmann<sup>23,24</sup> y en la ingeniería oceánica por Bin Xi Yu y Panchang<sup>3</sup>. Tales condiciones son parcialmente reflejantes, sobre todo en presencia de bajas reflexiones en los contornos interiores, y dependientes de la distancia al contorno en el campo cercano. Recientemente Douglas Meade *et al.*<sup>26,25</sup> han evaluado la relativa precisión de los *RBC* locales basadas en las condiciones de radiación de Bayliss y Turkel (*BT*). Ellos han generalizado esas condiciones, que han sido implementadas en esquemas de diferencias finitas y elementos finitos, a dominios no circulares. Tales condiciones posibilitan colocar la condición de frontera más próxima al dispersor que las condiciones aplicadas sobre dominios circulares, reduciendo por consiguiente el costo computacional; no obstante, ellas conservan las limitaciones de sus semejantes en cuanto a la capacidad de absorción.

Otra posibilidad de simulación en un campo exterior infinito a una distancia finita del dominio computacional es el uso de un amortiguamiento artificial, en particular en la forma de una capa de esponja. En este método un término disipativo artificial es añadido (implícitamente o explícitamente) a las ecuaciones cerca de las fronteras artificiales del dominio truncado, tales que las ondas salientes sean absorbidas con cierta reflexión. Este método ha sido empleado por Kosloff en la solución de la ecuación de Shrodinger<sup>22</sup>. Un avance en este sentido fue desarrollado por Israeli y Orszag<sup>21</sup> mediante el uso de ciertas capas de esponjas en combinación con ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. Dicho método es de fácil implementación y posee buenas propiedades de reflexión para un amplio rango de frecuencias, pero la necesidad de ampliar el dominio computacional para la capa de esponja encarece el costo computacional. Una implementación del filtro de esponja en coordenadas polares en un modelo de elementos finitos ha sido desarrollada en las referencias<sup>6,5</sup>. Los resultados numéricos muestran que el filtro de esponjas en coordenadas polares puede producir soluciones precisas en el dominio de frecuencias para la ecuación “mild-slope” sobre un fondo plano o sobre un fondo variable.

Recientemente F. Collino y P. Monk<sup>14,15</sup> desarrollaron una capa de esponja de forma especial para las ecuaciones de Maxwell, básicamente, mediante un cambio de variables de la capa de esponja de Bérenger. En este procedimiento el término disipativo es incluido en la variable independiente. Tal capa de esponja es optimizada en coordenadas rectangulares y extendida a coordenadas polares mediante una transformación de coordenadas. El proceso de optimización se realiza fijando el número de puntos de discretización de la capa en una longitud de onda, mediante el cual la resolución de la malla es variada para minimizar las reflexiones en el contorno interior. Este procedimiento controla las reflexiones emanadas de la capa de esponja, sin un alto incremento del costo computacional.

Un método desarrollado directamente en el medio discreto (el método *DNL*) ha sido empleado recientemente con éxito en la solución de numerosos problemas de radiación y dispersión del oleaje<sup>11,28</sup> y de resistencia de olas<sup>29,16</sup>. La condición de radiación *DNL* plana resultó ser una condición no reflejante, que puede ser colocada tan próxima al dispersor como se quiera. La condición de radiación *DNL* circular puede ser usada para resolver

problemas de dispersión de ondas armónicas según el tiempo. Los resultados numéricos muestran que la condición *DNL* circular puede producir soluciones precisas en el dominio de frecuencias. La condición *DNL* circular en el campo cercano es obtenida mediante un proceso de condensación desde el campo lejano al campo cercano. Tal proceso de condensación origina una condición *DNL* circular más absorbente en la medida que el círculo determinado por el radio exterior  $r_e$  de la capa de condensación es colocado cada vez más lejos. En este trabajo son presentadas estrategias para acelerar la convergencia del proceso de condensación *DNL* circular mediante el uso de un filtro de esponjas o de un filtro de Gauss. La introducción de un filtro de esponjas en la capa de condensación permite reducir el espesor de la capa de condensación y las reflexiones del dominio computacional. La determinación óptima de los parámetros del filtro de esponjas posibilita controlar de alguna manera tales reflexiones.

Una vía diferente para acelerar la convergencia representa la introducción de un filtro de Gauss en la capa de condensación. En este trabajo es presentado tal operador integral cuyo núcleo es una gaussiana centrada en el interior de la capa. Un estudio detallado es realizado en el caso plano donde son determinados de forma óptima los parámetros que caracterizan la campana de Gauss. Tales parámetros son usados para el cálculo de la radiación y dispersión de ondas en geometrías circulares.

## CONVERGENCIA DEL MÉTODO *DNL* CIRCULAR

La condición *DNL* circular en el campo cercano es obtenida mediante un proceso de condensación desde el campo lejano al campo cercano. Tal proceso de condensación origina una condición *DNL* circular más absorbente en la medida que el círculo determinado por el radio exterior  $r_e$  de la capa de condensación es colocado cada vez más lejos<sup>8,10,7,12,4</sup>

