

# **ESTIMACION DEL HIDROGRAMA UNITARIO. ESTUDIO COMPARATIVO DE CUATRO METODOS LINEALES**

**José Luis Ayuso, Adolfo Peña y M<sup>a</sup> Pilar Montesinos**

Area de Proyectos de Ingeniería  
E.T.S. Ingenieros Agrónomos y de Montes  
Universidad de Córdoba

**RESUMEN:** En Hidrología se emplean los modelos lineales para el análisis de la respuesta de una cuenca a la lluvia. La teoría del hidrograma unitario constituye uno de los métodos más utilizados en la práctica de la ingeniería en la fase de planificación, diseño y proyecto de estructuras hidráulicas. Se presentan los fundamentos teóricos de cuatro métodos lineales para la deducción del hidrograma unitario o respuesta pulso de una cuenca: *Programación lineal*, *mínimos cuadrados*, *método de regularización o de mínimos cuadrados suavizados*, y *modelo de Nash*. Los cuatro métodos son aplicados con datos de diversos episodios de lluvia-escorrentía registrados en una cuenca real. Los hidrogramas unitarios estimados junto con los hidrogramas de escorrentía directa calculados son analizados y comparados.

## **INTRODUCCION**

El concepto de hidrograma unitario (HU), hidrograma de escorrentía directa originado por un volumen de 1 mm de precipitación efectiva uniforme sobre una cuenca durante un periodo de tiempo especificado, constituye la base del método más usado en el análisis del proceso lluvia-escorrentía a escala de cuenca, en la predicción de avenidas futuras originadas por aguaceros de proyecto, en la determinación del efecto de las obras hidráulicas de protección contra avenidas en la respuesta de la cuenca y en la gestión de los recursos hidráulicos.

La teoría del hidrograma unitario conforma un modelo conceptual que supone a la cuenca como un *sistema lineal e invariable en el tiempo* en el que la entrada es la lluvia y la salida el caudal de escorrentía directa (Dooge, 1973). El supuesto de linealidad implica el cumplimiento de los principios de proporcionalidad y superposición (Lattermann, 1991).

Aunque el comportamiento de las cuencas en la naturaleza no es lineal, algunas pueden operar con un mayor grado de linealidad que otras. La hipótesis de linealidad, particularmente apropiada en el ámbito de las avenidas ocurridas en cuencas naturales, presenta la ventaja de su simplicidad y el conocimiento de los métodos matemáticos requeridos, haciéndola muy útil en la aplicación de la ingeniería de proyectos de estructuras hidráulicas.

Los hidrogramas unitarios pueden deducirse de registros de precipitaciones y de caudales de escorrentía en una cuenca, utilizando diversas técnicas. Se presentan las bases teóricas junto con la formulación matemática

de diversos métodos de estimación de las ordenadas del HU: *a) Programación lineal*, *b) Mínimos cuadrados*, *c) Mínimos cuadrados suavizados* y *d) Modelo conceptual de Nash*.

Los cuatro métodos se aplican a cuatro episodios de lluvia-escorrentía registrados en una cuenca real (Singh, 1976) para deducir el HU de cada uno de los aguaceros. Los resultados obtenidos por cada método son comparados en base a cada uno de los hidrogramas unitarios estimados y a la capacidad de reproducir los hidrogramas de escorrentía directa registrados. El estudio comparativo se realiza analizando algunos valores característicos de los hidrogramas: a) los caudales punta,  $U_p$  y  $Q_p$ , del HU y del hidrograma reproducido, respectivamente; b) el tiempo en que tiene lugar el caudal punta,  $t_p$ , y c) el volumen total de escorrentía dado por el HU (1 mm de escorrentía) y el dado por el hidrograma calculado (total de precipitación efectiva que lo origina).

## **ECUACIONES BASICAS**

La relación entre las ordenadas  $Q$  ( $m^3/s$ ) de un hidrograma registrado en una cuenca a intervalos de tiempo discretos,  $\Delta t$  (horas), y la precipitación efectiva,  $P$  (mm), registrada también a los mismos intervalos de tiempo,  $\Delta t$ , puede expresarse por la integral de convolución discreta de un sistema lineal (Chow y col., 1988):

$$Q_j = \sum_{i=1}^{j \leq m} P_i U_{j-i+1} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

donde  $n$  representa el número total de ordenadas regis-

tradas a intervalos  $\Delta t$  del hidrograma de salida o función de respuesta,  $m$  el número de pulsos de intensidad constante de la función de entrada (número de datos pulso del hidrograma de precipitación efectiva) y  $U_{i+1}$  ( $m^3 s^{-1} mm^{-1}$ ) la función de datos instantáneos de salida o respuesta del sistema a un pulso unitario (ordenadas del hidrograma unitario). El límite superior del sumatorio  $j \leq m$ , indica que los términos han de sumarse para  $i=1,2,\dots,j$  siempre que  $j \leq m$ , estando limitada la suma a  $i=1,2,\dots,m$ , cuando  $j > m$ .

Las ordenadas del HU de duración  $\Delta t$ ,  $U_1, U_2, \dots, U_l$ , siendo  $l=n-m+1$ , han de cumplir la siguiente relación lineal:

$$\sum_{i=1}^{l=n-m+1} U_i = C \quad (2)$$

donde  $C$  es una constante dimensional ( $m^3 s^{-1} mm^{-1}$ ) que convierte las unidades del hidrograma de precipitación efectiva (mm) en unidades del hidrograma de escorrentía directa ( $m^3/s$ ):

$$C = \frac{A}{3,6 \Delta t} \quad (3)$$

donde:

- $A$  = Área de la cuenca ( $km^2$ )
- $\Delta t$  = Intervalo de tiempo en que se dan los valores de las ordenadas del hidrograma y los pulsos de lluvia del hidrograma (h)

El HU comienza desde un caudal nulo, crece hasta un valor punta para decrecer posteriormente de forma monótona con los valores crecientes de  $i$  hasta un valor nulo. Por consiguiente, los valores de los caudales del HU han de ser nulos o positivos. Matemáticamente esta condición se expresa como:

$$U_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,l \quad (l=n-m+1) \quad (4)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (4) constituyen la base de los diversos métodos para deducir el hidrograma unitario cuando se conocen los valores de  $P_i$  y  $Q_i$  de registros de precipitación efectiva y de aforos.

