Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **18**, **1**, 19–30 (2002)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

La dimensión de Hausdorff-Besicovitch en el diseño de la banda de rodadura de neumáticos

Rafael Larraz Mora

Departamento de Ingeniería Química
Universidad de La Laguna
Astrofísico Francisco Sánchez s/n
38200 La Laguna, Islas Canarias, España
Tel.: 34-922-60 27 10, Fax: 34-922-21 88 03
e-mail: rafael.larraz@madrid.cepsa.es

Resumen

En el presente trabajo se estudia la posibilidad de usar la dimensión de Hausdorff-Besicovitch para caracterizar los dibujos de la banda de rodadura de un neumático. Se plantea una aplicación informática que genera diseños preliminares de bandas de rodadura empleando los grupos de simetría del plano y la citada dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Se presentan los resultados obtenidos sobre muestras reales y los generados mediante la aplicación indicando sus posibilidades para atenuar la carga experimental en el proceso de diseño de bandas de rodadura.

THE USE OF HAUSDORFF-BESICOVITCH DIMENSION IN TYRE TREAD DESIGN

Summary

This work analyses the use of Hausdorff-Besicovitch dimension in order to characterize tyre tread geometric shape and design. A computer tool is described which creates preliminary tyre designs employing symmetry groups as well as Hausdorff-Besicovitch dimension. Results obtained with real tyres and computer generated designs are presented remarking its capabilities to diminish experimental burden in the tyre design procedure.

INTRODUCCIÓN

Los neumáticos son un componente fundamental de cualquier vehículo y tras sus formas y diseños se esconde una gran cantidad de esfuerzos investigadores y tecnología. La totalidad de los movimientos de aceleración, frenado y virajes de un vehículo se transmiten al suelo a través de cuatro superficies de poco más de 200 cm^2 que constituyen las áreas de contacto entre el neumático y el suelo de la calzada. La parte del neumático en contacto con el suelo generalmente se conoce como la banda de rodadura.

El desarrollo del dibujo y de la banda de rodadura de un neumático es un apartado decisivo en el funcionamiento del neumático. La banda de rodadura debe proporcionar la necesaria tracción al vehículo y al mismo tiempo su dibujo debe ser capaz de drenar agua o nieve en condiciones meteorológicas variables garantizando la seguridad del vehículo. Estos dos requerimientos son contrapuestos y en el diseño es necesario llegar a un óptimo que satisfaga ambas necesidades. En la bibliografía no existe una sistemática para optimizar el diseño de la banda de rodadura que no sea el de combinar simulaciones con ensayos reales.[12] En la actualidad las propiedades de los neumáticos son simuladas mediante el método de elementos finitos en el que se pueden incluir los efectos derivados de la variación de materiales

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Noviembre 2000

y geometría del neumático así como la determinación de los esfuerzos y momentos que afectan al neumático.[11]

El objetivo del presente trabajo es presentar una herramienta matemática, la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, basada en criterios geométricos que caracterice el dibujo de la banda de rodadura de un neumático y proponer un método de optimización que facilite la labor de diseño.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma: después de esta introducción describiremos las características de la banda de rodadura así como los requisitos de funcionamiento que debe cumplir. A continuación se introduce el concepto de dimensión de Hausdorff-Besicovitch en el que se basa el método presentado así como el concepto de grupo de simetría necesario para nuestros fines. En el siguiente apartado se presenta la metodología utilizada y los resultados obtenidos. A continuación se discuten los resultados y finalmente se presentan algunas conclusiones y comentarios.

LA BANDA DE RODADURA

La banda de rodadura es la responsable de transmitir los esfuerzos motrices de tracción y frenado. El dibujo de la banda de rodadura sería innecesario en suelos secos y su función es la de garantizar la transmisión de fuerzas en suelos mojados o helados. Las propiedades de la banda de rodadura quedan determinadas por la subestructura (cinturón y carcasa), la zona lateral o del talón y de manera decisiva por la configuración del dibujo y la mezcla de cauchos de la banda de rodadura.[2]

Los problemas relacionados con el contacto y la fricción entre el neumático y el pavimento son intrínsecamente no lineales y presentan trayectorias con histéresis en la evolución de sus propiedades. La distribución de las cargas de contacto y de las fuerzas de fricción define los momentos y esfuerzos que se aplican al neumático y gobiernan la trayectoria del vehículo. La simulación del fenómeno de contacto entre el pavimento y el dibujo del neumático es una tarea complicada debido a la dificultad de modelizar la respuesta del neumático. La distribución de la tracción y la geometría del dibujo son funciones de la carga normal, de fricción y de inflado del neumático.

