

# Comportamiento dinámico de placas anisótropas con distintas combinaciones de las clásicas condiciones de borde

Patricia M. Ciancio

Universidad Nacional del Centro de la Pcia. de Bs. As.  
Facultad de Ingeniería  
Av. Del Valle 5737, 7400 Olavarría, Argentina  
Tel.: 54 2284 451055; Fax: 54 2284 451055  
e-mail: pciancio@fio.unicen.edu.ar

Carlos A. Rossit\* y Patricio A.A. Laura

Instituto de Mecánica Aplicada  
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur  
Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina  
Tel.: 54 291-459 5101; Fax: 54 291-459 5657  
e-mail: carossit@criba.edu.ar; ima@criba.edu.ar  
\* Miembro de la Carrera del Investigador Científico, CONICET

## Resumen

En el presente trabajo se determinan las frecuencias naturales de vibración en placas delgadas rectangulares anisótropas, sustentadas en sus cuatro bordes por combinaciones diferentes de las clásicas condiciones de vínculos. Se consideran tres conjuntos de condiciones de contorno: 1) un par de bordes opuestos empotrado-empotrado y el otro par de bordes empotrado-simplemente apoyado, 2) tres bordes empotrados y el restante libre, 3) ambos pares de bordes empotrado-simplemente apoyado. Se considera la incidencia de la anisotropía del material, examinando el efecto de esta variable sobre las frecuencias naturales y formas modales de placas cuadrangulares con distintas relaciones de lados.

Se utiliza el método variacional de Ritz\*, empleando como funciones aproximantes del desplazamiento las denominadas "funciones viga" en cada dirección coordenada principal. Es importante destacar el hecho de que en un trabajo pionero sobre el tema del cual son autores Mohan and Kingsbury<sup>5</sup> se realiza un grave error desde el punto de vista matemático, ya que se utiliza el método variacional de Galerkin para obtener el algoritmo de cálculo siendo que las funciones coordenadas utilizadas no satisfacen condiciones naturales en varios casos. Por consiguiente, los resultados obtenidos no son lícitos en la mayoría de los casos tratados en el trabajo mencionado.

Se realiza una implementación computacional que permite optimizar los tiempos para la obtención de resultados.

A partir de la condición de anisotropía se efectúa la particularización al caso isótropo y ortótropo. Para validar la metodología empleada se comparan los resultados obtenidos con los disponibles en la literatura científica.

Los resultados de este trabajo muestran que las frecuencias naturales son afectadas directamente por las condiciones de contorno y por la anisotropía del material y que el comportamiento dinámico de las mismas no puede predecirse sobre la base del análisis convencional de placas isótropas y ortótropas.

---

\* El profesor A. W. Leissa, muy recientemente<sup>6</sup>, ha realizado un ensayo bibliográfico muy minucioso probando que el usualmente denominado método de Rayleigh-Ritz debe llamarse directamente, método de Ritz como lo estableció Mikhlin<sup>12</sup>: "the Ritz method is a far-reaching generalization of the so-called "Rayleigh Method". En general, los tratados de matemática refieren a la metodología como "Ritz", mientras que en los libros de ingeniería se utiliza, muy frecuentemente en la redacción, "Rayleigh-Ritz"

**Palabras clave:** vibraciones, placas anisótropas, frecuencias naturales, formas modales, placas rectangulares.

## DYNAMIC BEHAVIOR OF ANISOTROPIC PLATES WITH VARIOUS COMBINATIONS OF EDGE CONDITIONS

### Summary

The present study deals with the determination of the natural frequency coefficients for anisotropic rectangular plates supported by various combinations of the classical boundary conditions: clamped, simply-supported and free. Three sets of edge conditions are presented: a) one pair of opposite edges clamped with the other pair clamped-simply-supported, b) one pair of opposite edges clamped with the other pair clamped-free; and c) both pair of opposite edges clamped-simply-supported. The purpose of this work is to study the effects upon the frequency coefficients and their associated modal shapes of: changing edge conditions and the incidence of the anisotropy of the material.