La ecuación (1) da lugar a un conjunto de  $n$  ecuaciones con  $l$  incógnitas que son los valores de  $U_i$ , existiendo más ecuaciones que incógnitas. Si la transformación de la lluvia efectiva en escorrentía directa fuese verdaderamente lineal e invariable en el tiempo y si los valores de la precipitación y caudales observados estuviesen libres de errores, la estimación de la respuesta pulso de la cuenca (HU) sería realmente fácil, ya que todas las ecuaciones individuales dadas por la expresión (1) serían consistentes y una solución de cualquier ordenada  $U_i$  del hidrograma unitario habría de satisfacer automáticamente todas las demás ecuaciones. Por consiguiente, la respuesta pulso podría determinarse

resolviendo cualquier subconjunto de  $l$  ecuaciones. En la práctica, la medición de la precipitación y los caudales y la consiguiente deducción de la precipitación efectiva y de la escorrentía directa introducen errores en los datos (errores de observación, de registro, sistemáticos, etc.) que tienen efecto sobre la estimación de la respuesta pulso de la cuenca.

Puesto que el proceso de transformación de la lluvia en escorrentía es un proceso de suavizamiento, el proceso inverso, la deconvolución para estimar la respuesta pulso de la cuenca, amplifica cualquier error en los datos o en la modelación matemática del proceso. Esto significa que pequeños errores en los datos pueden producir grandes errores en las estimaciones de la respuesta pulso de la cuenca como estimaciones inestables y físicamente no realistas (Bruen y Dooge, 1984).

### MÉTODOS ANALIZADOS DE ESTIMACION DEL HIDROGRAMA UNITARIO

Se describen y analizan cuatro métodos para la deducción de los valores de las ordenadas del hidrograma unitario.

#### *Método de programación lineal y de programación lineal modificado*

La linealidad de las ecuaciones (1) y (2) junto con las restricciones dadas por la ecuación (4) determinan que pueda utilizarse la programación lineal para obtener la solución del hidrograma unitario, ya que es un procedimiento apropiado para resolución de problemas en los que existan más ecuaciones que incógnitas, suministrando a la vez una optimización del resultado. El objetivo principal es obtener un hidrograma unitario tal que la diferencia entre los valores de  $Q$  observados y los reconstruidos,  $Q^*$ , a partir del HU y los valores de precipitación efectiva sea mínima. Esto se consigue minimizando la suma de las diferencias absolutas entre  $Q$  y  $Q^*$

La ecuación (1) puede expresarse de nuevo como

$$Q_j = Q_j^* + r_j = \sum_{i=1}^{j \leq m} P_i U_{j-j+1} + r_j \quad (5)$$

$(j=1,2,\dots,n)$

donde  $r_i$  son las diferencias entre  $Q_i$  y  $Q_i^*$  y pueden ser positivas, cero o negativas. Sin embargo, la técnica de programación lineal requiere que todas las variables  $r_i$  sean positivas. Para resolver esta cuestión, se dividen los residuos  $r_i$  en dos componentes, una desviación positiva  $\alpha_i$  y una desviación negativa  $\beta_i$ , según la técnica propuesta por Deininger en 1969 (Chow y col., 1988; Singh, 1976):

$$r_j = \alpha_j - \beta_j \tag{6}$$

Ambas componentes,  $\alpha_j$  y  $\beta_j$ , serán variables positivas tal como requiere la técnica de programación lineal, de manera que:

si  $r_j > 0$ , es decir,  $Q_j > Q_j^*$ ,  $\alpha_j = r_j$  y  $\beta_j = 0$ ;

si  $r_j < 0$ , es decir,  $Q_j < Q_j^*$ ,  $\beta_j = -r_j$  y  $\alpha_j = 0$ ;

si  $r_j = 0$ , es decir,  $Q_j = Q_j^*$ ,  $\alpha_j = \beta_j = 0$ .

La ecuación (5) quedará:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{j \leq m} P_i U_{j-i+1} + \alpha_j - \beta_j \tag{7}$$

( $j = 1, 2, \dots, n$ )

y el objetivo será minimizar la suma de esas variables:

$$Z = \min \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) \tag{8}$$

( $j = 1, 2, \dots, n$ )

donde Z es la función objetivo.

La deducción de las ordenadas del HU es un problema general de programación lineal con una función objetivo (8), sujeta a n restricciones lineales (7), la restricción de linealidad (2) y los requerimientos de no negatividad de las ordenadas del HU (4).

Otra condición puede incluirse en el modelo tal que asegure que el HU deducido reproduzca exactamente el caudal punta del hidrograma de escorrentía directa registrado, evitando así perder una información de gran importancia. Esta condición implica que para el máximo valor registrado en el hidrograma de escorrentía directa se cumpla  $r_j = 0$ , siendo la restricción correspondiente:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{j \leq m} P_i U_{j-i+1} \quad \forall \{j / Q_j = Q_p\} \tag{9}$$

dando lugar la inclusión de esta última condición al *Método de Programación Lineal Modificado*, que a riesgo de empeorar la optimización (posibilidad de resultar un mayor valor de la función objetivo Z), asegura la reproducción del caudal punta en el hidrograma de escorrentía directa.

**Método de los mínimos cuadrados**

Este método minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados de Q y los calculados a partir del HU. Es muy utilizado en la determinación de la respuesta pulso de una cuenca. A diferencia de la programación lineal el método de los mínimos cuadrados no utiliza las ecuaciones (2) y (4). La ecuación (1) puede expresarse en forma matricial donde:

$$[Q] = [P][U] \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \dots \\ Q_m \\ Q_{m+1} \\ \dots \\ Q_{n-2} \\ Q_{n-1} \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_2 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_3 & P_2 & P_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ P_m & P_{m-1} & P_{m-2} & \dots & P_1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_m & P_{m-1} & \dots & P_2 & P_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & P_m & P_{m-1} & P_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & P_m & P_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & P_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_{n-m+1} \end{bmatrix} \tag{11}$$

La matriz [P] denominada matriz de convolución, es una matriz de n por l elementos, [Q] es un vector que contiene los valores de las n ordenadas del hidrograma registrado y [U] es el vector que contiene los valores incógnitas de las l ordenadas del HU. La matriz [P] tiene la estructura indicada en la ecuación (11), siendo el número de filas n mayor que el de columnas l. Se ha de cumplir que  $l = n - m + 1$ . El número de ecuaciones es n y el de incógnitas l, por lo que el sistema será sobredimensionado existiendo m-1 ecuaciones redundantes. Se utiliza el criterio de mínimos cuadrados para reducir el número de ecuaciones a l incógnitas y obtener [U].