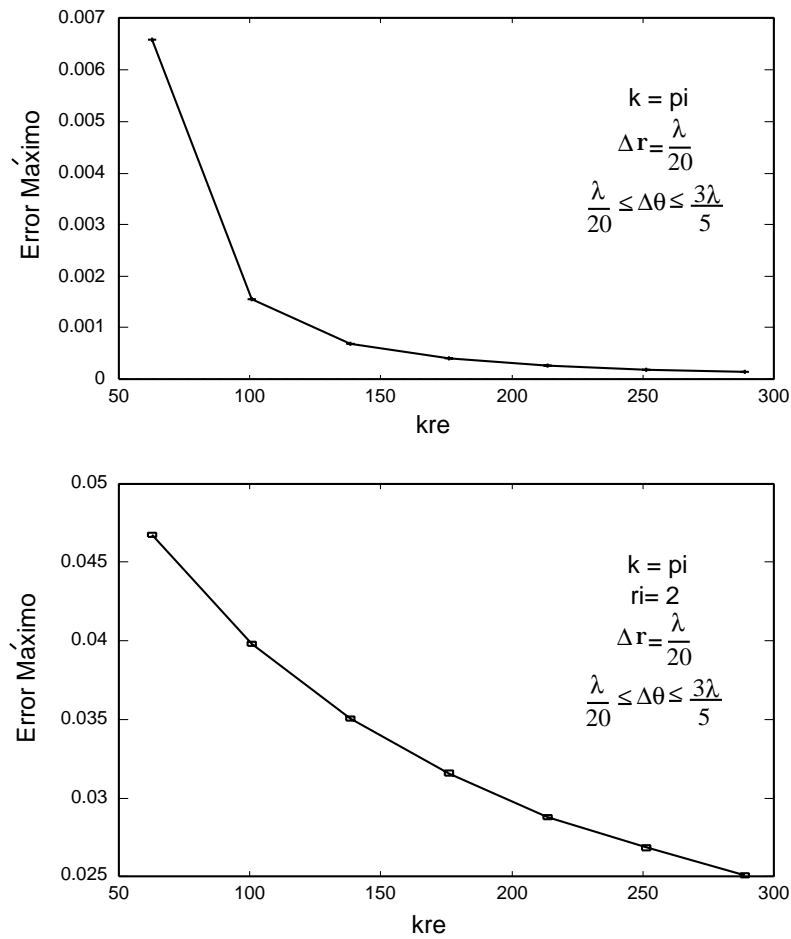
En 1997 Bonet *et al.*<sup>10</sup> mostraron que el coeficiente de reflexión en el campo lejano crece monótonamente respecto a los valores de  $N_{lay}$  y, simultáneamente, decrece monótonamente respecto a los valores del radio exterior  $r_e$ . De esta manera, cuando localizamos la frontera exterior ( $r = r_e$ ) lejos del dispensor los valores del coeficiente de reflexión se reducen en forma monótona.

En esta sección analizamos la influencia de la localización de la frontera lejana  $r_e$  en el proceso de condensación, con respecto al error cuadrático medio ( $E_2$ ) dado por la relación

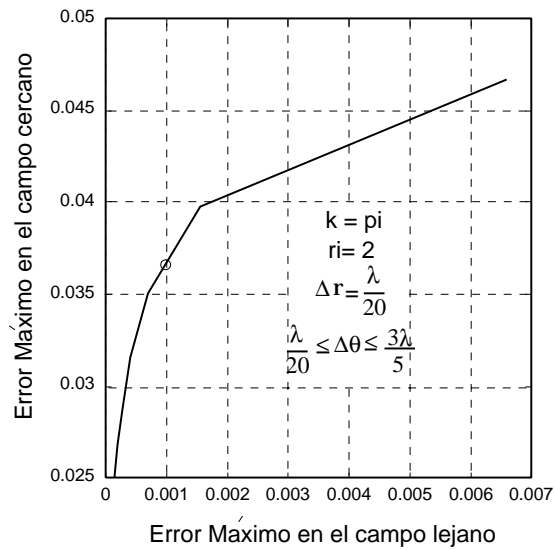
$$E_2 = \sqrt{\frac{1}{N_{lay}} \sum_{l=1}^{N_{lay}} |\phi_l^{j+1} - \mathbf{F}^j \phi_l^j|^2} \quad (1)$$

donde  $\phi_l^j = H_l^{(1)}(kr^j) \exp il\theta$ , en el caso de coordenadas polares. El primer caso “test” examina explícitamente la variación del error  $E_2$  respecto a la localización de la frontera lejana ( $r = r_e$ ) para diferentes valores de  $N_{lay}$ . La Figura 1 refleja el máximo error cuadrático medio  $E_2$  medido en el campo lejano (Figura 1a), y en el campo cercano (Figura 1b) para diversos valores de  $kr_e$ , respectivamente. Notamos que el máximo error cuadrático medio  $E_2$  en el campo lejano es menor que 0,001 para  $kr_e \geq 100$ , mientras en el campo cercano es mayor que 0,03 (Figura 1b). Una relación entre el máximo error  $E_2$  en el campo cercano, respecto al máximo error  $E_2$  en el campo lejano es mostrada en la Figura 2, donde el pequeño círculo denota el máximo error cuadrático medio de 0,001 en el campo lejano. Esta Figura muestra que el menor valor de los máximos errores cuadráticos medios  $E_2$  en el campo cercano es 0,025.

Un análisis del comportamiento del error cuadrático medio en la frontera artificial (o sea, en la frontera del dominio computacional) como función de la localización de la capa más lejana del proceso de condensación se refleja en la Figura 1.

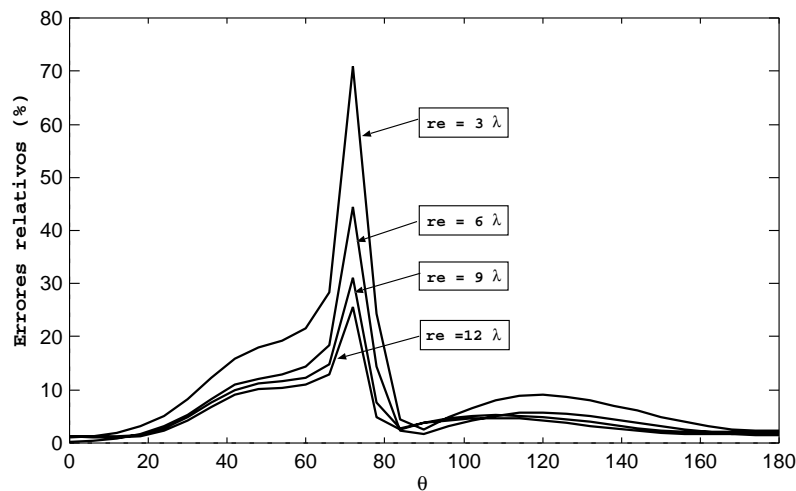


**Figura 1.** Máximo error cuadrático medio debido a la condición de frontera *DNL* (arriba). Máximo error cuadrático medio en el campo lejano (abajo). Máximo error cuadrático medio en el campo cercano