The Ritz method is employed to perform the analysis. The deflection of the plate is approximated by a set of beam functions in each principal coordinate direction.

No claim of originality is made by the authors of the present work since pioneering works on the subject make also intensive use of "beam functions" and in some instances: of the Ritz method to determine the natural frequencies.

Unfortunately at least one of those "almost classical" works, a paper by Mohan and Kingsbury<sup>5</sup> published close to four decades ago commits a serious mathematical error since the eigenvalues are determined by the Galerkin method. In view of the fact that the coordinate functions do not satisfy in some instances the natural boundary conditions the methodology is not admissible and the eigenvalues are not, in general, correct.

The results of this investigation show that the plate modal shapes and natural frequency coefficients are strongly affected by the characteristic of anisotropy material and that such structures do not exhibit easily predictable behavior.

**Keywords:** *vibration, anisotropic plates, natural frequencies, modal shapes, rectangular plates.*

### INTRODUCCIÓN

Las placas anisótropas son elementos estructurales comunes en la tecnología moderna. Ingenieros civiles, mecánicos y navales, entre otros, se enfrentan frecuentemente con su utilización. En una gran mayoría de circunstancias estos elementos se utilizan en medios dinámicos y el diseñador se enfrenta al desafío de hallar sus parámetros dinámicos: como frecuencias naturales, formas modales, comportamiento frente a distintas complejidades, etc.

El sistema diferencial que gobierna el problema de la placa vibrante de material anisótropo, es de enorme complejidad analítica, aunque se trate de un dominio geoméricamente simple, como es el de una placa rectangular. Es por ello que para su tratamiento se recurre a la utilización de métodos aproximados.

Trabajos pioneros sobre vibraciones de placas anisotrópicas comenzaron su aparición a finales de la década del 60<sup>1-5</sup>. En todos estos trabajos se aproximó la función desplazamiento mediante una sumatoria truncada de "funciones viga" que satisfacen idénticamente las condiciones esenciales pero no las condiciones naturales. En consecuencia es lícito hacer uso del método variacional de Ritz para realizar la operación algorítmica que permite determinar los autovalores y las autofunciones del problema en cuestión. En general, los autores de los trabajos citados siguieron este camino. En cambio otros, como Mohan y Kingsbury<sup>5</sup>, utilizaron el método de Galerkin en un trabajo muy conocido. Curiosamente, y en general, esto no ha sido señalado previamente en la literatura técnico – científica pero los resultados no son válidos, ya que no constituye un procedimiento legítimo utilizar el método de Galerkin cuando no se satisfacen las condiciones naturales.

Por otra parte, es de interés mencionar el hecho de que el clásico tratado de Lekhnitskii "Anisotropic Plates"<sup>7</sup> no presenta la solución de problema alguno sobre vibraciones de placas anisótropas, a lo sumo de ortótropas.

Varias son las aproximaciones analíticas empleadas para determinar parámetros dinámicos tales como las frecuencias naturales de vibración. Es, sin duda, el método de Ritz uno de los más utilizados por los investigadores en el tema.

Entre algunas contribuciones sobre el tema puede mencionarse el trabajo de Nallim y Grossi<sup>8</sup> sobre la utilización de polinomios ortogonales como funciones aproximantes.

En el presente trabajo se determinan las frecuencias naturales de vibración y formas modales de placas anisótropas con diferentes condiciones de sustentación en sus cuatro bordes, relaciones de anisotropía, y relación de aspecto de la placa. Se trata de placas de espesor uniforme que se supone pequeño en relación a sus restantes dimensiones.

Se utiliza un enfoque analítico variacional, el método de Ritz, según el cual la amplitud del desplazamiento transversal se expresa en términos de “funciones viga” que deben satisfacer al menos las condiciones de borde esenciales.

Comparaciones con casos de placas isótropas disponibles en la literatura evidencian una excelente precisión del método.