Si se define por  $r_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) los residuos o errores obtenidos como diferencias entre los valores de Q observados y los reconstruidos a partir del HU estimado, se tiene:

$$[r] = [Q] - [P][U] \tag{12}$$

El método de los mínimos cuadrados estima las ordenadas del HU que minimiza la suma de los cuadrados de los errores o residuos:

$$E = \sum_{j=1}^n r_j^2 \tag{13}$$

Esto se obtiene fácilmente mediante el uso de productos internos, es decir, multiplicando [r] por su traspuesta  $[r]^T$ . Por consiguiente:

$$E = \sum_{j=1}^n r_j^2 [r]^T [r] = \tag{14}$$

$$= [Q] - [P][U]^T [Q] - [P][U]$$

Diferenciando E con respecto a [U] e igualando a cero se obtiene la siguiente expresión (Singh, 1988) que permite la estimación de las ordenadas  $U_i$ .

$$[U] = [P]^T [P]^{-1} [P]^T [Q] \tag{15}$$

Este método no asegura el cumplimiento de las restricciones dadas por las ecuaciones (2) y (4). Por consiguiente, los volúmenes de los hidrogramas unitarios deducidos pueden no equivaler a una escorrentía de 1 mm sobre la cuenca, pudiendo incluso ser negativas algunas ordenadas del HU.

**Método de los mínimos cuadrados suavizados**

Ya se ha indicado que la estimación de la respuesta pulso de una cuenca a partir de datos registrados de precipitación efectiva y de escorrentía directa es una operación que puede presentar inestabilidad, debido a que pequeñas perturbaciones en los datos pueden llevar a grandes desviaciones en la estimación resultante.

Los HU estimados por el método de los mínimos cuadrados pueden adolecer de algunos defectos como no poseer un volumen unitario, carecer de una forma suave y unimodal, tener ordenadas negativas y fuertes oscilaciones en los valores de las ordenadas del HU. Estos defectos pueden ser debidos a error del modelo cuando la respuesta de la cuenca no es aproximadamente lineal o invariable en el tiempo (dos de los supuestos en los que se basa el modelo) y/o a errores de los datos que se amplifican durante el proceso de estimación.

El segundo tipo de problema planteado anteriormente se soslaya mediante el método de los mínimos cuadrados suavizados, propuesto por Bruen y Dooge (1984). El método consiste en estimar [U] como la solución [Ū] de la ecuación (15) modificada:

$$[\hat{U}] = [[P]^T [P] + K[I]]^{-1} [P]^T [Q] \tag{16}$$

donde K es un parámetro escalar e [I] es la matriz identidad de 1 por 1 elementos. Esto permite una estimación sesgada de [U], siendo el sesgo proporcional a K. Bruen y Dooge (1984) proponen un programa de ordenador para resolver la ecuación (16) y estimar la respuesta pulso de la cuenca. Uno de los efectos de usar esta ecuación con valores positivos de K, en lugar de la ecuación (15) es reducir la amplificación que puede originar cualquier error en los datos al reducir la inestabilidad numérica en la solución. El parámetro K representa la incertidumbre del usuario sobre la calidad de los datos y controla el grado de restricción o suavizamiento impuesto sobre la estimación final.

**Modelo de Nash**

Determina el hidrograma unitario instantáneo (HUI) de la cuenca, hidrograma correspondiente a una precipitación efectiva de 1 mm que cae en un tiempo  $dt=0$ . El HUI representa la respuesta impulso de la cuenca a una entrada impulso instantánea y permite determinar el HU de la cuenca para cualquier duración.

Según el modelo conceptual desarrollado por Nash en 1957 (Chow y col, 1988, Singh, 1988; Viessman y col. 1989) el HUI de una cuenca natural puede deducirse representando la cuenca por una serie de embalses lineales idénticos en cascada recibiendo el primer embalse un volumen unitario instantáneo de lluvia efectiva. Los efectos de almacenamiento y difusión que tienen lugar en el conjunto de los  $n$  embalses de constante de almacenamiento  $k$ , determinan que el caudal de salida por el  $n$ -ésimo embalse quede especificado (Singh, 1988) por la ecuación:

$$Q_n(t) = \frac{1}{k\Gamma(n)} \left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} e^{-\frac{t}{k}} \tag{17}$$

que es la expresión de la función de densidad de la distribución gamma.

Los dos parámetros  $n$  y  $k$  del modelo pueden estimarse de un hietograma de precipitación efectiva y de su correspondiente hidrograma de escorrentía directa, resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente (Ayuso, 1990):

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_{0Q}^1}{S_Q} - \frac{M_{0I}^1}{S_I} &= NK \\ \frac{M_{0Q}^2}{S_Q} - \frac{M_{0I}^2}{S_I} &= n(n+1)k^2 + 2nk \frac{M_{0I}^1}{S_I} \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

donde  $M_{0Q}^1$  y  $M_{0Q}^2$  representan los momentos de primer y segundo orden respecto al origen del hidrograma de escorrentía directa registrado, y  $M_{0I}^1$  y  $M_{0I}^2$  los momentos de primer y segundo orden respecto al origen del hietograma de lluvia efectiva registrado. Una vez obtenidos los valores de  $n$  y  $k$ , puede estimarse a partir del HUI, el hidrograma unitario para cualquier duración  $\Delta t$  por la expresión (Ayuso, 1990)

$$Q(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t \frac{1}{k\Gamma(n)} \left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} e^{-\frac{t}{k}} dt \tag{19}$$

**PROGRAMAS DE ORDENADOR**

Se han desarrollado los programas de ordenador en FORTRAN 77, que permiten la estimación de las ordenadas del HU por cualquiera de los cuatro métodos expuestos. Los datos de entrada para los diversos métodos incluyen los valores del hietograma de precipitación efectiva para cada aguacero en mm, el hidrograma de escorrentía directa observado en  $m^3/s$ , y según el método utilizado, la duración del intervalo de tiempo  $\Delta t$  de duración del HU y la superficie de la cuenca en  $km^2$ . Los pulsos de precipitación efectiva y el hidrograma de escorrentía directa deben especificarse para cada intervalo de tiempo  $\Delta t$ . A partir de estos se generan todas las variables auxiliares necesarias para la obtención del HU.

En la Figura 1 se muestra un organigrama de la estructura de los programas desarrollados.

La solución de las ordenadas del HU por el modelo de programación lineal se realiza utilizando la subrutina

ocurridos en una cuenca real de 2266 km<sup>2</sup>. En la Tabla 1 se muestran los valores de los hietogramas de precipitación efectiva y de los hidrogramas de escorrentía directa registrados utilizados en este estudio y que se representan gráficamente en la Figura 2.

Tabla 1. Datos registrados de los aguaceros\* utilizados en el estudio.