Existe una gran variedad de dibujos y combinación de dimensiones de los neumáticos, lo cual es una indicación concluyente de que no existe un diseño óptimo de la banda de rodadura. Cuanto mayor sea la superficie de contacto del neumático sobre el pavimento mas disminuirá la presión superficial y aumentará la adherencia. Por ello neumáticos con una gran superficie de contacto son los más adecuados para transmitir la máxima tracción. En general los tacos (dibujo positivo) y los surcos (dibujo negativo) del dibujo se reparten ordenadamente sobre la banda de rodadura. Los neumáticos estrechos suelen tener un porcentaje alto en torno al 70 % de tacos frente a surcos. En los neumáticos anchos el porcentaje de tacos disminuye hasta un 60 %. Esto se debe al importante cometido que realizan los surcos recogiendo el agua del suelo mojado y evacuándola hacia el exterior del neumático.[6] Los dibujos presentan una gran cantidad de ranuras de pequeño tamaño distribuidas regularmente pero no necesariamente comunicadas entre sí. Su cometido es el de reducir el ruido producido por el neumático al rodar. Esta complicada combinación responde a los requisitos que debe cumplir la banda de rodadura y que se pueden enumerar de la siguiente forma: máxima transmisión de fuerzas, desgaste regular, distancia de frenado corta, alta estabilidad en las curvas, buena adherencia, elevada seguridad en condiciones de suelo mojado o helado, nivel de ruido reducido y estética del dibujo.

El dibujo de la banda de rodadura de un neumático puede asociarse a una figura o figuras que de manera simétrica recubren el plano. El neumático presenta un dibujo que al girar sobre la calzada se transmite de éste al suelo recubriendo el plano que representa la calzada longitudinalmente, mientras que lateralmente está limitado a la anchura del neumático.

Hemos supuesto que no haya variaciones en el tamaño de la huella del neumático debido a aumentos de carga o a la presión de inflado. La figura geométrica creada por el dibujo del neumático al rodar es la que se analiza con las herramientas que se describen a continuación.

DIMENSIÓN DE HAUSDORFF-BESICOVITCH

Una manera sencilla de medir el tamaño de un objeto es dividir el espacio en pequeños cubos de lado r y contar el número $N(r)$ de cubos necesario para recubrir el objeto. Para una línea de tamaño L_o el número N de segmentos lineales de longitud r es

$$N(r) = L_o/r$$

La longitud L de la línea es

$$L = \lim_{r \Rightarrow 0} N(r)r = \lim_{r \Rightarrow 0} L_o r^0 = L_o$$

La medida L llega a ser asintóticamente igual a la longitud de la línea y es independiente de r.

Si asociamos un área A con el conjunto de puntos de una línea, el número de cuadrados es de nuevo $N(r)$ y cada cuadrado tiene un área de r^2. El área viene dada por

$$A = \lim_{r \Rightarrow 0} N(r)r^2 = \lim_{r \Rightarrow 0} L_o r^1 = 0$$

De manera similar si asociamos un volumen V

$$V = \lim_{r \Rightarrow 0} N(r)r^3 = \lim_{r \Rightarrow 0} L_o r^2 = 0$$

Según nuestro método de medida el área y el volumen de una línea tienden a 0 a medida que r se hace más pequeña. En el caso de líneas la única medida interesante es la longitud.

Si consideramos a continuación un conjunto de puntos que definen una superficie de área A_o y empleamos cuadrados para realizar la medida tenemos

$$A = \lim_{r \Rightarrow 0} N(r)r^2 = \lim_{r \Rightarrow 0} A_o r^0 = A_o$$

El número de cuadrados necesarios para recubrir la superficie es $N(r) = A_o/r2$. En el límite el área de la superficie se aproxima a $A - o$ a medida que r tiende a 0.

El volumen de la superficie analizada es

$$V = \lim_{r \Rightarrow 0} N(r)r^3 = \lim_{r \Rightarrow 0} A_o r^1 = 0$$

Formalmente se puede asociar una longitud con una superficie

$$L = \lim_{r \Rightarrow 0} N(r)r = \lim_{r \Rightarrow 0} L_o r^{-1} = \infty$$

La longitud se hace infinita para una superficie por lo que la única medida útil es el área.