Se examina el efecto de anisotropía sobre los parámetros dinámicos que se determinan para las distintas combinaciones de vinculación que se presentan en este trabajo y se muestran en la Figura 1.

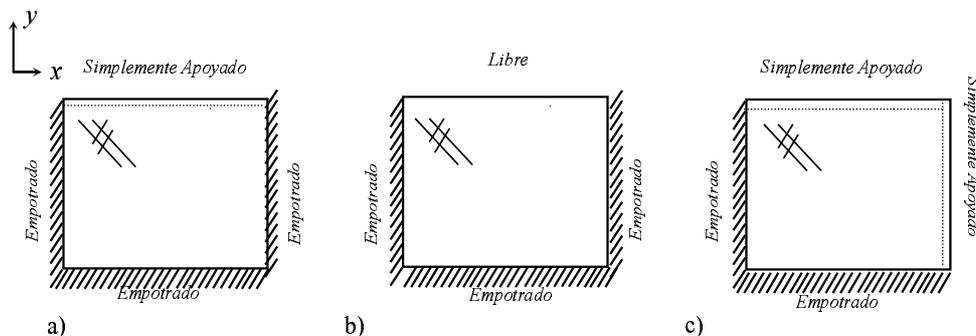


Figura 1. Casos de vinculación presentados

## SOLUCIÓN ANALÍTICA APROXIMADA

De acuerdo con las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema de las vibraciones transversales libres de placas delgadas en general, en el momento en el que la placa vibra con sus modos normales, la energía del sistema se representa a través del siguiente funcional

$$J[W] = U_{m\acute{a}x}(W) - T_{m\acute{a}x}(W) \quad (1)$$

siendo  $U_{m\acute{a}x}$  la energía de deformación máxima de la placa, que en el caso que nos ocupa corresponde a la energía de deformación máxima de la placa anisótropa  $U_a$ ; y con  $T_{m\acute{a}x}$ : energía cinética máxima total de la placa anisótropa

$$U_{m\acute{a}x} = U_a \quad (2)$$

$$T_{m\acute{a}x} = T_a \quad (3)$$

En la expresión (1),  $W$  representa la amplitud de la deflexión en la dirección transversal al plano medio de la placa y está representada por

$$w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t} \quad (4)$$

A su vez las ecuaciones utilizadas en este análisis se derivan de la teoría de placas delgadas con pequeñas deformaciones, en las cuales las relaciones constitutivas para el caso anisótropo según la notación matricial son

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Dada la presencia de derivadas parciales mixtas de orden impar en la expresión de energía de deformación, la obtención de frecuencias naturales para el conjunto de condiciones de borde de la placa, como las aquí analizadas, requiere de métodos aproximados de solución.

Según el método de Ritz el desplazamiento aproximado está representado por un producto ponderado de "funciones viga" que describen los desplazamientos transversales de vigas con iguales condiciones de borde en sus extremos que en los bordes opuestos de la placa para ambas direcciones y que se representa por

$$W(x, y) \cong W_a(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (6)$$

$X_m(x)$  e  $Y_n(y)$  representan las funciones coordenadas empleadas en la aproximación de la amplitud del desplazamiento transversal de la placa y cumplen con las condiciones de borde esenciales, y  $B_{mn}$  son coeficientes desconocidos.

Las expresiones para los términos de la funcional de energía, esto es, de la energía potencial de flexión y de la energía cinética, para el dominio anisótropo, según la clásica notación de Lekhnitskii<sup>7</sup> viene dada por:

$$U_a = \frac{1}{2} \iint_A \left[ D_{11} \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \cdot D_{12} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_{22} \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \cdot D_{66} \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \cdot \left( D_{16} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{26} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (7)$$

$$T_a = \frac{1}{2} \cdot \rho_A \cdot h_A \cdot \omega^2 \cdot \iint_A W^2 dx dy \quad (8)$$