Tiempo horas	Aguacero 1		Aguacero 2		Aguacero 3		Aguacero 4	
	P mm	Q m <sup>3</sup> /s						
0	0.00	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
4	3.05	47.96	9.14	15.99	3.05	7.99	5.08	23.98
8	22.35	175.87	21.34	79.94	12.19	27.18	1.02	79.94
12	20.32	575.56	23.37	367.72		78.34	8.13	127.90
16	25.40	1438.91	1.02	831.37		241.29	2.03	151.88
20	6.10	2238.30	3.05	1326.99		409.29	18.29	175.87
24		2238.30	6.10	1406.93		380.51	11.18	431.67
28		1758.67		1295.02		278.19	3.05	799.39
32		1311.01		1119.15		217.44	21.34	1151.13
36		911.31		975.26		177.47	3.05	1358.97
40		591.55		751.43		145.49	13.21	1422.92
44		399.70		591.55		116.71		1350.98
48		223.83		447.66		95.93		1326.99
52		127.90		319.76		73.54		1334.99
56		63.95		223.83		55.96		1103.16
60		31.98		143.89		38.37		831.37
64		15.99		79.94		25.58		575.56
68		0.00		47.96		17.59		415.69
72				31.98		7.99		303.77
76				15.99		3.2		223.83
80				0.00		0.00		159.88
84								111.92
88								63.95
92								39.97
96								15.99
100								7.99
104								0.00

\* Episodios de lluvia-escorrentía registrados en la cuenca del río Potomac en Cumberland (Maryland). Tomados de Singh, 1976.

SIMPLX (Press y col., 1986, # 10.8). El método de los mínimos cuadrados utiliza las subrutinas SVDCMP y SVBKS (Press y col., 1986, # 2.9) para resolver el sistema de ecuaciones (11). El método de los mínimos cuadrados suavizados resuelve el sistema de ecuaciones (16) mediante la subrutina KER6T (Bruen y Dooge, 1984 y 1992). Finalmente, la solución mediante el modelo de Nash se realiza mediante el programa HUNASH (Ayuso, 1990).

**DATOS UTILIZADOS**

Para el estudio comparativo de los cuatro métodos descritos de estimación del HU de una cuenca se ha procedido a su aplicación con datos registrados, extraídos de la literatura (Singh, 1976), de cuatro aguaceros

Del análisis de los datos de la Tabla 1 y Figura 2, se observa como los hidrogramas de los aguaceros 2 y 3 presentan las típicas formas unimodales de los hidrogramas de avenidas, con un caudal puntal precedido de una rama ascendente gradualmente creciente, seguida por la rama de recesión monótonamente decreciente, como respuesta a hietogramas también unimodales. Sin embargo, el hidrograma del aguacero 1 presenta un caudal punta mantenido durante un intervalo de tiempo (4 horas) como respuesta a un hietograma que presenta una intensidad de precipitación casi constante (entre 5,1 y 6,4 mm/h) durante tres periodos de tiempo consecutivos (desde las 4 a las 16 horas). Finalmente, el hidrograma del aguacero 4 presenta, tras la punta, una rama de recesión con valores fluctuantes que originan un máximo relativo como respuesta a las fuertes oscilaciones y variabilidad de los valores pulsos del hietograma de precipitación.

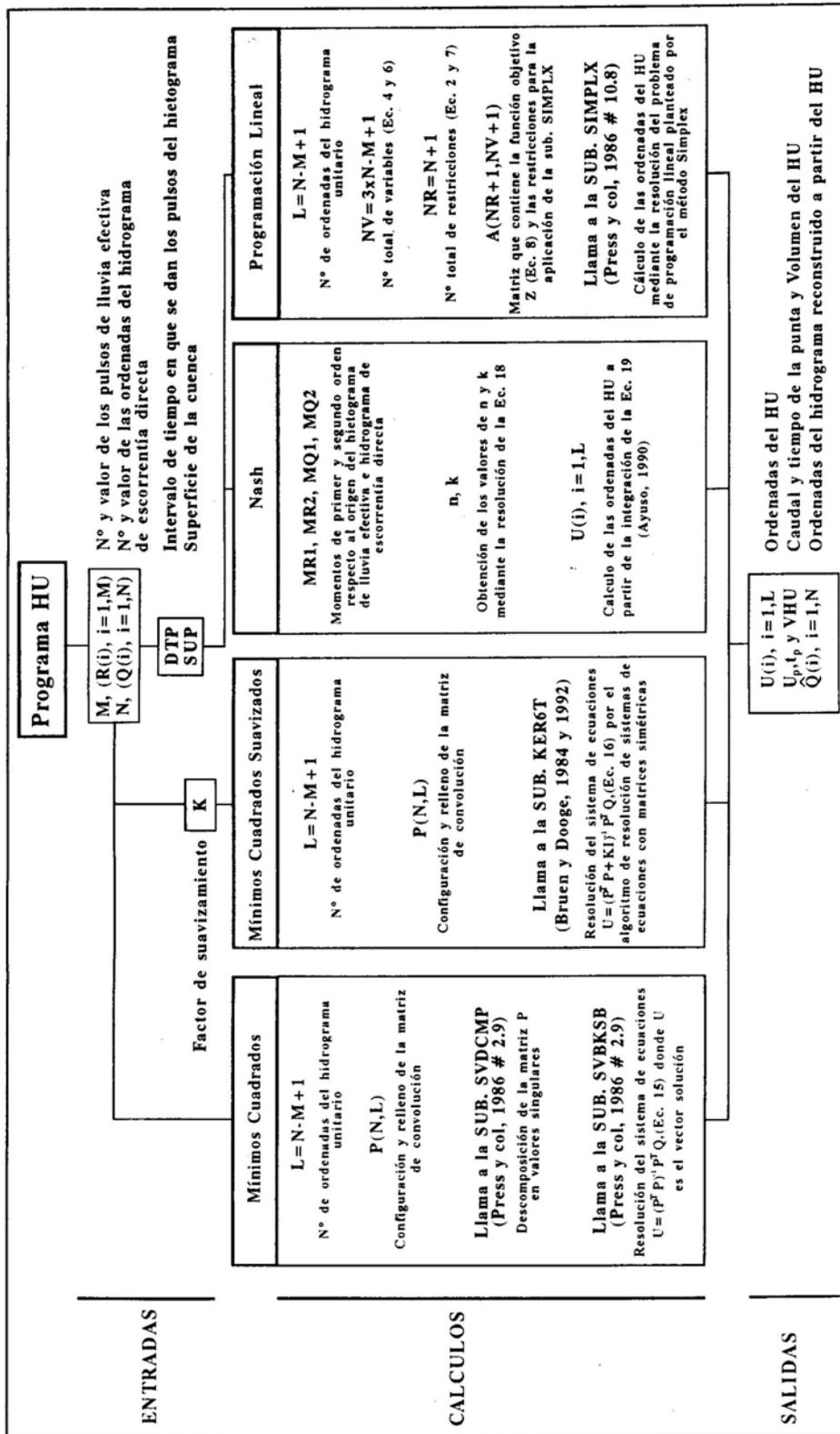


Figura 1. Diagrama de cálculo para los distintos métodos de estimación del HU

**RESULTADOS Y DISCUSION**

La aplicación de los métodos de estimación de la respuesta pulso de una cuenca a los datos registrados utilizados en este estudio ha permitido la deducción de los hidrogramas unitarios y la reproducción de los

ligeramente inferior a los demás el dado por el modelo de Nash. Los valores de los tiempos  $t_p$ , son iguales para todos los métodos, salvo para el de PLM que lo establece con cuatro horas de retraso. Los volúmenes de escorrentía son exactamente 1 mm en los métodos de PL y de Nash y prácticamente la unidad en los restantes