Si definimos una función $h(r) = \gamma r^d$ para recubrir un conjunto S de medida $M(d) = \Sigma h(r)$ y siendo γ un factor geométrico. En general la medida $M(d)$ será 0 ó infinito a medida que r tienda a 0 dependiendo de la elección de d. La dimensión de Hausdorff-

Besicovitch, D_H, de un conjunto S es el valor crítico de d para el cual $M(d)$ cambia de cero a infinito[7]

$$M(d) = \Sigma \gamma r^d = \gamma N(r) r^d \underset{r \Rightarrow 0}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} 0, d > D_H \\ \infty, d < D_h \end{array}$$

Un método sencillo para estimar la dimensión de Hausdorff-Besicovitch D_H es el llamado "Box counting method".[8,9]

Un objeto puede recubrirse de manera regular con cuadrados de longitud r y este proceso puede realizarse para cuadrados de diferentes longitudes r. El número de cuadrados de diferente tamaño r necesarios para recubrir una estructura viene dado por la expresión

$$N(r) = \text{const } r^{-D_B}$$

donde D_B es la llamada la dimensión de conteo y coincide generalmente con la dimensión de Hausdorff-Besicovitch. En la Figura 1 se presenta una aplicación del método citado aplicado a la curva de Koch que es un objeto fractal de dimensión $D_H = 1,26$.

El área de una figura puede expresarse como

$$A(r) = N * r^2 = \text{const } r^{-D_B} * r^2 = \text{const} * r^{2-D_B}$$

De esta manera si una figura puede describirse en función de su dimensión de Hausdorff-Besicovitch, también podemos emplear la citada dimensión para obtener su área.

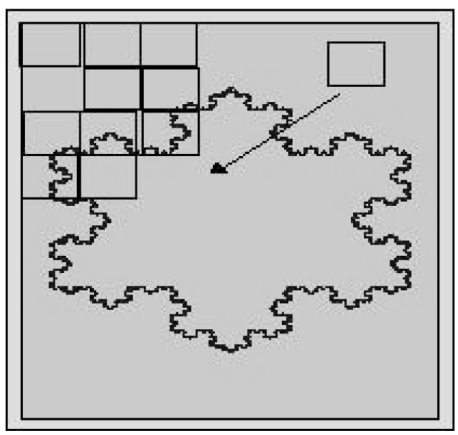

Figura 1. Curva de Koch aplicación del método de "Box counting"

GRUPOS DE SIMETRÍA

Las diferentes maneras que existen de recubrir el plano con figuras geométricas pueden clasificarse de acuerdo a los grupos de transformaciones que las mantienen invariantes, sus grupos de simetría. Un análisis matemático de estos grupos nos indica que existen exactamente diecisiete grupos de simetría en el plano establecidos por Fedorov.[1] El recubrimiento del plano se produce mediante la aplicación de transformaciones isométricas a una figura finita. Decimos que una figura que recubre el plano presenta simetría por reflexión si existe un eje de reflexión que transforma la mitad del recubrimiento en la otra mitad. Una figura que recubre el plano tiene simetría de translación si existe alguna transformación por translación que reproduce el recubrimiento. Una figura que recubre el plano presenta simetría de rotación si una rotación del recubrimiento reproduce el recubrimiento. Si la rotación es de $360°/n$ decimos que la simetría de rotación es de orden n. De igual manera se define una simetría de reflexión con desplazamiento si existe un eje de reflexión y un desplazamiento que reproduce el recubrimiento En la Tabla I se presentan las características de los diecisiete grupos de simetría del plano y su notación de acuerdo a la International Cristalography Union.[4]

Notación IUC	
Notación	Significado
m	eje de reflexión
g	eje de deslizamiento
n	eje de rotación como $360°/n$
c	celda unitaria centrada
p	celda unitaria primitiva

Grupos de Simetría				
Grupo de simetría	Notación IUC	Tipo de red	Orden de rotación	Eje de reflexión
1	p1	paralelogramo	0	0
2	p2	paralelogramo	2	0
3	pm	rectángulo	0	paralelo
4	pg	rectángulo	0	0
5	cm	rombo	0	paralelo
6	pmm	rectángulo	2	90°
7	pmg	rectángulo	2	paralelo
8	pgg	rectángulo	2	0
9	cmm	rombo	2	90°
10	p4	cuadrado	4	0
11	p4m	cuadrado	4+	45°
12	p4g	cuadrado	4*	90°
13	p3	hexágono	3	0
14	p31m	hexágono	3*	60°
15	p3m1	hexágono	3+	30°
16	p6	hexágono	6	0
17	p6m	hexágono	6	30°

