

# COMPARACIÓN DE DISTINTOS ESQUEMAS NUMÉRICOS PARA RESOLVER LA ONDA CINEMÁTICA

Martín López, José Diz, José Luis Ayuso y Adolfo Peña<sup>1</sup>

**RESUMEN:** El movimiento superficial del agua en el suelo puede ser descrito por las denominadas ecuaciones de Saint-Venant, que forman un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La resolución numérica de ecuaciones diferenciales induce distintos tipos de errores que tradicionalmente se conocen como: error de discretización, error de cierre y error de redondeo. La dificultad de identificar y aislar cada uno de ellos en problemas complejos nos ha llevado a una estimación conjunta, para poder encontrar criterios que permitan elegir entre varios esquemas posibles; buscando un compromiso entre precisión y velocidad de ejecución. Por todo esto, se ha procedido a comparar los resultados obtenidos en la resolución de las ecuaciones de la onda cinemática mediante el método de los elementos finitos con los derivados de la solución analítica mediante el método de las características. Para la formulación numérica del método se ha optado por un esquema tradicional de Galerkin, con interpolación espacial mediante polinomios lagrangianos de 1<sup>er</sup>, 2<sup>o</sup> y 3<sup>er</sup> grado, e interpolación mediante polinomios de Hermite. En todos los casos la integración temporal se ha efectuado mediante un esquema lineal. Así mismo se han medido los tiempos de ejecución de los programas desarrollados usando el paquete Mathematica, para decidir, en combinación con los datos anteriores, cuál puede ser la formulación más adecuada teniendo en cuenta los conceptos de precisión y economía de tiempo asociados a cada algoritmo.

## INTRODUCCIÓN

La estimación del hidrograma de escorrentía de una cuenca es una de las operaciones esenciales de la Hidrología, sirviendo como base para el pronóstico de avenidas y el cálculo del arrastre de sedimentos por el agua.

Hasta no hace mucho tiempo esta estimación se hacía de forma muy grosera, basándose en fórmulas empíricas extrapoladas desde las cuencas para las que se habían desarrollado, o en aproximaciones sencillas incapaces de recoger las características del proceso.

Desde la introducción de la teoría de la onda cinemática a mediados de los años cincuenta (Lighthill y Whitham, 1955) muchos han sido los investigadores que han abordado la descripción de la generación y circulación de la escorrentía sobre la base de sus características físicas (modelos distribuidos). El problema se plantea finalmente en términos de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, llamadas ecuaciones de Saint-Venant, que describen la evolución de un sistema hidrológico dependiente del espacio y del tiempo. De estas ecuaciones Doodge (1986) reconoció que no se ha encontrado una solución analítica debido a su carácter no lineal. Este hecho ha conducido a la amplia difusión de modelos basados en métodos de integración numérica que introducen nuevos elementos de incertidumbre.

Es por este motivo por lo que en el presente trabajo se ha optado por aplicar el método de los elementos finitos a la resolución de las ecuaciones de la onda cinemática. Si bien tal modelo simplificado presenta serias limitaciones, bajo determinadas circunstancias (infiltración constante y parámetros hidrológicos independientes de la posición), aún más restrictivas que las estrictas condiciones de aplicabilidad (Morris y Woolhiser, 1980), proporciona una solución analítica de referencia con la que comparar los resultados obtenidos con los diversos esquemas numéricos estudiados; lo que resulta imposible, salvo experimentación, en el caso de modelos más completos.

Dentro de las posibles formulaciones se han desarrollado los esquemas correspondientes al procedimiento estándar de Galerkin (Vieux, 1988), considerando interpolación lagrangiana lineal (Berger y Stockstill, 1995), cuadrática (Muñoz-Carpena, Miller y Parson, 1993) y cúbica; e interpolación mediante polinomios de Hermite de 3<sup>er</sup> grado (Jensen y Finlayson, 1980). Así mismo se ha analizado el comportamiento de las diferentes soluciones obtenidas. Si bien es posible llevar a cabo el estudio analítico de la convergencia de las aproximaciones empleadas (Liggett y Wolhiser, 1967); no se encuentran en la bibliografía métodos sistemáticos

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Rural. Universidad de Córdoba

Apdo. 3048 - 14080 - Córdoba. Tel.: 957 218532 Fax: 957 218550

e-mail: [ir2loagm@uco.es](mailto:ir2loagm@uco.es) e-mail: [im1dipeg@uco.es](mailto:im1dipeg@uco.es) e-mail: [ir1laimuj@uco.es](mailto:ir1laimuj@uco.es) e-mail: [ir1lpeala@uco.es](mailto:ir1lpeala@uco.es)

Artículo publicado en *Ingeniería del Agua*. Vol.5 Num. 1 (marzo 1998), páginas 73-81, recibido el 5 de septiembre de 1997 y aceptado para su publicación el 18 de febrero de 1998. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo. En el caso de ser aceptadas, las discusiones serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores en el primer número de la revista que aparezca una vez transcurrido el plazo indicado.

solución de prueba dentro de cada elemento, en coordenadas gaussianas,  $-1 \leq \xi \leq 1$ , es (Lapidus y Pinder, 1982):