De modo tal que

$$J_a(W) = \frac{1}{2} \iint_A \left[ D_{11} \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \cdot D_{12} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_{22} \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \cdot D_{66} \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \cdot \left( D_{16} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{26} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] dx dy - \frac{1}{2} \rho_A h_A \omega^2 \iint_A W^2 dx dy \quad (9)$$

En estas fórmulas  $A$  es el área del dominio analizado,  $D_{ij}$  son los coeficientes de rigidez de la placa anisótropa;  $D_{11}$  y  $D_{22}$  son las rigideces flexionales alrededor de los ejes  $y$  y  $x$ , respectivamente;  $D_{66}$  es la rigidez torsional;  $D_{16}$  y  $D_{26}$  son rigideces adicionales,  $\rho_A$  es el valor de densidad de masa de la placa,  $\omega$  es la frecuencia circular de vibración transversal, y  $h_A$  es el espesor de la placa, considerado uniforme.

El funcional  $J_a(W)$  de la expresión (9) puede reducirse al funcional de energía para el caso de placa ortótropa. Si en la expresión (9) se reemplaza

$$D_{11} = D_1 \quad D_{12} = D_1 \nu_2 \quad D_{22} = D_2 \quad D_{66} = D_k$$

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)} \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)} \quad D_k = \frac{G h^3}{12}$$

en las cuales  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $G$  son los módulos de Young, las relaciones de Poisson y el módulo de corte cuando la placa es ortótropa y la dirección de los ejes  $x$  e  $y$  coinciden con las direcciones principales elásticas.  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_k$  representan las rigideces a flexión y torsión para las direcciones principales de elasticidad. Las rigideces adicionales  $D_{16}$  y  $D_{26}$  son iguales a cero para las direcciones principales. De esta manera resulta la expresión (10) para la energía de deformación elástica de la placa ortótropa:

$$U_{ort} = \frac{1}{2} \iint_{ort} \left[ D_1 \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \cdot D_1 \nu_2 \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_2 \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \cdot D_k \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (10)$$

En el caso de que la placa sea isótropa

$$E_1 = E_2 = E, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

y todas las rigideces se reducen a una sola

$$D_1 = D_2 = D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Efectuando las siguientes sustituciones

$$D_{11} = D_{22} = D \quad D_{12} = \nu D_{11} \quad D_{66} = \frac{1-\nu}{2} D_{11} \quad D_{16} = D_{26} = 0$$

y reemplazando en (9) se obtiene la conocida expresión de energía máxima de deformación elástica para la placa isótropa

$$U_I = \frac{D}{2} \iint_I \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \cdot \nu \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (11)$$

Para los casos de placas anisótropas y sus particularizaciones a los casos ortótropo e isótropo la expresión de la energía cinética de la placa no cambia.

Dado que la longitud de los lados de la placa se denota con  $a$  y  $b$  en las direcciones coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , respectivamente, se escriben los términos del funcional en las coordenadas adimensionales

$$x = \bar{x}/a \quad y = \bar{y}/b$$

siendo la relación de aspecto de la placa

$$\lambda = a/b$$

En el esquema de la Figura 1, se presentan las condiciones de borde que son:

En la dirección coordenada  $x$ : empotrado-empotrado y empotrado-simplemente apoyado; en la dirección coordenada  $y$ : empotrado-simplemente apoyado y empotrado-libre

Así, las funciones viga<sup>9</sup> para las direcciones coordenadas en el caso a) de la Figura 1 son:

$$X_m(x) = \cosh(k_mx) - \cos(k_mx) - \alpha_m \sinh(k_mx) + \alpha_m \sin(k_mx) \quad (12)$$

para la condición de contorno empotrada-empotrada, donde

$$\alpha_m = \frac{\cos(k_m) - \cosh(k_m)}{\sin(k_m) - \sinh(k_m)} \quad (13)$$

Los autovalores de las funciones  $X_m(x)$  son las raíces de la siguiente ecuación característica,

$$\cos(k) \cdot \cosh(k) = 1 \quad (14)$$

En la Tabla I se presentan los primeros diez autovalores correspondientes a una viga empotrada en ambos extremos cuya sección es constante en toda su longitud.