+ Los ejes de rotación coinciden con ejes de reflexión
* No todos los centros de rotación coinciden con ejes de rotación

Tabla I

METODOLOGÍA

Con el fin de conseguir una herramienta matemática que permitiera describir el dibujo de la banda de rodadura de un neumático has sido necesario en primer lugar hacer acopio de diversos diseños de dibujos que nos proporcionaran una idea lo más amplia posible de las tendencias de los fabricantes en cuanto a diseño. Para ello se ha recurrido a catálogos de casas comerciales[3,10] así como a obtener reproducciones de los dibujos de neumáticos mediante el proceso de aplicar papel de calco en el plano tangente al neumático y conseguir una imagen del dibujo. Las imágenes así obtenidas han sido digitalizadas a fin de hacer factible su procesamiento informático.

El tratamiento de imagen es el conjunto de técnicas que permiten extraer o manipular información a partir de imágenes. Esta información está presente en la imagen original pero a veces no es obvia para el ojo humano. La aplicación planteada,[13] que ha sido realizada en JAVA, permite representar en una matriz de enteros la imagen a procesar y utilizar distintos algoritmos con dicha imagen

La aplicación también permite realizar operaciones matemáticas con dos imágenes como son:

Suma dst	$= src + dst$
Resta dst	$= dst - src$
Multiplicación dst	$= src * dst$
División dst	$= dst/src$
AND dst	$= src$ AND dst
OR dst	$= src$ OR dst
XOR dst	$= src$ XOR dst
Min dst	$= \min\,(dst, src)$
Max dst	$= \max\,(dst, src)$
Average dst	$= (src + dst)/2$

siendo dst y src los pixel de las imágenes con las que se realiza la operación.

Otra capacidad del programa es la de aplicar el algoritmo "Box counting" para estimar la dimensión de Hausdorff-Besicovitch de la imagen que estemos analizando. El método utiliza un total de nueve tamaños de caja diferente, siendo estas de 2, 3, 4, 6,8, 12, 16, 32, 64 bits respectivamente. La salida del programa proporciona para cada tamaño de caja r el número de ellas $N(r)$, en las que hay al menos un píxel de la imagen. Aplicando la relación

$$N(r) = kr^{-D_B}$$

y tomando logaritmos obtenemos

$$\log N(r) = \log k - D_B \log r$$

expresión de la cual, si ajusta a una recta, podemos obtener la dimensión de Hausdorff-Besicovitch como la pendiente y el prefactor k como la ordenada en el origen.

Las imágenes obtenidas una vez digitalizadas han sido sometida a un procesamiento de imagen consistente en reducirlas a un fichero BMP monocromo de manera que los pixeles que componen la imagen sólo pueden tener dos valores, blanco o negro. Las imágenes han sido convertidas todas al mismo tamaño a fin de poder realizar comparaciones entre ellas. Mediante el programa de tratamiento de imagen se han invertido los valores de los pixeles a fin de obtener imágenes negativas de los originales que representan el área del dibujo del neumático que corresponde a los canales de drenaje de agua. Parte de las figuras analizadas se presentan en la Figura 2. A continuación se ha aplicado el método de conteo ("Box counting") tal como se ha descrito anteriormente. Los resultados del conteo han sido representados gráficamente determinándose si se ajustan a una recta y a la ecuación de la misma (Tabla II).

Figura 2. Huellas de neumáticos Dimensión 2, N1, N2, N3 y N4 y algunas de las figuras inversas

Figura	Dimensión D_H	Prefactor k	Correlación
Dimens2	1,99	4,9010	0,999
Dimens1	1,00	3,2751	0,997
N1	1,787	4,7536	0,999
N1 Inversa	1,6544	4,5123	0,999
N2	1,8389	4,4182	0,999
N2 Inverso	1,6195	4,0968	0,994
N3	1,7974	4,1927	0,999
N3 Inverso	1,6795	4,0302	0,997
N4	1,7974	4,4378	0,999
N4 Inverso	1,5829	4,0855	0,998