Interpolación Lineal:

$$\begin{aligned} \bar{h}(\xi, t) &= N_1 h(-1, t) + N_2 h(1, t) \\ \bar{q}(\xi, t) &= N_1 q(-1, t) + N_2 q(1, t) \quad (9) \\ N_1 &= \frac{1 - \xi}{2}, \quad N_2 = \frac{1 + \xi}{2} \end{aligned}$$

Interpolación mediante polinomios de 2º grado:

$$\begin{aligned} \bar{h}(\xi, t) &= N_1 h(-1, t) + N_2 h(0, t) + N_3 h(1, t) \\ \bar{q}(\xi, t) &= N_1 q(-1, t) + N_2 q(0, t) + N_3 q(1, t) \\ N_1 &= \frac{(\xi - 1)}{2}, \quad N_2 = (1 - \xi^2), \quad N_3 = \frac{(1 + \xi)\xi}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

Interpolación mediante polinomios de 3er grado:

$$\begin{aligned} \bar{h}(\xi, t) &= N_1 h(-1, t) + N_2 h(-\frac{1}{3}, t) + N_3 h(\frac{1}{3}, t) + N_4 h(1, t) \\ \bar{q}(\xi, t) &= N_1 q(-1, t) + N_2 q(-\frac{1}{3}, t) + N_3 q(\frac{1}{3}, t) + N_4 q(1, t) \\ N_1 &= \frac{(1 - \xi)(9\xi^2 - 1)}{16}, \quad N_2 = \frac{9(3\xi - 1)(\xi^2 - 1)}{16}, \\ N_3 &= \frac{9(1 + \xi^2)(3\xi - 1)}{16}, \quad N_4 = \frac{(1 + \xi)(9\xi^2 - 1)}{16} \end{aligned} \quad (11)$$

Interpolación mediante Polinomios de Hermite de 3er grado:

$$\begin{aligned} \bar{h}(\xi, t) &= N_1 h(-1, t) + N_2 \frac{\partial h}{\partial \xi}(-1, t) + N_3 h(1, t) + N_4 \frac{\partial h}{\partial \xi}(1, t) \\ \bar{q}(\xi, t) &= N_1 q(-1, t) + N_2 \frac{\partial q}{\partial \xi}(-1, t) + N_3 q(1, t) + N_4 \frac{\partial q}{\partial \xi}(1, t) \\ N_1 &= \frac{(\xi - 1)^2(\xi + 2)}{4}, \quad N_2 = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)^2}{4}, \\ N_3 &= \frac{(\xi - 1)^2(2 - \xi)}{4}, \quad N_4 = \frac{(1 + \xi)^2(\xi - 1)}{4} \end{aligned} \quad (12)$$

En cualquier caso:

$$x = \frac{1 - \xi}{2} x_k + \frac{1 + \xi}{2} x_{k+1}, \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}$$

$k = 1, n_e$ ,  $n_e = n^\circ$  de elementos

$x_k, x_{k+1} \equiv$  nodos extremos del elemento

(13)

3º. Anulación de los residuos.

El método seguido aquí, ha sido el denominado *Método de los residuos ponderados* que consiste en introducir por cada nodo una función de ponderación  $P_i$  y hacer que se cumpla la relación:

$$\begin{aligned} \int_l P_l \left( b \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} - f \right) dx &= \sum_{\forall k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_l \left( b \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - f \right) dx = \\ \sum_{\forall k} \int_{-1}^1 P_l \left( b \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{2}{\Delta x} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \xi} - f \right) \frac{\Delta x}{2} d\xi &= 0, \quad k = 1, n_e \\ n_e &= n^\circ \text{ de elementos} \end{aligned} \quad (14)$$

Dentro del método de los residuos ponderados hay varias posibilidades de elección de las funciones de ponderación; una de ellas, que ha sido la seguida en el desarrollo de este trabajo, es la conocida como *Método de Galerkin* y consiste en tomar como función de ponderación la misma función de forma,  $P_i = N_i$ .

La extensión de la expresión (14) a todos los nodos del recinto espacial de integración conduce a un sistema de ecuaciones de la forma:

$$[A] \left[ \frac{dh}{dt} \right] + [B][q] = [C] \quad (15)$$

Siendo [A], [B] y [C] las matrices generales del sistema. Este sistema es conocido con el nombre de sistema semidiscreto (Celia y Gray, 1992). La integración posterior de las derivadas temporales mediante el método de diferencias finitas conducirá, por último, al sistema discreto final.

4º. Integración temporal.