k <sub>1</sub>	4.730040	k <sub>6</sub>	20.420352
k <sub>2</sub>	7.853204	k <sub>7</sub>	23.561944
k <sub>3</sub>	10.995607	k <sub>8</sub>	26.703537
k <sub>4</sub>	14.137165	k <sub>9</sub>	29.845130
k <sub>5</sub>	17.278759	k <sub>10</sub>	32.986722

**Tabla I.** Autovalores de una viga con bordes empotrados

En la dirección  $y$ , con condición de borde empotrada-simplente apoyada se tendrá:

$$Y_n(y) = \cos(k_n y) - \cosh(k_n y) - \alpha_n \sin(k_n y) + \alpha_n \sinh(k_n y) \quad (15)$$

siendo

$$\alpha_n = \frac{\cos(k_n) - \cosh(k_n)}{\sin(k_n) - \sinh(k_n)} \quad (16)$$

Los autovalores de las funciones  $Y_n(y)$  son las raíces de la siguiente ecuación característica

$$\operatorname{tgh}(k) = \operatorname{tg}(k) \quad (17)$$

En la Tabla II se presentan los primeros diez autovalores correspondientes a una viga empotrada-simplente apoyada en sus extremos cuya sección es constante en toda su longitud.

k <sub>1</sub>	3.926602	k <sub>6</sub>	19.634954
k <sub>2</sub>	7.068582	k <sub>7</sub>	22.776546
k <sub>3</sub>	10.210176	k <sub>8</sub>	25.918139
k <sub>4</sub>	13.351768	k <sub>9</sub>	29.059732
k <sub>5</sub>	16.493361	k <sub>10</sub>	32.201324

**Tabla II.** Autovalores de una viga con bordes empotrado-simplente apoyado

Siguiendo con el caso b) de la Figura 1, las funciones coordenadas en la dirección  $x$  serán las mismas que para el caso a) de dicha figura.

Para la dirección coordenada  $y$  se tendrá la función coordenada correspondiente a la de una viga empotrada-libre en sus extremos:

$$Y_n(y) = \cosh(k_n y) - \cos(k_n y) - \alpha_n \sinh(k_n y) + \alpha_n \sin(k_n y) \quad (18)$$

donde

$$\alpha_n = \frac{\cosh(k_n) + \cos(k_n)}{\sinh(k_n) + \sin(k_n)} \quad (19)$$

Los autovalores de las funciones  $Y_n(y)$  son raíces de la siguiente ecuación

$$\cos(k) \cdot \cosh(k) = -1 \quad (20)$$

En la Tabla III se muestran los primeros diez autovalores correspondientes a una viga empotrada-libre con sección constante en toda su longitud.

$k_1$	1.875104	$k_6$	17.278759
$k_2$	4.694091	$k_7$	20.420352
$k_3$	7.854757	$k_8$	23.561944
$k_4$	10.995540	$k_9$	26.703537
$k_5$	14.137168	$k_{10}$	29.845130

**Tabla III.** Autovalores de una viga con bordes empotrada-libre

En el caso c) de la Figura 1 se tiene en ambas direcciones iguales condiciones de borde, esto es, empotrada-simplemente apoyada, por lo cual, la función coordenada en dirección  $x$  será

$$X_m(x) = \cos(k_m x) - \cosh(k_m x) - \alpha_m \sin(k_m x) + \alpha_m \sinh(k_m x) \quad (21)$$

donde  $\alpha_m$  tiene una expresión análoga a la (16) y los autovalores de las funciones  $X_m(x)$ , raíces de la ecuación (17) son los de la Tabla II.

En la dirección coordenada y las ecuaciones a considerar serán: (15), (16), (17) y los correspondientes valores de la Tabla II.