Tabla II. Análisis de la dimensión mediante el método de conteo para las huellas de neumáticos. $N(r) = kr^{-D_H}$

Empleando las posibilidades del programa de tratamiento de la imagen hemos procedido a realizar variaciones en las imágenes de los dibujos de neumático consistentes en erosionar los contornos del dibujo para disminuir el área del mismo y disminuir por lo tanto el área de contacto. A continuación hemos realizado la maniobra inversa dilatando los contornos del dibujo y aumentando el área de contacto. Los resultados se presentan en la Tabla III donde se muestra que la erosión del área de contacto supone una disminución de D_H, mientras que la dilatación la aumenta. Estos resultados coinciden con la idea propuesta de que el valor de D_H proporciona información acerca de cómo recubre el plano el dibujo del neumático. Igualmente hemos procedido a variar el tamaño de las imágenes procesadas y hemos encontrado que para la misma imagen una disminución del tamaño implica una reducción del prefactor, así una reducción de aproximadamente 100 pixeles implica pasar de valores de 4 a 3 sin que se observe variación significativa en el valor de D_H.

Figura	Dimensión D_H	Prefactor k	Correlación
N2 Erode	1,7673	4,3072	0,999
N2 4Erode	1,7635	4,2974	0,998
N4 1Erode	1,7530	4,3446	0,999
N4 4Erode	1,7536	4,0096	0,997
N2 Dilate	1,8798	4,4827	0,999
N4 Dilate	1,8314	4,4592	0,998

Tabla III. Análisis de la dimensión mediante el método de conteo para las huellas de neumáticos transformadas mediante tratamiento de la imagen. $N(r) = kr^{-D_H}$

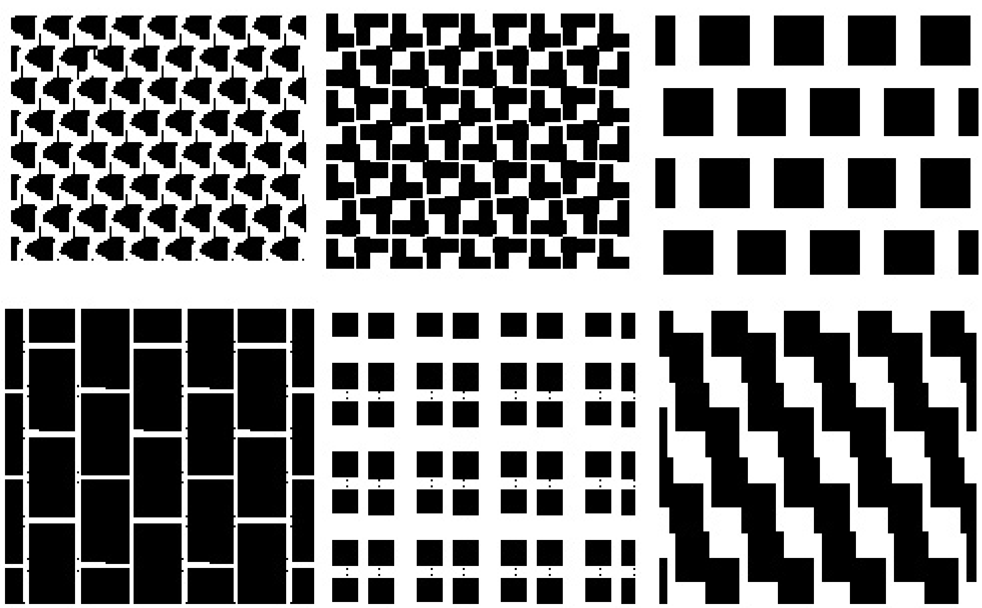

Figura 3. Diseños obtenidos a partir de los grupos de simetría. Fila superior p3, p4g, p1. Fila inferior cmm, pmm, p2

GENERACIÓN DE DISEÑOS DE BANDA DE RODADURA

Los resultados obtenidos en el apartado anterior responden a que el dibujo del neumático presenta simetrías en su diseño. Como se indicó anteriormente, el modo de recubrir el plano manteniendo estructuras simétricas está limitado a diecisiete variantes que corresponden a diecisiete grupos de simetría. Se ha empleado el programa ESCHER[5] para la generación de recubrimientos del plano basados en los diecisiete grupos de simetría del plano. El programa permite elegir uno de los grupos de simetría y mediante movimientos del ratón variar el diseño del recubrimiento. La figura base puede elegirse como líneas, cuadrados, triángulos, rombos o círculos permitiendo consecuentemente una gran variedad de los diseños.