El primer término del sistema (15) contiene derivadas con respecto al tiempo, que son integradas mediante el método de diferencias finitas siguiendo el esquema de interpolación lineal propuesto por Blandford y Ormsbee (1993), según el cual el valor de cualquier variable en un instante intermedio del intervalo (t, t+Δt) puede ser expresado como:

$$v_{l+\theta\Delta t} = \theta v_{l+\Delta t} + (1 - \theta)v_l \quad (16)$$

Donde v representa cualquier variable considerada y θ es un factor de ponderación que varía entre 0 y 1, según se consideren diferencias finitas hacia adelante o hacia atrás, mientras que para θ = 1/2 se obtiene el esquema de Crank-Nicolson. Considerado el sistema (14) en el instante t+θ Δt,

$$\left( [A] \left[ \frac{dh}{dt} \right] + [B][q] \right)_{t+\theta\Delta t} = [C]_{t+\theta\Delta t} \quad (17)$$

y aplicando ahora el método de diferencias finitas

$$\left[ \frac{dh_l}{dt} \right]_{t+\theta\Delta t} \approx \frac{h_{l,t+\theta\Delta t} - h_{l,t}}{\theta\Delta t} \quad (18)$$

se obtiene, por último:

$$[A]_{t+\theta\Delta t}[h]_{t+\theta\Delta t} = [A]_{t+\theta\Delta t}[h]_t + ([c]_{t+\theta\Delta t} - [B]_{t+\theta\Delta t}[q]_{t+\theta\Delta t})\theta\Delta t \quad (19)$$

que es la base del método de resolución que se propone.

5° Aplicación de las condiciones de contorno.

El problema así planteado admite infinitas soluciones, según la teoría de resolución de ecuaciones diferenciales; por ello se hace indispensable la definición de condiciones iniciales y de contorno que determinen de forma biunívoca la solución buscada. Siguiendo a los autores clásicos se han impuesto las condiciones  $h(x, 0) = 0$  y  $h(0, t) = 0$ .

La imposición de las condiciones iniciales,  $h_{i,0} = 0$ , supone que algunas de las incógnitas del sistema son conocidas, por lo que se procede a incluirlas en los términos independientes. A su vez, la imposición de las condiciones de contorno, exige la sustitución de la primera ecuación del sistema general por la correspondiente condición  $h_{i,t} = 0$  (Lapidus y Pinder).

6° Resolución del sistema global.

La aplicación del método propuesto da lugar a un sistema de ecuaciones, que junto a las relaciones que resultan de considerar la ecuación dinámica forman un sistema no lineal que ha sido resuelto mediante aproximaciones sucesivas (Diz, 1993). La rutina de cálculo consiste en:

- Se establece un valor inicial de prueba para  $[h]_{i,t+\theta\Delta t}$  que según propuesta de Blandford y Meadows (1990);

$$h_{i,t+\theta\Delta t} = h_{i,t} + \frac{\theta\Delta t}{b} \left( f - \frac{q_{i,t} - q_{i-1,t}}{\Delta x} \right)$$

- Con esta solución de prueba, se obtienen del sistema determinado por la ecuación dinámica los valores de  $q_{i,t+\theta\Delta t}$ .
- Estos últimos valores sustituidos en el sistema (18) determinan una nueva solución para  $h_{i,t+\theta\Delta t}$ . Si la diferencia entre dos soluciones consecutivas no supera un determinado error de cierre, se toma esta última como solución en el paso de tiempo considerado; en caso contrario constituye la nueva solución de prueba.
- Por último la solución encontrada se actualiza al tiempo  $t + \Delta t$ .
- Una vez encontrada la solución para el tiempo  $t + \Delta t$ , ésta se constituye en condición inicial para el siguiente escalón de tiempo.

**Fuentes de error en el esquema propuesto**

Existen varias fuentes de imprecisiones que, en un caso extremo, pueden hacer imposible alcanzar una solución:

*Error de truncamiento.*

También llamado error de aproximación (Liggett y Woolhiser). Diferencia entre la ecuación diferencial problema y su aproximación mediante el esquema numérico (Smith, 1975). Este error se debe al hecho de que, en

último caso, las aproximaciones numéricas se reducen a considerar algunos términos del desarrollo en serie de Taylor de la función problema. Se dice que la aproximación numérica es consistente si el error de truncamiento tiende a cero cuando los valores de  $\Delta x$  e  $\Delta t$  tienden a cero (Lapidus y Pinder). Depende exclusivamente de la naturaleza de la aproximación y, tras su formulación, su magnitud es función del tamaño de los segmentos de la malla,  $\Delta x$  e  $\Delta t$ . La consistencia garantiza que el método numérico aproxima la ecuación diferencial problema y no otra (Carnahan, Luther y Wilkes, 1975).

*Error de discretización.*

También llamado error de fórmula (Boyce y DiPrima, 1977). Se llama error de discretización a la diferencia entre la solución exacta del problema, en este caso la ecuación diferencial (7), y la solución exacta del esquema numérico empleado para resolverlo, el sistema de ecuaciones (15), Smith, y surge por dos causas (Boyce y DiPrima):

- 1° Error de truncamiento en cada paso. Al error de discretización habido únicamente por este hecho se le llama error de discretización local y aparece en cada uno de los pasos al integrar numéricamente la ecuación diferencial.
- 2° Los datos iniciales en cada paso, que han sido obtenidos en pasos anteriores, no concuerdan con su valor exacto.

En este sentido se dice que la solución numérica es convergente si tiende a la solución exacta de la ecuación diferencial cuando los valores de  $\Delta x$  e  $\Delta t$  tienden a cero (Lapidus y Pinder). Al igual que el error de truncamiento es inherente a la formulación numérica.