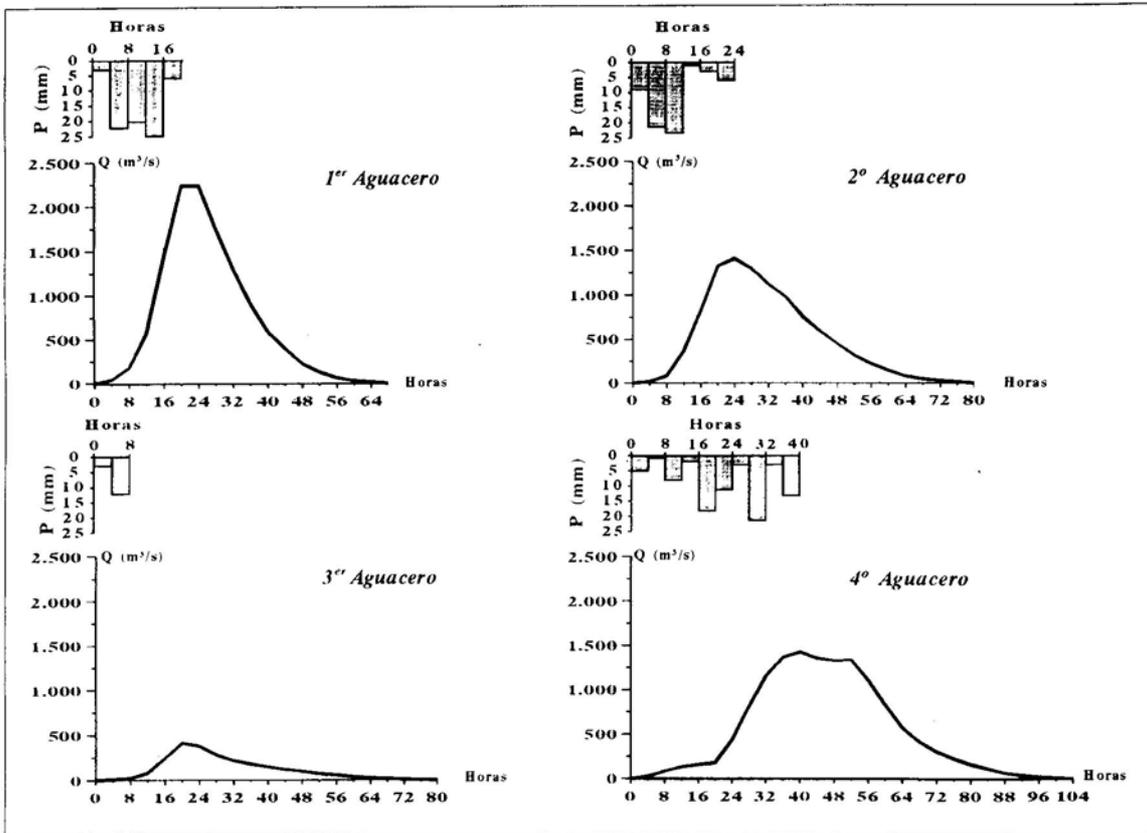


Figura 2. Episodios registrados de lluvia-escorrentía utilizados en el estudio

hidrogramas de escorrentía directa. La Tabla 2 resumen las hipótesis de partida de cada uno de los métodos utilizados.

**Comparación de los hidrogramas unitarios**

En la Figura 3 se muestran los hidrogramas unitarios deducidos por los métodos considerados para los cuatro aguaceros, y en la Tabla 3 se indican los valores de los caudales punta  $U_p$ , los tiempos en que tienen lugar tales caudales,  $t_p$ , y los volúmenes de escorrentía directa originados por los hidrogramas unitarios.

Referente al primer aguacero, puede observarse que el mayor caudal punta se obtiene con el método de PLM debido a que una de las restricciones era asegurar el valor punta del hidrograma. Los caudales punta estimados por los otros métodos son muy similares, siendo

En cuanto a la forma de los hidrogramas unitarios obtenidos por los diversos métodos para el primer aguacero, las más regulares o suaves son las dadas por el modelo de Nash y por el método de MCS con un valor del parámetro de suavizamiento de 135 con el que se consigue una rama descendente monótonamente decreciente. Estas formas suaves se consiguen a costa de presentar caudales punta algo inferiores a los obtenidos por los otros métodos. Los métodos de PL y de PLM dan hidrogramas unitarios con máximos relativos en la rama de recesión y el de MC presenta ordenadas negativas.

Los HU deducidos para los aguaceros 2 y 3 por los métodos de PL, MC y MCS, son prácticamente los mismos. Presentan unos caudales punta,  $U_p$ , prácticamente iguales. El método de Nash presenta un valor de la punta algo inferior. Los valores de  $t_p$  son idénticos