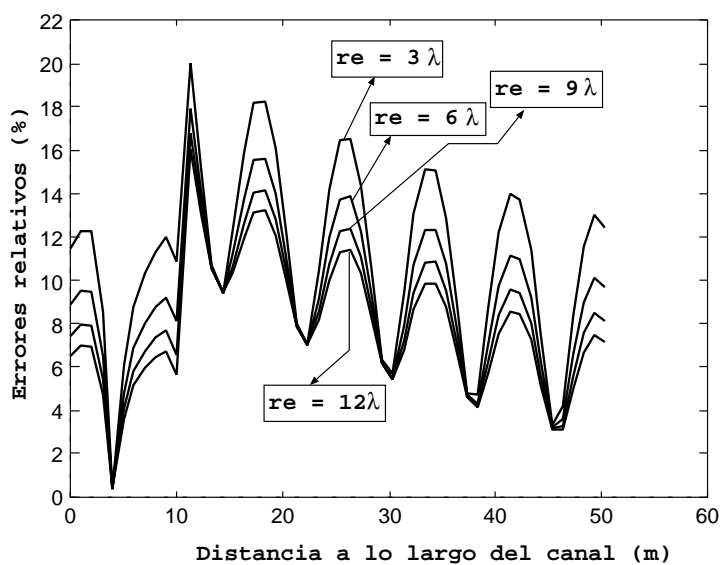


**Figura 2.** Máximo error cuadrático medio en el campo cercano, respecto al máximo error cuadrático medio en el campo lejano

En esta sección mostramos la convergencia del proceso de condensación, para los casos de dispersión de una isla circular por una onda plana, y de la propagación de ondas a través de un canal de sección variable. Estos casos difieren entre sí debido a que las ondas dispersadas por el canal al océano viajan en una sección semi-infinita en forma de sector circular. La convergencia de la solución numérica para diferentes localizaciones de la frontera exterior es mostrada en la Figura 3. En esta Figura se muestran los errores relativos (en porcentaje) respecto al ángulo de incidencia a la línea de costa y a lo largo del eje central del canal. Se puede notar que la convergencia es más lenta en los casos en que la sección de dispersión se reduce a una región semi-infinita. Es nuestro propósito analizar la influencia de la presencia de un filtro sobre la capa de condensación y determinar, en qué medida estas herramientas permiten reducir el espesor de la capa de condensación, y con ello, el tiempo de cómputo.



a) Pila circular (línea de costa)



b) Canal de sección variable (eje central)

Figura 3. Convergencia del método *DNL* circular

El procedimiento de “condensación de la matriz  $DNL$  plana a la matriz  $DNL$  circular” se basa en la solución recurrente del sistema de ecuaciones matricial

$$\mathbf{C}^j \phi^{j-1} + \mathbf{B}^j \phi^j + \mathbf{A}^j \phi^{j+1} = 0 \quad (2)$$

$$\phi^{n_j+1} = \mathbf{F}^{\text{far}} \phi^{n_j} \quad (3)$$

para  $j = n_j, (n_j - 1), \dots, 1$ , donde  $\phi^j$  es el vector de los valores nodales del potencial para los nodos sobre la capa  $j$ . Basado en la descomposición de Fourier de la matriz de rigidez dinámica  $\tilde{\mathbf{K}}$ , obtenemos

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}$$

tales que  $\mathbf{V}$  es la matriz de vectores propios y  $\mathbf{\Lambda}$  es la matriz diagonal compuesta por los valores propios, correspondientes a los modos transversales. Mediante la transformación

$$\phi^j = \mathbf{V} \mathbf{U}^j \quad (4)$$

la solución de estos sistemas puede ser obtenida mediante la resolución de  $N_{lay}$  sistemas de ecuaciones algebraicas modales, que describen la influencia de cada modo transversal  $\Lambda(l)$ ,  $l = 1, 2, \dots, N_{lay}$ . Tal sistema de ecuaciones algebraicas modal se expresa como sigue

$$\mathbf{M} \vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{F}}$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de orden  $(n_j + 2) \times (n_j + 2)$  definida por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} b^{-1} & a^{-1} & 0 & \dots & \\ c^0 & b^0 & a^0 & 0 & \dots \\ 0 & c^1 & b^1 & a^1 & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & 0 & c^{n_j} & \tilde{b}^{n_j} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$\mathbf{F}$  es el vector de términos independientes

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -c^{-1} u_l^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

y  $\mathbf{U}$  es el vector incógnita de dimensión  $n_j + 2$  para una capa formada por  $n_j$  elementos.

$$\vec{\mathbf{U}} = (u_l^{-1}, u_l^0, \dots, u_l^{n_j})^T$$

En la matriz del sistema los coeficientes adoptan la forma

$$c^j = 1 - \frac{h}{2r^j} \quad (6)$$

$$b^j = (kh)^2 - 2 - \frac{\Lambda(l)h^2}{r^{j^2}} \quad (7)$$

$$a^j = 1 + \frac{h}{2r^j} \quad (8)$$

y el elemento  $\tilde{b}^{n_j}$  viene dado por la igualdad siguiente

$$\tilde{b}^{n_j} = (b^{n_j} + a^{n_j} \tilde{\mathbf{F}}_n^{far}) \quad (9)$$

tales que el vector  $\vec{\mathbf{F}}$  es un vector unitario de la forma  $\vec{\mathbf{F}} = (1, 0, \dots, 0)^T$  y  $\tilde{\mathbf{F}}_l^{far}$  determinan los modos salientes en el campo lejano (progresivos y desvanescentes), los cuales caracterizan las ondas dispersadas lejos del dispersor.

### ***DNL* CIRCULAR + FILTRO DE ESPONJAS**

En esta sección examinamos el procedimiento de obtener una condición de radiación circular discreta no-local con el efecto de cierto amortiguamiento. Un filtro de esponjas de primer orden

$$SF(\phi^{j-1}, \phi^j, \phi^{j+1}) = \sigma^j \left( \frac{1}{2h} \mathbf{I} \phi^{j+1} - ik \mathbf{I} \phi^j - \frac{1}{2h} \mathbf{I} \phi^{j-1} \right) \quad (10)$$

es introducido en la dirección radial sobre al anillo circular ( $r_i \leq r \leq r_e$ ), en el cual  $\sigma^j$  representa los valores de la función amortiguante en cada capa  $j$

$$\sigma^j = \begin{cases} \sigma(r^j) & \text{si } j \geq 0 \\ 0 & \text{si } j < 0 \end{cases}$$

tales que el sistema de ecuaciones matricial 2 se modifica como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^j \phi^{j-1} + \mathbf{B}^j \phi^j + \mathbf{A}^j \phi^{j+1} - SF(\phi^{j-1}, \phi^j, \phi^{j+1}) &= 0 \\ \phi^{n_j+1} &= \mathbf{F}^{far} \phi^{n_j} \end{aligned} \quad (11)$$

para  $j = 0, 1, \dots, n_j$ , por lo que los elementos de la matriz del sistema de ecuaciones algebraicas desacoplado (5) adoptan la forma

$$\begin{aligned} c^j &= 1 - \frac{h}{2r^j} + \sigma^j \frac{h}{2} \\ b^j &= (kh)^2 - 2 - \frac{\Lambda(l)h^2}{r^{j2}} + \sigma^j ikh^2 \\ a^j &= 1 + \frac{h}{2r^j} - \sigma^j \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