*Error de cierre.*

La no-linealidad de los sistemas de ecuaciones derivados de la aplicación del método de los elementos finitos a la solución de las ecuaciones que rigen el flujo de escorrentía, determina la necesidad de utilizar esquemas numéricos que encuentran la solución por aproximaciones sucesivas hasta que la diferencia entre dos soluciones consecutivas se hace menor que un límite tolerable de error. Este tipo de error se puede reducir disminuyendo el citado límite, lo cual provoca mayor número de iteraciones para alcanzar la solución, no obstante, la reducción excesiva de esta tolerancia puede conducir a oscilaciones entorno a la solución del problema.

*Error de redondeo.*

Surge de la imposibilidad, en la práctica, de representar un número real de forma exacta; por lo que cada cálculo se realiza con un número finito de cifras decimales significativas. La diferencia entre la solución exacta del esquema numérico y su solución numérica, con precisión finita, se llama error de redondeo (Smith). Su magnitud es más aleatoria que la del error de discretización, y depende de: la precisión con que se hagan los cálculos (número de cifras decimales significativas consideradas), el número y orden de las operaciones y el método de redondeo seguido (Boyce y DiPrima). En relación con este error se dice que el esquema numérico es estable

cuando cualquier pequeño error o perturbación, contenido en las condiciones iniciales o de contorno o introducido por efecto de los errores de redondeo, no se ve amplificado durante el proceso de cálculo (Carnahan, Luther y Wilkes). La inestabilidad se traduce en dos efectos diferentes: difusión y dispersión numéricas (Lapidus y Pinder). La difusión numérica se manifiesta como una atenuación del hidrograma de escorrentía calculado (Ponce, 1991), mientras que la dispersión se presenta como oscilaciones respecto del valor teórico.

Por tanto, el error total cometido en la resolución numérica de una ecuación diferencial es la suma de los errores de discretización, cierre y redondeo (Smith).

## RESULTADOS

Se han resuelto los diferentes esquemas numéricos comentados mas arriba utilizando el programa Mathematica, en su versión 2.1 para Windows 3.1x. Este paquete permite la implementación rápida de las diferentes alternativas consideradas; dándonos además un valor preciso del tiempo de ejecución asociado a cada una de ellas. En cuanto a la medición de tiempos es preciso señalar que los programas se han ejecutado sobre un Pentium 133 Mhz con 16 Mb de memoria RAM, configuración, por lo demás, muy habitual actualmente.

### Condiciones de aplicación

En todos los casos se ha considerado una ladera cuadrada de 1 ha de superficie, de pendiente constante e igual al 10% en dirección paralela a unos de los lados y una rugosidad, igualmente constante, equivalente a un valor de 0.02 para el coeficiente de aspereza de Manning; sometida a un aporte neto uniforme y constante de 36 mm/h durante 900 s. El tiempo de simulación total ha sido de 1800s.

En cuanto al mallado espacial, se ha supuesto dividida la ladera en cinco elementos, según la dirección longitudinal, lo que determina un total de 6 nodos extremos y un valor de  $\Delta x = 20m$ . Cuando las funciones de prueba son de grado  $g$  superior a 1, hay que considerar  $g-1$  nodos interiores en cada elemento, que no son considerados puntos donde determinar la solución. En este mismo sentido, para el caso de interpolación mediante polinomios de Hermite sólo se consideran como incógnitas reales del problema los valores  $h_i$ ,  $q_i$  asociados a cada nodo, mientras que  $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i$ ,  $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_i$ , son incógnitas auxiliares asociadas a la formulación del problema (Zienkiewicz y Taylor).

Durante el proceso iterativo de solución del sistema de ecuaciones se ha considerado que se ha alcanzado la solución cuando se verifica que:

$$\text{Max}_{\forall i} \left[ \frac{h_{i,t+\theta\Delta t}^{k+1} - h_{i,t+\theta\Delta t}^k}{h_{i,t+\theta\Delta t}^k} \right] \leq 10^{-6}$$

$i: 1, n^\circ$  de incógnitas reales.

En cualquier caso, cuando el número de iteraciones supera las 50 sin que se haya encontrado una solución satisfactoria se supone que este no converge.

En todos los casos la interpolación temporal se ha realizado considerando  $\theta = 1$ .

### Soluciones encontradas.

Para comparar el comportamiento de la solución obtenida con los diferentes esquemas de integración se ha procedido a ejecutar los programas desarrollados con tres valores de  $\Delta t$ : 1, 5 y 10 s.

La figura 1 muestra los errores relativos cometidos en la estimación del caudal que desagua la ladera, en su punto más bajo, respecto de la solución analítica.

En primer lugar, hay que señalar que en los casos de interpolación mediante polinomios de Lagrange de 2º y 3er grado e interpolación mediante polinomios de Hermite, no se ha hallado solución al problema en el caso de  $\Delta t = 10$  s, debido a que no se ha satisfecho la condición de cierre cuando se llevaban simulados 270, 90 y 200 s, respectivamente.