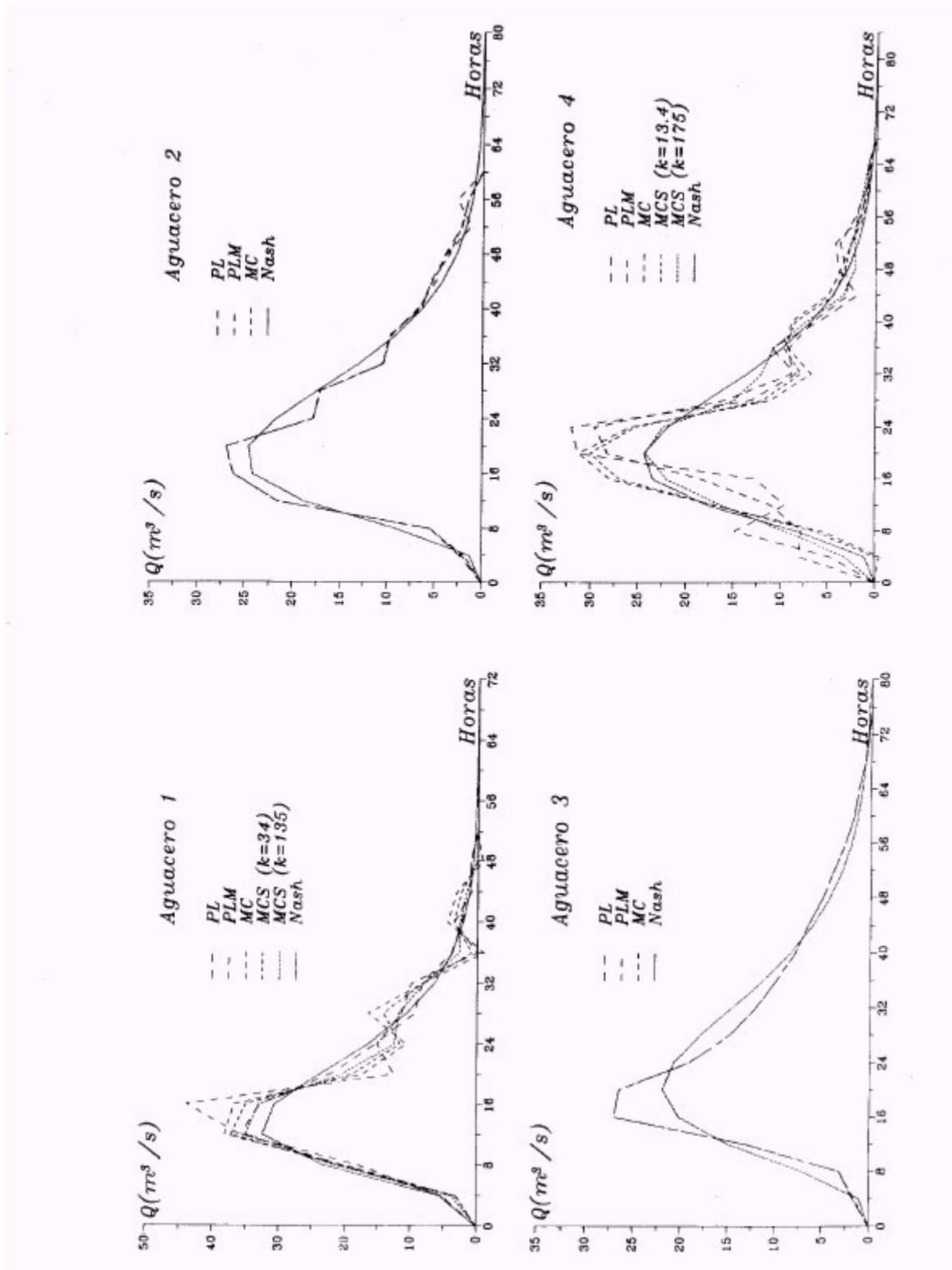


Figura 3. Hidrogramas unitarios estimados

en los cuatro métodos y los volúmenes de escorrentía la unidad.

Respecto al cuarto aguacero estudiado, el mayor caudal punta  $U_p$  está dado por el método de **PL**, mientras que el de **PLM** da un valor ligeramente inferior y muy

los aguaceros 1 y 4 y el de **PL** que también lo retrasa en igual magnitud en el aguacero 1. Respecto al volumen de escorrentía, los métodos de **PL** y **PLM** obtienen, en todos los casos, el valor esperado de 1 mm de escorrentía, siendo el método de **MCS** con mayor valor del parámetro de suavizamiento el que en ninguno

Tabla 2. Hipótesis de partida de cada uno de los métodos aplicados

Método	HIPOTESIS HIDROGRAMA UNITARIO <sup>a</sup>					HIP. HID. ESCORRENTIA <sup>b</sup>		
	$U_i \geq 0$	$U_i \leq U_{i-1}$	Vol=1	Cont	Disc	min   e	min(e) <sup>2</sup>	$Q_p = Q_p^*$
<b>PL</b>	*		*		*	*		
<b>PLM</b>	*		*		*	*		*
<b>MC</b>					*		*	
<b>MCS</b>	*				*		*	
<b>MCS</b>	*	*			*		*	
<b>Mod. Nash</b>	*	*		*				

- a)  $U_i \geq 0$ : Todas las ordenadas del **HU** son positivas.  
 $U_i \leq U_{i-1}$ : La rama descendente del **HU** es monótona decreciente.  
 Vol= 1: El volumen de escorrentía del **HU** es igual a la unidad (1 mm).  
 Cont: Calcula el **HU** como una función continua.  
 Disc: Calcula el **HU** como una función discreta.
- b) min | e |: Minimiza la suma de los valores absolutos de las diferencias entre las ordenadas del hidrograma de escorrentía observado y calculado.  
 min(e)<sup>2</sup>: Minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre las ordenadas del hidrograma de escorrentía observado y calculado.  
 $Q_p = Q_p^*$ : Asegura la reproducción del caudal punta en el hidrograma de escorrentía.

similar a los obtenidos por **MC** y **MCS** con un valor del parámetro de suavizamiento de 13,4. Los caudales punta menores están dados, en este caso, por el modelo de Nash y por el método de **MCS** con un valor del parámetro de suavizamiento de 175, a cambio de presentar una forma más suave y característica del **HU**. En cuanto a los tiempos,  $t_p$ , del caudal punta, los métodos de **PL** y **PLM** lo retrasan un período de tiempo respecto a los otros métodos. Prácticamente todos los métodos dan un volumen de escorrentía unitario, salvo el de **MCS** con parámetro de suavizamiento  $K=175$ .

De forma general puede decirse que los dos métodos de **PL** utilizados dan los mayores valores del caudal punta,  $U_p$ , en todos los casos estudiados, siendo el modelo de Nash el que estima los menores caudales punta del **HU**. Los métodos de **MC** y **MCS** dan valores intermedios, muy similares entre sí, de las puntas del **HU**, aunque el suavizamiento de la forma del **HU** se realiza a costa de la disminución del valor de la punta. En cuanto al valor de  $t_p$ , todos los métodos presentan los mismos valores dentro de cada aguacero, excepto el de **PLM** que lo retrasa en un periodo de tiempo para

de los casos reproduce el volumen de 1 mm de escorrentía. Analizando la forma del **HU**, el modelo de Nash es el que produce los **HU** con formas más característicamente unimodales, seguido por el método de **MCS** con altos valores del parámetro de suavizamiento, mientras que para los aguaceros 1, 2 y 3 los **HU** deducidos por el método de **PL** presentan dos mesetas en la rama de recesión que puede ser una característica debida a la configuración de la red de drenaje de la cuenca.

**Comparación de los hidrogramas de escorrentía directa**

En la Figura 4 se representan los hidrogramas de escorrentía directa calculados a partir de los **HU** deducidos anteriormente frente a cada hidrograma de escorrentía observado y en la Tabla 4 se indican los valores característicos caudal punta,  $Q_p$ , tiempos en que tienen lugar tales caudales,  $t_p$ , y los volúmenes de escorrentía directa.