Consideremos una familia de funciones amortiguantes en forma de suma de funciones polinomiales expresadas en la forma

$$\sigma^j = \sum_{k=1}^{npar} \alpha_k \left[ (r^j - r_i) / (\delta) \right]^k \quad (13)$$

donde  $j = -1, 0, 1, \dots, n_j$ ,  $\delta$  es el espesor de la capa de esponja,  $npar$  es el número de parámetros y  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{npar}$  son los valores de los parámetros que determinan la amplitud de la función amortiguante. Una selección adecuada de los parámetros permite un efectivo control de las reflexiones de las ondas del dominio computacional, así como del costo del proceso de cálculo. Es nuestro objetivo determinar la familia de parámetros  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{npar}$  que nos proporcione el menor coeficiente de reflexión. Decidimos seleccionar  $\tilde{\sigma}$  para minimizar  $R$  respecto a todos los modos circunferenciales progresivos definidos por

la discretización. Para computar una capa óptima  $(h\tilde{\nu}^{-1}, h\tilde{\nu}^0, \dots, h\tilde{\nu}^{n_j})$ , minimizamos

$$\frac{1}{(MM+1)} \sum_{l=0}^{MM} |R|^2(\Lambda(l), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{npar}) \cos(\theta_l) \quad (14)$$

sobre  $(h\sigma^{-1}, h\sigma^0, \dots, h\sigma^{n_j})$ , donde

$$R = - \frac{1 + \mathbf{c}^{-1}[\mathbf{F}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^1(-2kh) \\ \mathbf{H}_1^1(-kh) \end{bmatrix}}{1 + \mathbf{c}^{-1}[\mathbf{F}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{H}_n^2(-2kh) \\ \mathbf{H}_n^2(-kh) \end{bmatrix}} \quad (15)$$

es el coeficiente de reflexión en la frontera artificial del dominio de cómputo, asumiendo que la solución discreta  $u_l^j$  correspondiente al modo transversal  $\Lambda(l, l)$  viene dada por

$$u_l^j = H_n^1 kh(j-2) + RH_n^2 kh(j-2), \quad j \leq 1 \quad (16)$$

$$u_l^j = \mathbf{TH}_n^1 \mathbf{kh}(j-2), \quad j \geq 2 \quad (17)$$

Aquí  $H_l^{(1)}$  es la función de Hankel de primer grado y orden  $l$  y  $H_l^{(2)}$  la función de Hankel de segundo grado y orden  $l$ .  $MM$  es el número de modos progresivos considerados en el proceso de optimización y  $\cos(\theta_l)$  es tomado como  $\sqrt{1 - \Lambda(l)/(k_0 r)^2}$ .

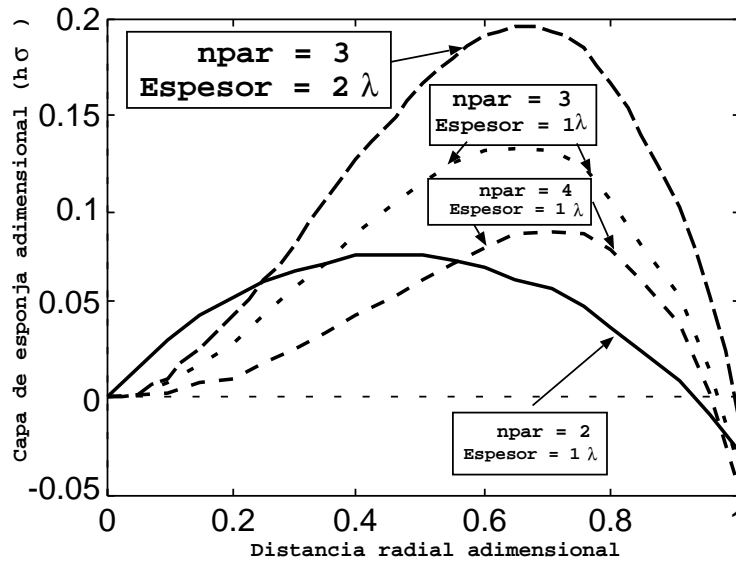
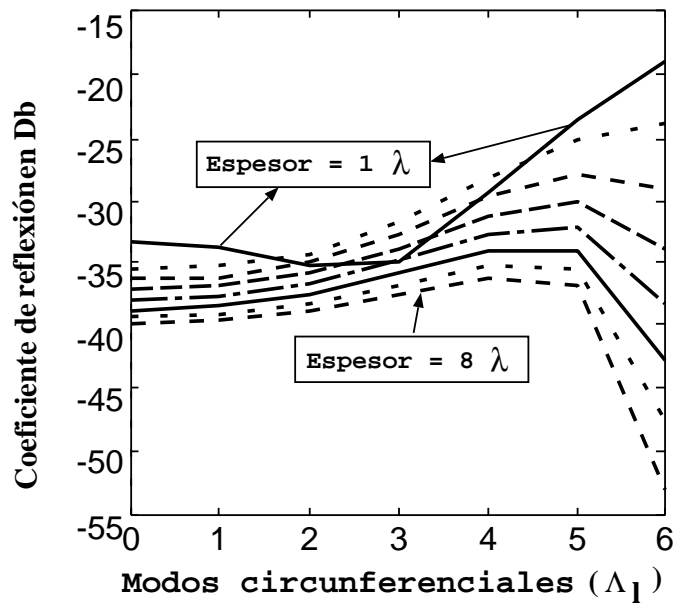