En general puede apreciarse que el esquema que presenta mayor grado de precisión es el correspondiente a la interpolación mediante polinomios de Lagrange de 3er grado.

No obstante, la diferencia más acusada se produce entre la interpolación lagrangiana y la hermitica, apreciándose claramente como esta última manifiesta un comportamiento notablemente más difusivo que las anteriores.

Es particularmente notable la acusada oscilación que presentan los esquemas lagrangianos en torno al tiempo de concentración ( $t_c = 302.425$  s) de la ladera, sobre todo en el caso de interpolación lineal; momento en el que aparece el error relativo máximo.

Las Tablas 1 y 2 recogen los resultados que caracterizan la ejecución del programa en cada uno de los casos estudiados.

	Error (%) para tiempo = $t_c$	Error (%) máximo	Tiempo de ejecución (s)	Número medio de iteraciones
I.Lineal	-6.235	-6.235	206.85	5.36
I.Parabólica	-6.108	-6.108	671.68	6.1
I.Cúbica	-5.834	-5.838	1869.56	8.13
I.Hermite	-15.807	-23.739	1466.19	12.13

Tabla 1. Resumen de la ejecución del programa para  $\Delta t = 1$  s

	Error (%) para tiempo = $t_c$	Error (%) máximo	Tiempo de ejecución (s)	Número medio de iteraciones
I. Lineal	-4.572	-4.572	676.9	3.39
I.Parabólica	-3.259	-3.259	2016.07	3.59
I.Cúbica	-2.834	-2.834	4490.43	3.79
r.Hermite	-14.197	-26.43	3861.73	6.14

Tabla 2. Resumen de la ejecución del programa para  $\Delta t = 5$  s

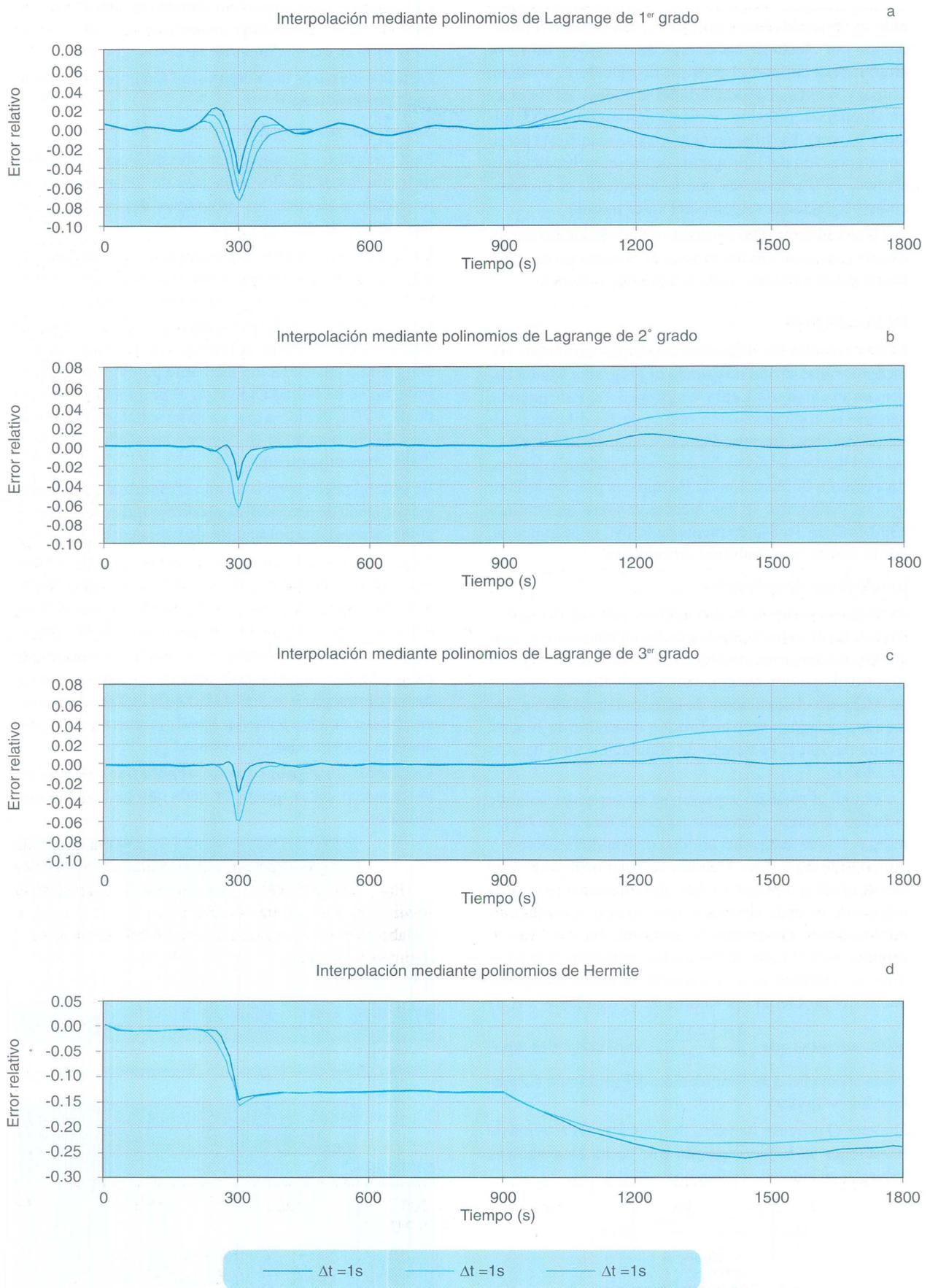


Figura 1. Variación del error relativo en función del tiempo para los diferentes esquemas analizados y diferentes valores de  $\Delta t$ .