Todos los hidrogramas calculados para el aguacero 1 reproducen con una buena aproximación al hidrograma

observado, siendo los que más se ajustan los obtenidos por PL y MC. Todos ellos son unimodales excepto el de PLM que reproduce la meseta de la punta, pero en la rama de recesión presenta valores oscilantes respecto a los observados.

que no pueden eliminarse en los modelos descritos. Otros posibles son los de observación y registro de datos, los sistemáticos y los de transformación de los datos de lluvia y escorrentía en datos de precipitación efectiva y escorrentía directa. Los cuatro modelos analizados suministran una solución al problema

Tabla 3. Comparación de los hidrogramas unitarios.

Métodos	Aguacero 1			Aguacero 2			Aguacero 3			Aguacero 4		
	U <sub>p</sub>	t <sub>p</sub>	Vol.	U <sub>p</sub>	t <sub>p</sub>	Vol.	U <sub>p</sub>	t <sub>p</sub>	Vol.	U <sub>p</sub>	t <sub>p</sub>	Vol.
	m <sup>3</sup> /s	h	mm	m <sup>3</sup> /s	h	mm	m <sup>3</sup> /s	h	mm	m <sup>3</sup> /s	h	mm
<b>Programac. Lineal</b>	35.548	12	1.000	27.015	20	1.000	26.962	16	1.000	32.063	24	1.000
<b>Programac. Lineal Mod.</b>	43.862	16	1.000	26.983	20	1.000	26.962	16	1.000	29.620	24	1.000
<b>Mínimos Cuadrados</b>	38.087	12	0.994	27.039	20	0.997	26.961	16	0.999	31.252	20	1.000
<b>Mínimos Cuadrados Suav.</b>	37.097 <sup>a)</sup>	12	0.990							30.082 <sup>c)</sup>	20	1.000
	34.942 <sup>b)</sup>	12	0.975							24.245 <sup>d)</sup>	20	0.984
<b>Modelo de Nash<sup>e)</sup></b>	32.409	12	1.000	24.687	20	1.000	21.888	20	0.998	24.366	20	1.000

- a) Con parámetro de suavizamiento  $K=34$ , que hace todas las ordenadas positivas.
- b) Con parámetro de suavizamiento  $K=135$ , que hace que la rama de recesión sea monótona decreciente.
- c) Con parámetro de suavizamiento  $K=13^4$ , que hace todas las ordenadas positivas.
- d) Con parámetro de suavizamiento  $K=175$ , que hace que la rama de recesión sea monótona decreciente.
- e) Aguacero 1:  $k=4,875$   $n=3,240$ ; Aguacero 2:  $k=5,762$   $n=3,815$   
 Aguacero 3:  $k=6,783$   $n=3,658$ ; Aguacero 4:  $k=5,825$   $n=3,877$

Los hidrogramas calculados por los métodos de PL, PLM y MC son prácticamente los mismos que los observados apreciándose que solamente el del modelo de Nash rebaja el valor del caudal punta, aunque reproduce con bastante aproximación el volumen total de escorrentía.

A pesar de la falta de uniformidad de la precipitación del aguacero 4 y de la consiguiente peculiaridad del hidrograma observado que presenta una punta y un máximo relativo, los hidrogramas calculados lo reproducen con suficiente aproximación, aunque sin tanta precisión o concordancia como en los aguaceros 1, 2 y 3. En este caso, los que más se aproximan al observado son los obtenidos por PL y PLM. Los demás presentan una forma unimodal teniendo los de MC y Nash unas puntas ligeramente superiores y los de MCS algo inferiores. En cuanto al volumen de escorrentía todos los métodos lo reproducen prácticamente, siendo el que más se desvía por defecto el de MCS con parámetro de suavizamiento de 175.

**CONCLUSIONES**

El concepto de hidrograma unitario comprende una serie de aproximaciones, siendo la principal la de describir el comportamiento real, no lineal, de una cuenca, en el proceso lluvia-escorrentía, por un sistema lineal. Tal aproximación puede causar errores

matemáticamente planteado.

En el método de PL la función objetivo minimiza la suma de las desviaciones entre los valores de escorrentía observados y los deducidos, sin asignar ningún factor de ponderación a la región de la punta del HU, siendo importante al deducir el HU definir adecuadamente el caudal punta y el tiempo en que se produce dicha punta. Este defecto se ha paliado parcialmente mediante el método PLM que reproduce con exactitud el caudal punta observado.

Otra cuestión a considerar es la forma del HU. Es importante que la forma sea unimodal y suavizada con la rama de recesión monótonamente decreciente. Los modelos de PL y MC no aseguran tal condición a diferencia del modelo de MCS o de regularización que permite el suavizamiento de la forma del HU a cambio de una disminución en la punta del hidrograma deducido de escorrentía directa. El modelo de Nash presenta la ventaja de obtener HU bien configurados y unimodales por deducirse a partir de una expresión matemática como la función de densidad de una distribución gamma que presenta estas características. En este trabajo sólo se ha llevado a cabo la aplicación de los métodos de estimación del HU a episodios individuales de lluvia-escorrentía, deduciéndose hidrogramas unitarios diferentes para cada uno de los episodios considerados. Es más representativo deducir un único HU compuesto a partir de diversos episodios de lluvia-escorrentía considerados simultáneamente.