Figura 4. Capas estándar optimizadas

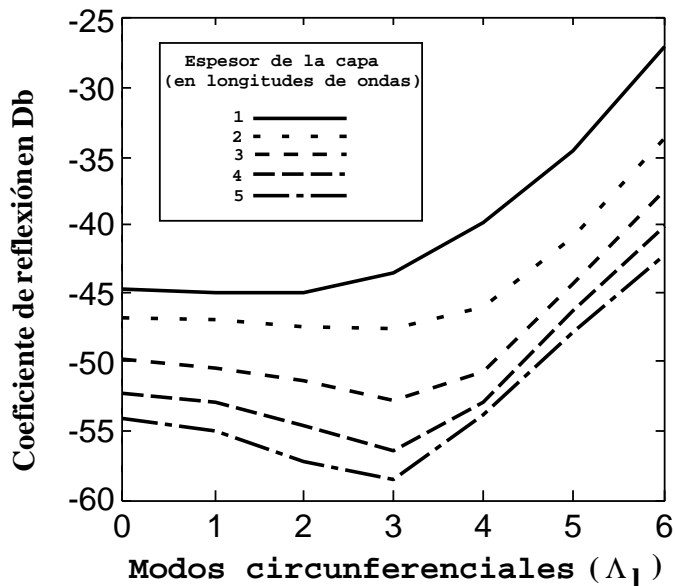
La Figura 4 muestra varias capas estándar optimizadas para diferentes espesores y familias de parámetros. Estas capas fueron obtenidas para una resolución de veinte elementos por longitud de onda en la dirección radial. Observamos que las funciones de amortiguamiento para una misma familia de parámetros son proporcionales. También observamos que cuando el número de parámetros crece, el valor absoluto de la ordenada en el extremo lejano de la capa también crece. Los resultados de estos cálculos para diferentes espesores con  $npar = 2, 3$  son mostrados en la Figura 5. El comportamiento del coeficiente de reflexión mejora para una función amortiguante definida con tres parámetros. No se obtuvo una



convergencia uniforme en el espacio de los parámetros, por lo que aumentando el número de parámetros arbitrariamente, no necesariamente se logra una mejor absorción del filtro de esponjas. Una descripción detallada de este procedimiento y aplicaciones a problemas de radiación y dispersión gobernados por la ecuación de Helmholtz pueden ser encontrados en la referencia<sup>11</sup>.



a)  $n_{par} = 2$



b)  $n_{par} = 3$

**Figura 5.** Coeficiente de reflexión optimizado respecto a los modos circunferenciales, para diferentes familias de parámetros

## FILTRO DE GAUSS EN COORDENADAS POLARES

Una estrategia para acelerar la convergencia del método *DNL* circular ha sido introducida mediante un filtro de Gauss. Este procedimiento se diferencia del filtro de esponjas en que se sustituye la condición de frontera en el punto más lejano de la “capa de condensación”, digamos, la igualdad (9), por una “condición distribuida” a lo largo de toda la “capa de condensación”, que en forma exacta adopta la forma

$$\mathcal{L}(\phi) = \int_{r_i}^{r_e} \sigma(r) \phi e^{ikr} dr = 0 \quad (18)$$

donde el núcleo  $\sigma(r)$  representa la función gaussiana

$$\sigma(r) = e^{-\frac{s^2(r-r_c)^2}{2}} \quad (19)$$

determinada por los parámetros  $s$  y  $r_c$ , que caracterizan el ancho y centro de la campana, respectivamente. Para la “capa de condensación discretizada” resolvemos un sistema de ecuaciones desacoplado de orden  $(n_j + 1) \times (n_j + 1)$ . Sea

$$\vec{\mathbf{U}} = (u^0, u^1, \dots, u^{n_j})^T$$

entonces

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{U}} = \mathbf{F}$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de orden  $(n_j + 1) \times (n_j + 1)$  definida por  $\sigma^0 e^{ikr^1}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} b^0 & a^0 & 0 & \dots \\ c^1 & b^1 & a^1 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \sigma^0 e^{ikr^1} & \sigma^1 e^{ikr^1} & \dots & \sigma^{n_j} e^{ikr^{n_j}} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -c^0 u^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notamos que la matriz  $\mathbf{M}$  no es una matriz tridiagonal, como en los procedimientos descritos en las secciones anteriores, debido a la presencia de la “condición distribuida” en la última fila de la matriz; sin embargo, un procedimiento para resolver este sistema conservando la forma tridiagonal de la matriz puede ser fácilmente implementado. Los coeficientes  $c^j$ ,  $b^j$  y  $a^j$  de la matriz  $\mathbf{M}$  representan los coeficientes del operador de Helmholtz discretizado sobre la “capa de condensación”, o sea, vienen dados en la igualdad (6). Dado que  $\mathbf{F}$  es proporcional a  $u^{-1}$ , podemos calcular la solución en la forma

$$\vec{\mathbf{U}} = (u^{*0}, u^{*1}, \dots, u^{*n_j})^T u_l^{-1}$$

y una nueva condición es obtenida sobre  $u_l^0$ ,  $u_l^1$

$$u^{*0} u_l^1 - u^{*1} u_l^0 = 0 \quad (20)$$

La relación anterior es llamada condición de frontera “discreta local circular” generada por un filtro de Gauss unidimensional. Dada la igualdad (20) se tiene para  $l = 1, 2, \dots, N_{lay}$  la relación de flujo

$$u^1_l = \frac{u^{*1}}{u^{*0}} u_l^0 = \mu(\Lambda_l) u_l^0 \quad (21)$$

Una relación no local es obtenida mediante la transformación no-singular  $\mathbf{V}$  (ver igualdad (4)) en la forma

$$\phi^1 = \mathbf{F} \phi^0 \quad (22)$$

tales que la matriz  $\mathbf{F}$  es igual

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{V}$$

donde  $\mathbf{G}$  es la matriz diagonal formada por los valores  $\mu(\Lambda_l), l = 1, 2, \dots, N_{lay}$  que caracterizan las ondas salientes del dominio computacional. La relación discreta no local (22) expresa el flujo de energía a través de la frontera artificial del dominio computacional y una condición de radiación circular discreta no local basada en un filtro de Gauss radial, o sea, la capacidad de absorción de esta condición de frontera depende de la selección de los parámetros que determinan la forma de la función gaussiana. Esto da origen como en la sección anterior, a la búsqueda de los parámetros óptimos  $s$  y  $r_c$ , que caracterizan la menor reflexión posible en la frontera artificial del dominio computacional. En la sección anterior obtuvimos los parámetros óptimos de un filtro de esponjas, tomando en consideración la curvatura del dominio computacional. En este caso, despreciamos tal efecto, y usando la función objetivo (14) mediante la expresión para el coeficiente de reflexión discreto<sup>9</sup>