De ellas puede observarse que las aproximaciones basadas en polinomios de Lagrange son más sensibles al valor del paso temporal elegido ( $\Delta t$ ), y esta sensibilidad se ve incrementada con el grado de polinomio.

Para analizar los resultados de las *Tablas 1 y 2* se toma como referencia los valores obtenidos en el caso de interpolación lineal y  $\Delta t = 5$  s. De la *Tabla 2* puede observarse que el paso de interpolación lineal a parabólica o cúbica no supone una mejora muy notable en cuanto al valor de los errores; mientras que el tiempo de ejecución se incrementa en 3 y 8 veces respectivamente. Sin embargo, de la *Tabla 1*, puede apreciarse que el paso a  $\Delta t = 1$  ss representa una variación notable en cuanto al error; manteniéndose, no obstante el tiempo de ejecución en un valor próximo al empleado para la resolución del problema en el caso de interpolación parabólica y  $\Delta t = 5$  s.

### Estudio de la interpolación mediante polinomios de Hermite.

El anómalo comportamiento de la solución hallada mediante los polinomios de Hermite, reflejado en la *Figura 1*, nos ha llevado a realizar un estudio de sus características.

La no linealidad de las ecuaciones de Saint-Venant impide el análisis teórico general de su comportamiento (Strelkoff y Falvey, 1993). No obstante, puede abordarse de forma experimental el estudio de la convergencia y estabilidad de la solución (Liggett y Woolhiser); aunque en el caso de ecuaciones no lineales resulta imposible separar ambos problemas.

En primer lugar se ha procedido a investigar la estabilidad del sistema; ya que, tal y como parece indicar la *Figura 1d*, la interpolación mediante polinomios de Hermite presenta problemas de difusión numérica. Según Ponce, puesto que las ecuaciones de la onda cinemática son, teóricamente, no difusivas, si la solución numérica presenta tal característica es debido a problemas de difusión numérica. Este autor indica que esto puede demostrarse si, resuelto el sistema varias veces considerando cada vez incrementos espaciales y temporales mitad de los anteriores, los problemas de difusión se reducen.

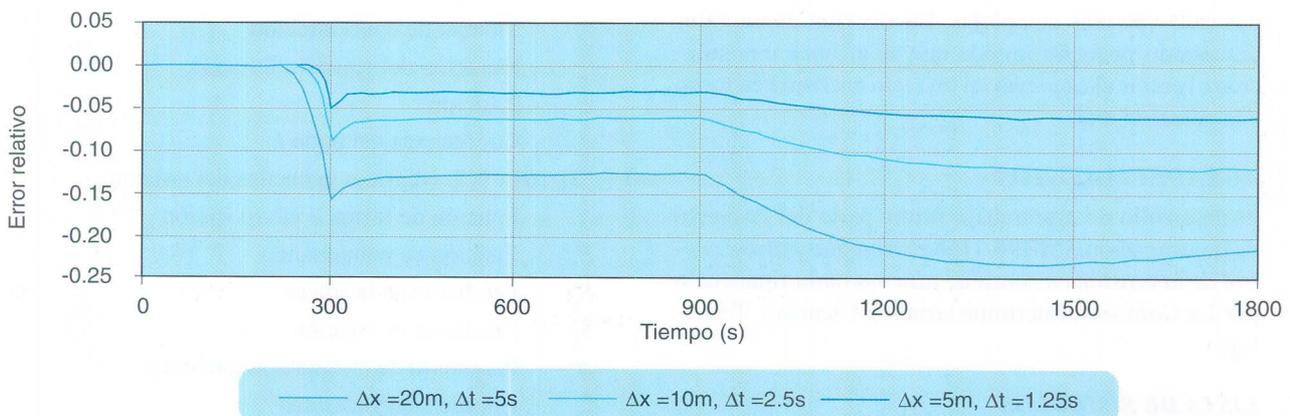
La *Figura 2* muestra el resultado de ejecutar el programa varias veces, a partir de los valores  $\Delta x = 20$  m e  $\Delta t = 5$  s, siguiendo el procedimiento antes descrito. Por el razonamiento anterior, queda demostrado que el comportamiento de la solución se debe a problemas de difusión numérica.

Una vez comprobado que los problemas de la formulación numérica mediante polinomios de Hermite se deben a inestabilidad, se ha procedido e investigar el efecto que los valores de los incrementos espacial y temporal tienen sobre la precisión de la solución. En la *Figura 3* se recogen los resultados obtenidos tras ejecutar el programa para un valor de  $\Delta t = 1$  s y diferentes valores de  $\Delta x$ .