Algunos diseños se presentan en la Figura 3. Empleando el procesamiento de imagen hemos obtenido también las imágenes negativas de los diseños. A continuación se ha aplicado el método de conteo obteniendo los valores de D_H para cada imagen. Los resultados se presentan en las Tablas IV y V, donde también se recoge el prefactor y el coeficiente de correlación.

Grupo de simetría	Notación IUC	Dimensión D_H	Prefactor k	Correlación
1	p1	1,7456	4,5311	0,998
2	p2	1,7372	4,5937	0,998
3	pm	1,8126	4,6575	0,999
4	pg	1,7589	4,6125	0,998
5	cm	1,7982	4,7057	0,999
6	pmm	1,6323	4,4292	0,999
7	pmg	1,7556	4,6420	0,999
8	pgg	1,7323	4,5996	0,999
9	cmm	1,7923	4,8270	0,999
10	p4	1,8244	4,7720	0,998
11	p4m	1,7937	4,7128	0,999
12	p4g	1,7906	4,7097	0,999
13	p3	1,7268	4,6440	0,998
14	p31m	1,7311	4,6220	0,999
15	p3m1	1,7554	4,6452	0,998
16	p6	1,7504	4,6349	0,998
17	p6m	1,6323	4,4292	0,999

Tabla IV. Análisis de la dimensión mediante el método de conteo para los grupos de simetría del plano. Figuras de 584 × 417 pixels. $N(r) = kr^{-D_H}$

Grupo de simetría	Notación IUC	Dimensión D_H	Prefactor k	Correlación
1	p1	1,7372	4,5937	0,999
2	p2	1,6912	4,5169	0,999
3	pm	1,6485	4,4240	0,998
4	pg	1,7194	4,5584	0,998
5	cm	1,6546	4,4582	0,998
6	pmm	1,8013	4,7282	0,999
7	pmg	1,7173	4,5920	0,998
8	pgg	1,7285	4,6147	0,999
9	cmm	1,4061	4,1660	0,998
10	p4	1,6484	4,4651	0,999
11	p4m	1,6539	4,4748	0,997
12	p4g	1,7097	4,5971	0,998
13	p3	1,7751	4,7077	0,999
14	p31m	1,7478	4,6545	0,999
15	p3m1	1,7168	4,5726	0,999
16	p6	1,7256	4,6032	0,999
17	p6m	1,8241	4,7598	0,999

Tabla V. Análisis de la dimensión mediante el método de conteo para los grupos de simetría del plano. $N(r) = kr^{-D_H}$. Figuras Iinversas de tamaño 584 × 417 pixels

DISCUSIÓN

De la Tabla II se desprende que la ecuación propuesta para describir las imágenes se ajusta perfectamente y está caracterizada por la dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Los valores de dimensión oscilan entre 1,7 y 1,8. Asimismo, la dimensión para la imagen de la Figura 2, que representa un neumático sin dibujo, se aproxima al valor 2, que sería la dimensión euclídea de una superficie. Por lo tanto, a medida que la dimensión se aproxima al valor de 2, nos indica que la figura representada recubre más extensamente el plano, siendo 2 precisamente cuando es una superficie. En la tabla también se recoge la imagen de una línea que nos proporciona una dimensión de 1 como era de esperar. Por lo tanto, las imágenes analizadas ofrecen valores de dimensión de Hausdorff-Besicovitch entre 1 y 2, siendo el valor de la dimensión un indicativo de si la imagen se asemeja más a una línea o a una superficie.

Los valores de D_H que se obtienen para las imágenes del dibujo positivo del neumático suelen ser mayores que los obtenidos para su imagen negativa. Los diseños analizados dan una mayor preponderancia al dibujo positivo frente a los canales de drenaje, como indica la superioridad de los valores de D_H para el dibujo positivo frente al dibujo negativo.

Uno de los problemas que hemos citado en el diseño de neumáticos es el de que existen diversos óptimos en función de los diferentes apartados del diseño que se contemplen; la alternancia de dibujo positivo-negativo es uno de ellos. La aplicación del análisis de dimensión nos indica que una posible solución de diseño para neumáticos que proporcionen una tracción satisfactoria junto a una capacidad de drenaje adecuada estaría en buscar diseños en los cuales la D_H del dibujo positivo y del negativo fueran lo más altas posibles. Si se nos presentan varias alternativas, aquella en la cual la suma de $D_{H_{\text{positivo}}} + D_{H_{\text{negativo}}}$ sea máxima, presentará las características más adecuadas.