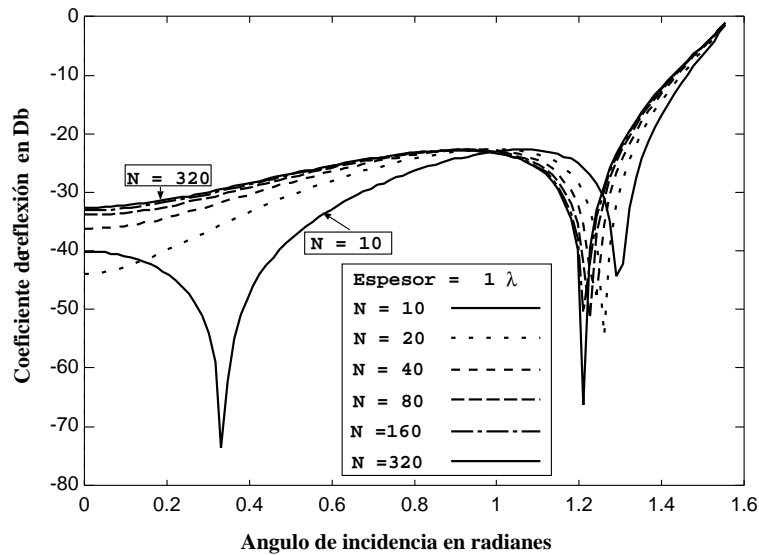
$$|R| = \left| \frac{\phi^{*1} - \exp(+il^{(0)}h)\phi^{*0}}{\phi^{*1} - \exp(-il^{(0)}h)\phi^{*0}} \right|_{r_0} \quad (23)$$

realizamos el proceso de optimización sobre el espacio de los parámetros  $s$  y  $r_c$ .

| Espesor de la capa<br>( $\lambda$ ) | Valores de $s$<br>óptimos | Coefficiente de reflexión<br>promedio $R$ |
|-------------------------------------|---------------------------|---|
| 1                                   | 3,1430                    | 2,7775e-03                                |
| 2                                   | 2,4905                    | 1,3249e-03                                |
| 3                                   | 1,9199                    | 2,7755e-04                                |
| 4                                   | 1,7823                    | 2,8770e-04                                |
| 5                                   | 1,5157                    | 9,6061e-05                                |
| 6                                   | 1,4585                    | 1,1577e-04                                |
| 7                                   | 1,2935                    | 4,5070e-05                                |
| 8                                   | 1,2638                    | 5,8650e-05                                |
| 9                                   | 1,1472                    | 2,4434e-05                                |
| 10                                  | 1,1229                    | 3,0625e-05                                |

**Tabla I.** Capa filtrante óptima

En la Tabla I se muestran los valores óptimos del parámetro  $s$  para capas de diferentes espesores. Notamos que para una capa de mayor espesor corresponde un valor óptimo de  $s$  cada vez menor, lo cual significa que la campana escalada a una longitud de onda es más estrecha. Estos valores han sido obtenidos prefijando el valor  $r_c$  al centro de la campana y considerando hasta 99 modos discretos progresivos. Las curvas de reflexión para diferentes resoluciones de la malla de cálculo ( $N$ -número de puntos por longitud de onda) son mostradas en la Figura 6. En esta Figura puede observarse que el proceso es convergente.

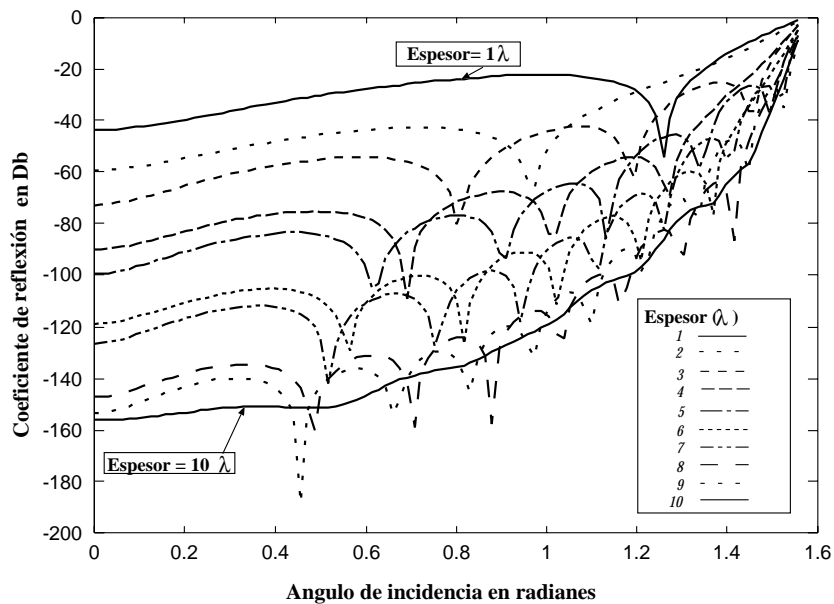


**Figura 6.** Coeficiente de reflexión óptimo (en Db, o sea,  $20\log_{10} |R|$ ) respecto al ángulo de incidencia en radianes, para diferentes mallas de cálculo

Resultados de estos cálculos para diferentes espesores son mostrados en la Figura 7. Como era de esperar, las curvas envolventes de los coeficientes de reflexión para un ángulo de incidencia dado decrecen cuando el espesor de la capa filtrante crece (excepto para ciertos ángulos donde el coeficiente de reflexión tiende a cero). Estos resultados son comparables a los resultados del método PML de Collino y Monk<sup>14</sup>. Para propósitos prácticos el valor óptimo para  $s$  puede ser fiteado como

$$s \sim 3,2 \delta^{-0,45}$$

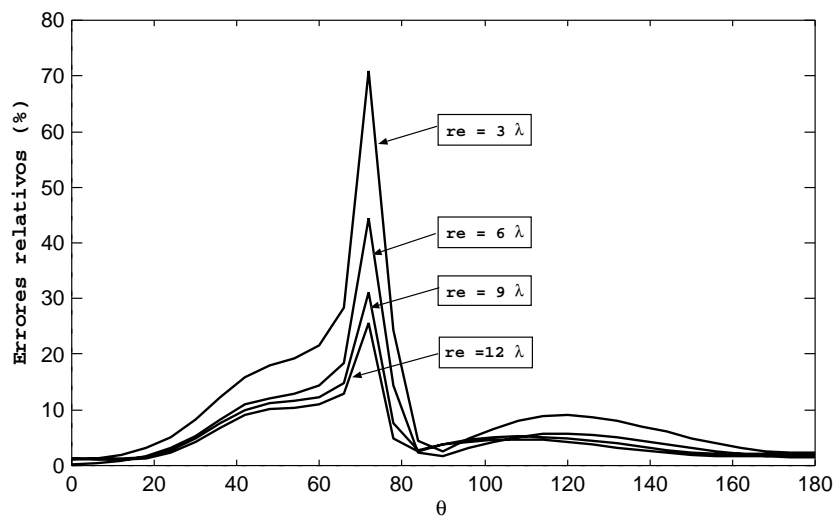
para espesores de capa de hasta diez longitudes de ondas.