Los resultados representados muestran que el esquema es convergente a la solución teórica, con una sensibilidad mucho mayor a la variación del valor de  $\Delta x$ , tal y como se pone de manifiesto en la *Figura 3*, que a la variación de  $\Delta t$ , tal y como puede apreciarse en la *Figura 1d*.

Si bien no se ha completado aún el estudio de las causas de los importantes problemas de difusión asociados a la interpolación mediante polinomios de Hermite, lo cual queda fuera de los objetivos de este trabajo, los primeros resultados parecen indicar que tienen su origen en el valor infinito que teóricamente debe alcanzar la pendiente del perfil de flujo en el punto inicial, como puede deducirse de la ecuación 4. Esto da lugar a una errónea determinación del perfil de flujo, sobre todo en el primer elemento, que conduce, en virtud de la ecuación de continuidad, al notable error relativo que aparece en los resultados. La mejora en la estimación del hidrograma de escorrentía al disminuir el valor del paso espacial ( $\Delta x$ ) parece corroborar este hecho.

Extrapolando los resultados, en la medida de lo posible, a los casos de interpolación lagrangiana, todo parece indicar que, en todos los casos, la acusada oscilación que se produce en el tiempo de concentración es debida a que el error cometido en la estimación de los perfiles de flujo alcanza su valor máximo, por acumulación, al finalizar el régimen transitorio, situación de la cual se restablece el modelo, poco a poco cuando se alcanza el régimen permanente.



**Figura 2.** Interpolación mediante polinomios de Hermite. Estudio experimental de la difusión numérica.

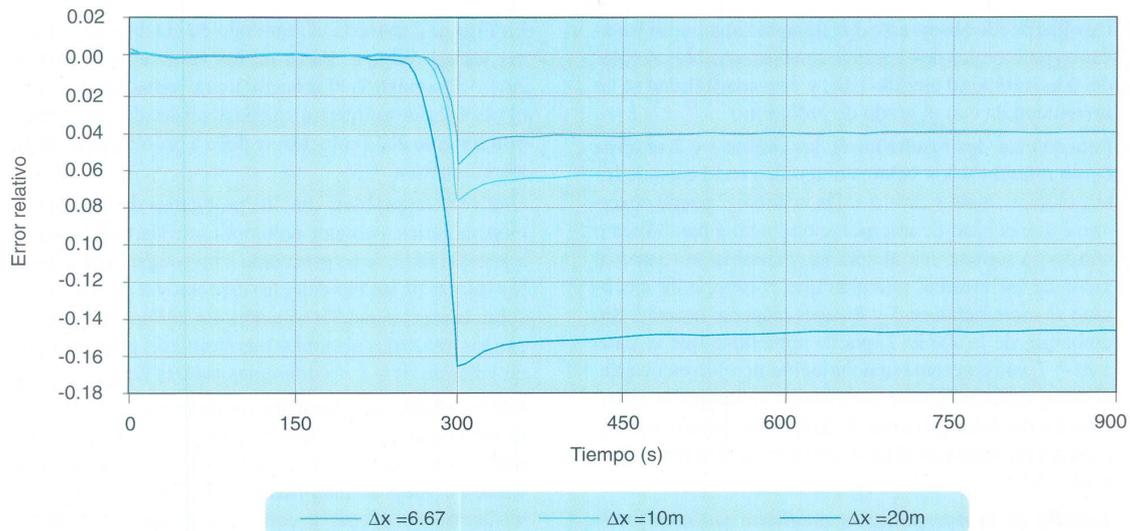


Figura 3. Interpolación mediante polinomios de Hermite. Estudio experimental de la convergencia

**CONCLUSIONES.**

Desde el punto de vista de la estabilidad, la interpolación mediante polinomios de Lagrange da lugar a un mayor grado de dispersión (oscilaciones) que la utilización de polinomios de Hermite que, por contra, manifiesta una mayor difusividad (atenuación) que aquellos.

En cualquier caso, la precisión de la aproximación mediante polinomios lagrangianos se incrementa con el grado del polinomio interpolante; siendo este efecto tanto mayor cuanto menor es el incremento temporal.

A efectos prácticos, la mejora de la precisión debe conducirse a través de un proceso de refinamiento de la malla espacio-temporal, más que por un incremento del grado de polinomio interpolante. En este sentido la interpolación lineal se muestra más robusta que ninguna otra de las analizadas y con un equilibrio precisión-tiempo de ejecución mejor.

Debe considerarse con sumo cuidado el valor de cierre en los procesos iterativos, sobre todo en formulaciones cada vez más complejas. La elección de un valor demasiado pequeño impide que se alcance una solución al entrar el esquema en un ciclo oscilante en torno a la solución real.

**AGRADECIMIENTOS**

El desarrollo de este trabajo forma parte del Proyecto de Investigación AMB96-1158 *Estrategias para el control de la erosión en zonas de alta montaña* financiado por La Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología.