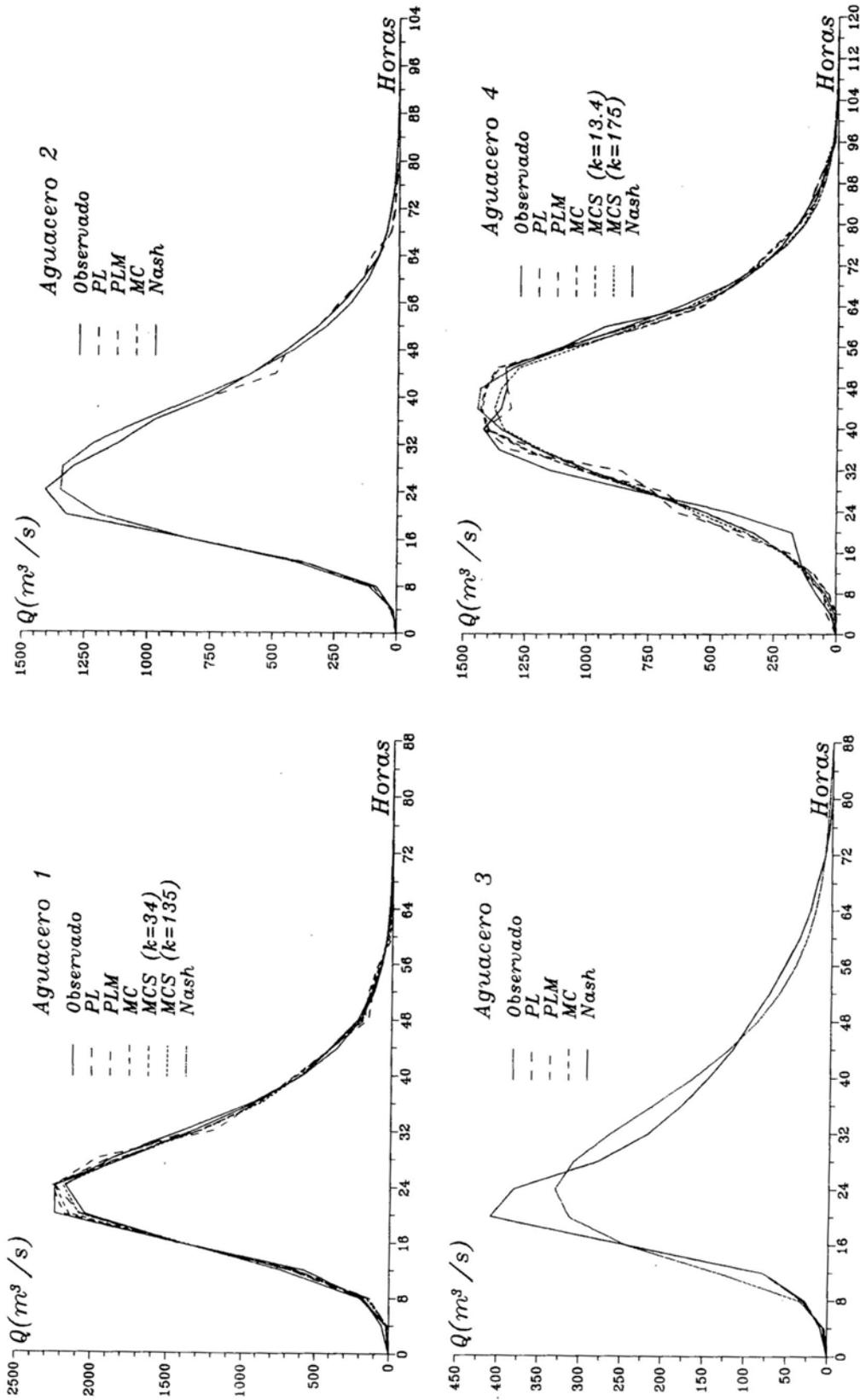


Figura 4. Hidrogramas de escorrentía calculados a partir de los HU estimados

**AGRADECIMIENTOS**

Este trabajo es parte del Proyecto de Investigación AGF92-0988, *El manejo de la vegetación del suelo en los sistemas de montaña*, financiado por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología.

**LISTA DE SIMBOLOS**

- A Area de la cuenca.
- C Constante dimensional. Convierte las unidades del hidrograma de precipitación efectiva en unidades del hidrograma de escorrentía directa.
- E Función suma de los cuadrados de los residuos  $r$ .
- HU Hidrograma Unitario.
- HUI Hidrograma Unitario Instantáneo.
- K Parámetro escalar que controla el grado de suavizamiento de la estimación final del HU.
- k Parámetro del modelo de Nash.
- l Número de ordenadas del hidrograma unitario.
- m Número de pulsos de intensidad constante del hidrograma de precipitación efectiva.
- $M^1_{OO}$  Momento de primer orden respecto al origen del hidrograma de escorrentía directa registrado.
- $M^2_{OO}$  Momento de segundo orden respecto al origen del hidrograma de escorrentía directa registrado.
- $M^1_{OI}$  Momento de primer orden respecto al origen del hidrograma de lluvia efectiva registrado.
- $M^2_{OJ}$  Momento de segundo orden respecto al origen del hidrograma de lluvia efectiva registrado.
- n Número total de ordenadas registradas a intervalos  $\Delta t$ .  
Parámetro del modelo de Nash que representa el número de embalses lineales en serie.  
Número de restricciones lineales en el modelo de Programación Lineal.
- P Precipitación efectiva.
- Q Ordenada del hidrograma registrado.
- Q Ordenada del hidrograma reconstruido a partir del HU y la precipitación efectiva.
- Qp Caudal punta del hidrograma reproducido.
- R Valor residual diferencia entre el caudal observado y el calculado.
- $S_I$  Área del hidrograma de precipitación efectiva.
- SQ Área del hidrograma de escorrentía directa.
- t Tiempo.

- U Ordenada del hidrograma unitario.
- $U_p$  Caudal punta del HU.
- Vol Volumen de escorrentía directa.
- Z Función objetivo.
- $\alpha$  Desviación positiva del residuo  $r$ .
- $\beta$  Desviación negativa del residuo  $r$ .
- $\Delta t$  Intervalo de tiempo discreto en que se dan las ordenadas del HU y los pulsos de lluvia.

**REFERENCIAS**

- Ayuso, J.L., 1990. Circulación de flujos. Métodos usuales en el diseño de canales y embalse en cuencas pequeñas. Monografía n<sup>o</sup>. 179, Universidad de Córdoba.
- Ayuso, J.L., 1990. Circulación de flujos. Métodos de cálculo usuales en el diseño de canales y embalses en cuencas pequeñas. Monografía n<sup>o</sup> 173, Universidad de Córdoba.
- Bruen, M y J.C.I. Dooge, 1984. *An efficient and robust method for estimating unit hydrograph ordinates*. J. Hydrol (70) 1-24.
- Bruen, M. y J.C.I. Dooge, 1992. Unit hydrograph estimation with multiple events and prior information: I. Theory and a computer program. Hydrol. Sci. J. (37) 429-443.
- Chow, V.T., D.R. Maidment y L.W. Mays, 1988. Applied hydrology. McGraw-Hill, New York.
- Dooge, J.C.I., 1973. Linear theory of hydrological systems. USDA, ARS, Tech. Bull, n<sup>o</sup> 1468, Washington D.C.
- Lattermann, A., 1991. System-Theoretical modelling in surface water hydrology. Springer-Verlag, Berlin.
- Press, W.H., B.P. Flannery, S.A. Teukolsky y W.T. Vetterling, 1986. Numerical recipes. The art of scientific computing. Cambridge University Press.
- Singh, K.P., 1976. Unit hydrographs-A comparative study. Water Resour. Bull., AWRA (12) 381-392.
- Singh, V.P., 1988. Hydrologic systems. Rainfall-runoff modeling. Vol. I, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Singh, V.P., 1988. Hydrologic systems. Rainfall-runoff modeling. Vol. I, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.