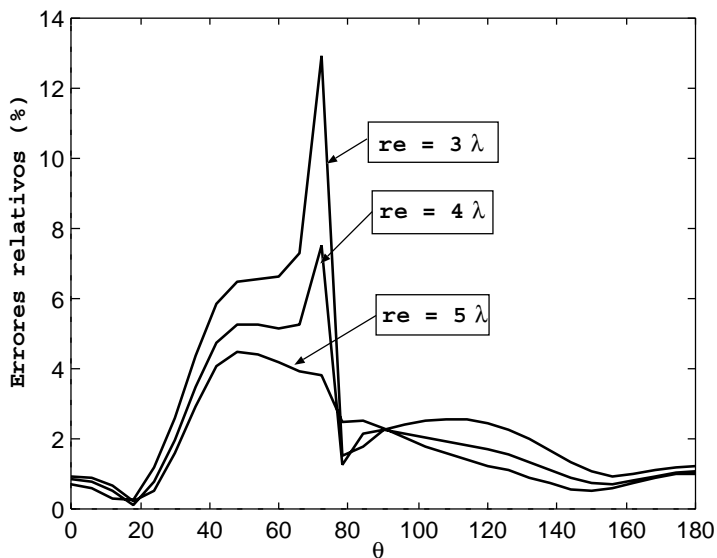
**Figura 7.** Coeficiente de reflexión óptimo (en Db, o sea,  $20\log_{10} |R|$ ) respecto al ángulo de incidencia en radianes, para diferentes mallas de cálculo

## PROBLEMAS DE RADIACIÓN Y DISPERSIÓN

La Figura 8 muestra los errores relativos en la línea de costa alrededor de una isla circular sobre un fondo plano, obtenidos mediante la aplicación de los métodos *DNL* circular y de un Filtro de Gauss en coordenadas polares. La mejoría respecto al método *DNL* circular es sustancial con un orden de un 6% en porcentajes relativos, lo cual reafirma la importancia del desarrollo de métodos para acelerar la convergencia del método *DNL* circular.



a) *DNL* circular



b) Filtro de Gauss

**Figura 8.** Aceleración de la convergencia del método *DNL* circular. Ejemplo: Errores relativos en la línea de costa respecto al azimut  $\theta$  para  $ka = \pi$

## CONCLUSIONES

En este artículo son presentadas dos técnicas numéricas que posibilitan acelerar el proceso de condensación del método DNL circular. Estas técnicas se basan en el filtrado de las ondas salientes del dominio computacional mediante un filtro de esponjas o mediante un filtro de Gauss. El uso de un filtro de Gauss en la capa filtrante ofrece un mejor comportamiento en el espacio de los parámetros con una convergencia garantizada respecto a la resolución de la malla y el espesor de la capa de condensación. El hecho que las funciones que caracterizan dichos filtros dependen sólo de la distancia al dispersor refleja su buen comportamiento para el uso de mallas uniformes en la región exterior circundante al dominio computacional. Diferentes aspectos en el uso de estas técnicas son objeto de investigación actual.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido soporte financiero del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, Argentina) mediante el proyecto BID 802/OC-AR PID Nr. 26, y de la Universidad Nacional del Litoral (Argentina).

## NOMENCLATURA

| Lista de símbolos                 | Descripción   |
|-----------------------------------|---|
| $k$                               | número de onda  |
| $\omega$                          | frecuencia angular del movimiento ondulatorio               |
| $\lambda$                         | longitud de onda  |
| $H$                               | altura de la onda   |
| $(x,y,z)$                         | coordenadas rectangulares del espacio $\mathbb{R}^3$        |
| $\nabla$                          | operador gradiente horizontal                               |
| $\partial$                        | símbolo de derivada parcial                                 |
| $g$                               | aceleración gravitatoria                                    |
| $h$                               | profundidad local de la capa de líquido                     |
| $\Delta$                          | laplaciano  |
| $C$                               | celeridad de fase   |
| $C_g$                             | celeridad de grupo  |
| $\partial\Omega$                  | frontera de $\Omega$  |
| $\Gamma_g$                        | frontera tipo Dirichlet                                     |
| $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ | derivada de $\phi$ en la dirección normal                   |
| $r$                               | distancia al origen en coordenadas polares                  |
| $\text{Re}\phi$                   | parte real de $\phi$  |
| $\text{Im}\phi$                   | parte imaginaria de $\phi$                                  |
| $\mathbf{M}$                      | matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineal |
| $\tilde{\mathbf{K}}$              | matriz de rigidez global modificada                         |
| $\mathbf{F}$                      | matriz <i>DNL</i>   |
| $\mathbf{I}$                      | matriz identidad  |
| $h_\theta$                        | longitud de un elemento $e$ en la dirección $\theta$        |
| $\dot{\phi}, \ddot{\phi}$         | primera y segunda derivada de $\phi$                        |
| $\phi_r, \phi_{rr}$               | primera y segunda derivada de $\phi$ respecto a $r$         |
| $i = \sqrt{-1}$                   | unidad imaginaria   |
| $\Im$                             | parte imaginaria de un número complejo                      |
| $i, j$                            | subíndices  |
| $\mathbf{A}^j$                    | matriz correspondiente a la capa $j + 1$                    |
| $\mathbf{B}^j$                    | matriz correspondiente a la capa $j$                        |
| $\mathbf{F}^j$                    | matriz <i>DNL</i> en la capa $j$                            |
| $\mathbf{C}^j$                    | matriz correspondiente a la capa $j - 1$                    |
| $N_{lay}$                         | número de nodos sobre la dirección transversal              |