**LISTA DE SÍMBOLOS**

*b*: Anchura de la ladera

- $f_0$ : Aporte neto por unidad de superficie
- $f$ : Aporte neto por unidad de longitud
- $h$ : Calado
- $h$ : Solución de prueba para el calado
- $h_i$ : Valor del calado en el nodo  $i$
- $h_{i,t}$ : Valor de calado en el nodo  $i$  en el tiempo  $t$
- $h_{i,t+\theta\Delta t}$ : Valor del calado para el nodo  $i$  y el tiempo  $t+\theta\Delta t$  tras la iteración  $k$
- $m$ : Exponente de la onda cinemática
- $n$ : Coeficiente de aspereza de Manning
- $n_e$ : número de elementos
- $n_n$ : número de nodos
- $q_0$ : Caudal por unidad de anchura
- $q$ : Caudal.
- $\bar{q}$ : Solución de prueba para el caudal
- $q_i$ : Valor del caudal en el nodo  $i$
- $q_{i,t}$ : Valor del caudal en el nodo  $i$  en el tiempo  $t$
- $t$ : Tiempo
- $t_c$ : Tiempo de concentración
- $t_r$ : Duración del episodio lluvioso
- $x$ : Posición
- $x_i$ : Coordenada del nodo  $i$ .
- $[A]$ ,  $[B]$  y  $[C]$ : Matrices generales del sistema
- $N$ : Función de forma o interpolación
- $P$ : Función de ponderación
- $S_0$ : Pendiente de la solera
- $S_f$ : Pendiente de fricción
- $\alpha$ : Parámetro de la ecuación dinámica
- $\xi$ : Coordenada gaussiana
- $\theta$ : Parámetro de interpolación temporal

## REFERENCIAS

- Berger, R.C. y Stockstill, R.L., (1995), *Finite Element Model for High-Velocity Channels*, Journal of Hydraulic Engineering, 121:710-716.
- Blanford, G.E. y Meadows, M.E., (1990), *Finite Element Simulation of Nonlinear Kinematic Surface Runoff*, Journal of Hydrology, 119:335-356.
- Blanford, G.E. y Ormsbee, L.E., (1993), *A Diffusion-Wave Finite Element Model for Channel Networks*, Journal of Hydrology, 142:99-120.
- Boyce, R.C. y Diprima, W.E., (1977), Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, J. Wiley & Sons, Inc., Londres.
- Carnahan, B., Luther, H.A. y Wilkes, J.O., (1969), Applied Numerical Methods, J. Wiley & Sons, Inc., Londres.
- Celia, M.A. y Gray, W.G., (1992). Numerical Methods for Differential Equations. Prentice-Hall. New Jersey.
- Diz, J., (1993), Análisis de sistemas hidrológicos complejos mediante modelos distribuidos. Tesis doctoral, Dpt° de Agronomía. Universidad de Córdoba.
- Dooge, J.C.I., (1986), *Locking for Hydrologic Laws*, Water Resources Research, 22:465-485.
- Eagleson, P.S., (1970) Dynamic Hydrology, McGraw-Hill, Nueva York.
- Jensen, O.K. y Finlayson, B.A., (1980) *Oscillation Limits for Weighted Residual Methods Applied to Convective Diffusion Equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15:1681-1986.
- Katopodes, N.D., (1984) *A Dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow*, Journal of Hydraulic Engineering, 110:450-466.
- Lapidus, L. y Finder, G.F., (1982) Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering, J. Wiley & Sons, Inc., Nueva York.
- Liggett, J.A. y Woolhiser, D.A., (1967) *Difference Solutions of the Shallow-Water Equation*. Journal of Engineering of Mechanical Division, 93:39-71.
- Lighthill, M.J. y Whitam, G. B., (1955) *On Kinematic Waves: I Flood Movement in Long Rivers*, Proc. R. Soc. Londres, A, 281-316.
- Morris, E.M. y Woolhiser, D.A., (1980) *Unsteady One-dimensional Flow over a Plane: Partial Equilibrium and Recession Hydrographs*. Water Resources Research, 16:355-360.
- Ponce, V.M., (1991) *The Kinematic Wave Controversy*. Journal of Hydraulic Engineering, 117:511-525.
- Smith, G.D., (1975) Numerical Solution of Partial Differential Equations. Oxford University Press. Londres.
- Streikoff, T.S. y Falvey, H.T., (1993) *Numerical Methods Used To Model Unsteady Channel Flow*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 119:637-655.
- Vieux, B.E., (1988) Finite Element Analysis of Hydrologic Response Areas Using Geographic Information Systems. Ph.D. diss., Dept. Agricultural Engineering, Michigan State University,
- Westerink, J.J. y Shea, D.; (1989) *Consistent Higher Degree Petrov-Galerkin Methods for the Solution of The transient Convection-Diffusion Equation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28:1077-1101.
- Wooding, R. A., (1965) *A Hydraulic Model for the Catchment-Stream Problem: I Kinematic-Wave Theory*. Journal of Hydrology, 3:254-267.
- Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L., (1994) El método de los elementos finitos. Cuarta edición, Vol. 2, McGraw-Hill/Interamericana de España. Madrid.