Una herramienta de optimización de la proporción entre dibujo positivo y dibujo negativo es la de aplicar las operaciones de tratamiento de imagen de erosionar y dilatar. Cómo se vio en la Tabla III, tienen una influencia directa sobre D_H, aunque para algunos diseños, cuando la proporción de canales es pequeña, esta influencia es baja. Estas transformaciones alteran el valor del prefactor. El tamaño de los tacos del neumático debe tener un tamaño determinado para evitar torsiones o roturas si fueran demasiado reducidos. Prefactores menores de 3 parecen corresponder a tamaños de taco no aptos para su uso.

El análisis de las Tablas IV y V nos indica que la ecuación propuesta describe los dibujos obtenidos. De acuerdo al criterio de que la suma de las dimensiones del dibujo positivo y negativo sea máxima, para así conseguir neumáticos de uso en diferentes condiciones meteorológicas, pueden encontrarse varias soluciones. Los grupos de simetría p3, p4g y p1 dan valores análogos, siendo la dimensión positiva y negativa superiores a 1,7. Los grupos de simetría con suma de dimensiones más bajos son el cmm, pmm y p2. Existen varios grupos de simetría en los que la D_H negativa es superior a la positiva; entre ellos podemos citar el p3, p6m y pmm. Así nos encontramos que mediante la aplicación de diseños basados en los grupos de simetría del plano obtenemos un abanico amplio de posibilidades de diseño base para las diferentes prestaciones que se le exigen a un neumático en cuanto a área de tracción y capacidad de drenaje.

CONCLUSIONES

Del trabajo realizado podemos considerar la dimensión de Hausdorff-Besicovitch como una herramienta apta para la caracterización de la banda de rodadura de los neumáticos. Las bandas de rodadura analizadas presentaban valores de la dimensión de Hausdorff-Besicovitch entre 1,7 y 1,8, siendo los valores de los dibujos negativos inferiores. De entre los diseños base generados mediante la aplicación, los grupos de simetría p3, p4g y p1 presentan las dimensiones de Hausdorff-Besicovitch más altas tanto para el dibujo positivo como para el negativo. El prefactor k de la ecuación de ajuste $N(r) = kr^{-D_H}$ da una indicación del tamaño de la imagen analizada. Puede ser empleado como límite inferior o superior para el tamaño de los tacos del neumático.

El método propuesto basado en una aplicación informática que emplea la dimensión de Hausdorff-Besicovitch y los grupos de simetría del plano constituye una alternativa para realizar diseños preliminares de dibujos de banda de rodadura y atenuar la carga experimental en la obtención de diseños de neumáticos.

REFERENCIAS

1 A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov y M.A. Laurentiev, "*Mathematics–its content, methods and meaning*", MIT Publications, (1994).

2 K.P. Backfish y D. Heinz, "*Das Reifenbuch*" Motorbuch Verlag, Postfach 103743, 70032 Stuttgart, (1996).

3 Bridgestone, "*Ultimate tyre technology*", (1999).

4 J. Conway, "*Symmetries, lattices and tilings*", Smith College, (1993).

5 T. Flaherty, "*ESCHER Manual*", Loyola University, (1995).

6 W.B. Horne, "*Pneumatic tyre hydroplanning and some effects on vehicle Performance*", SAE 970C, (1965).

7 R. Kraft, "*Fractal and Dimensions*", HTTP, Protocol, (1995).

8 B. Mandelbrot, "*Los objetos fractales*", Tusquets, Barcelona, (1996).

9 B. Mandelbrot, "*La geometría fractal de la naturaleza*", Tusquets, Barcelona, (1997).

10 Nankang Steel Radial Tires Catalogue, (1999).

11 M.W. Sayers y D. Han, "A generic multibody vehicle model for simulating handling and braking", *Vehicle System Dynamics*, Vol. **25**, pp. 599–613, (1996).

12 J.A. Tanner, "*Computational methods for frictional contact with applications to the space shuttle orbiter nose-gear tire*", NASA TP3574, (1996).

13 "*IMAGEJ Manual*", (1998).