## REFERENCIAS

- 1 N.N. Abboud, P.M. Pinsky, “Finite element solution and dispersion analysis for the transient structural acoustics problems”, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. **43**, pp. 381–388, (1990).
- 2 A. Bayliss, M. Gunzburger y E. Turkel, “Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions”, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. **42**, N° 2, pp. 430–451, (1982).
- 3 X. Bingyi, V.G. Panchang y Z. Demirbibeck, “Exterior reflections in elliptic harbor wave models”, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engng.*, pp. 118–125, (1966).
- 4 R.P. Bonet, “Finite elements in unbounded domains for the water waves refraction-diffraction problem”, Tesis doctoral, Univ. Nac. del Litoral, Santa Fe, Argentina, (1998).
- 5 R.P. Bonet, N. Nigro y M.A. Storti, “Open boundary conditions for water waves propagation elliptic models”, In *CIMAF'97 Simposio de Matemática*, La Habana, 24-28 Marzo, (1997).
- 6 R.P. Bonet, N. Nigro y M.A. Storti, “Solution of Berkhoff’s equation with approximate radiation conditions”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **13**, N° 4, pp. 547–557, (1997).
- 7 R.P. Bonet, N. Nigro, M.A. Storti y S. Idelsohn, “A discrete non-local (DNL) outgoing boundary condition for diffraction of surfaces waves”, *Communications on Num. Meth. Engng.*, Vol. **14**, pp. 849–861, (1998).
- 8 R.P. Bonet, N. Nigro, M.A. Storti y S. Idelsohn, “Condición absorbente discreta no-local (DNL) en diferencias finitas para modelos elípticos de propagación de ondas en el mar”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **14**, N° 4, pp. 481–500, (1998).
- 9 R.P. Bonet, N. Nigro, M.A. Storti y S. Idelsohn, “Non-reflective planar boundary condition based on Gauss filter”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **47**, pp. 969–983, (2000).
- 10 R.P. Bonet, N. Nigro, M.A. Storti y S. Idelsohn, “Discrete non-local absorbing boundary condition for exterior problems governed by Helmholtz equation”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **29**, pp. 605–621, (1999).
- 11 R.P. Bonet, N. Nigro, M.A. Storti y S. Idelsohn, “The discrete non-local sponge filters as outgoing boundary condition for water waves radiation and scattering”, *VIII Congreso de Ingeniería Mecánica*, Chile, Octubre, (1998).
- 12 R.P. Bonet, N. Nigro, M.A. Storti y S. Idelsohn, “A discrete non-local outgoing boundary condition for waves radiation and scattering”, In *WCCMIV-ABSTRACTS*, Vol. **II**, Buenos Aires, Argentina, 29 Junio-2 Julio, CERIDE, (1998).
- 13 H.S. Chen y C.C. Mei, “Oscillations and wave forces in an offshore harbor: Applications of hybrid finite element method to water-wave scattering”, *Report 190*, Ralph M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, Mass. Inst. Tech., (1974).
- 14 F. Collins y P. Monk, “Optimizing the perfectly matched layer”, Project Ondes, Rapport des recherche, INRIA (1996).
- 15 F. Collins y P. Monk, “The perfectly matched layer in curvilinear coordinate. Theme 4. Simulation and optimisation of systems couplés”, Project Ondes, *Rapport des recherche*, Vol. **3049**, INRIA, (1996).
- 16 J. D’Elía, “Numerical methods for the ship wave-resistance problem”, Tesis doctoral, Universidad Nac. del Litoral, Santa Fe, Argentina, (1997).

- 17 B. Engquist y A. Majda, "Radiation boundary conditions for acoustic and elastic calculations", *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. **32**, pp. 313–357, (1979).
- 18 B. Engquist y A. Majda, "Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves", *Mathematics of Computation*, Vol. **31**, N° 139, pp. 629–651, (1977).
- 19 D. Givoli, "A spatially exact non-reflecting boundary condition for time dependent problems", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **95**, pp. 97–113, North Holland, (1992).
- 20 R.L. Higdon, "Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equations", *Mathematics of Computation*, Vol. **47**, pp. 437–459, (1986).
- 21 M. Israeli y A. Orszag Steven, "Approximation of radiation boundary conditions", *J. Comp. Physics*, Vol. **41**, pp. 115–135, (1981).
- 22 R. Kosloff y D. Kosloff, "Absorbing boundaries for wave propagation problems", *J. Comp. Physics*, Vol. **63**, pp. 363–376, (1986).
- 23 G.A. Kriegsmann, "Radiation conditions for wave guide problems", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. **3**, N° 3, (1982).
- 24 G.A. Kriegsmann y C.S. Morawetz, "Solving the Helmholtz equation for exterior problems with variable index of refraction: I", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. **1**, N° 3, pp. 371–383, (1980).
- 25 B. Lichtenberg, Y. Liu, J. Reynolds, J.K. Webb y D. Meade, "Applications and performance of a local conformal radiation boundary condition", In *1994 Digest for IEEE Antennas and Propagation Society Int. Symposium*, Vol. **GA**, pp. 406–409, (1994).
- 26 D. Meade, G.W. Slade, A.F. Peterson y J.K. Webb, "Comparison of local radiation boundary conditions for the scalar Helmholtz equation with general boundary shapes", *IEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. **43**, N° 1, pp. 506–514, Enero, (1995).
- 27 P.M. Pinsky y N.N. Abbound, "Finite element solution of the transient exterior structural acoustics problem based on the use of radially asymptotic boundary operators", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **85**, pp. 311–348, (1991).
- 28 M.A. Storti, J. D'Elía, R.P. Bonet y S. Idelsohn, "The discrete non-local (DNL) radiation boundary condition", In *X ENIEF*, Vol. **XVIII**, pp. 143–152, San Carlos de Bariloche, 10-14 Noviembre, (1997).
- 29 M.A. Storti, J. D'Elía y S. Idelsohn, "Algebraic discrete non-local (DNL) for the ship wave resistance problem", *J. Comp. Physics*, Vol. **146**, pp. 570–602, (1997).
- 30 O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly y P. Bettess, "The coupling of the finite element method and boundary solution procedures", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **11**, N° 2, pp. 355–375, (1977).