Como es sabido (12), (15), (18) y (21) no satisfacen las condiciones de borde naturales en los correspondientes lados de la placa anisótropa, pero como anteriormente se ha mencionado, su utilización es legítima cuando se emplea el método de Ritz.

Sustituyendo, por ejemplo, (12) y (15) en (6) y, reemplazando la expresión que resulte en (9), se obtiene la expresión del funcional para el primer caso de la Figura 1. Se procede en forma análoga para los dos casos restantes, efectuando las sustituciones correspondientes.

Luego, siguiendo el método de Ritz, se minimiza  $J(W)$  con respecto a los coeficientes  $B_{mn}$ , esto es:

$$\frac{\partial J(W)}{\partial B_{mn}} = 0; \quad \text{con } m = 1, 2, \dots, M \quad \text{y } n = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

Uno obtiene un sistema de ecuaciones lineales homogéneas en términos de los parámetros  $B_{mn}$ . De la condición de no trivialidad, se pueden obtener los coeficientes de frecuencia natural  $\Omega_i = \sqrt{\rho h/D_{11}} \omega_i a^2$ , como autovalores, y los modos de vibración correspondientes como autovectores del determinante ecuación.

De la condición (22) se puede escribir

$$[U] [B] = \Omega^2 [T] [B] \quad (23)$$

en la cual  $\Omega_i$  representa el coeficiente de frecuencias para el caso anisótropo; para los casos ortótropo e isótropo se obtiene una expresión análoga, dado que la rigidez flexional será  $D_1$  y  $D$ , respectivamente.

En la ecuación (23),  $[B]$  es la matriz de los coeficientes  $B_{mn}$  desconocidos;  $[U]$  y  $[T]$  son las matrices de los elementos  $u(i, j)$  y  $t(i, j)$ , y están dados por las sumas de las integrales de las funciones coordenadas y las derivadas que correspondan en ambas direcciones y que

surgen de aplicar la condición (22). Los valores para las integrales mencionadas se obtienen de la referencia [9].

Entre los trabajos que utilizan el método de Ritz, se debe citar la contribución de Félix y coautores<sup>10</sup> en la cual se describe detalladamente un proceso analítico para la obtención de los coeficientes de frecuencias para el caso de placas rectangulares ortótropas.

En el presente trabajo se utilizaron 10 términos en cada una de las sumas de funciones coordenadas (6), lo que conduce a un determinante-ecuación de orden 100.

### Formas modales

Como se mencionó, la amplitud del desplazamiento es representada por la ecuación (6), en la que  $X_m(x)$  e  $Y_n(y)$  indican las formas modales propias de una viga con iguales condiciones de borde que los de la placa en las direcciones  $x$  e  $y$ . El factor  $B_{mn}$  de la expresión (6) representa la constante de ponderación de cada término  $X_m(x)$ .  $Y_n(y)$ , en la amplitud del desplazamiento aproximada  $W_a(x, y)$ .

Para obtener las formas modales del sistema vibrante se determinan los coeficientes  $B_{mn}$  para todos los desplazamientos en términos de uno de ellos que se supone de valor unitario. El coeficiente  $B_{mn}$  que tenga el valor predominante sobre los restantes será el que defina el modo  $mn$  de vibración para cada autovalor previamente hallado.

Cada valor de coeficiente de frecuencia  $\Omega_i$  hallado, se reemplaza en la ecuación:

$$E = U - T \Omega^2 \quad (24)$$

en la cual  $U$  y  $T$  son las matrices de coeficientes relacionados con la energía de deformación y cinética de la placa utilizados para determinar los coeficientes de frecuencias naturales del sistema.

Se puede expresar la ecuación del movimiento como:

$$E.B = 0 \quad (25)$$

donde, lógicamente,  $E$  será una matriz diferente para cada modo. La ecuación (24), se satisface dado que los coeficientes de frecuencia fueron determinados a partir de esta condición.

La matriz  $E$  se particiona, suponiendo que el primer elemento del vector desplazamiento tiene una amplitud unitaria

$$\begin{Bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ b_{3n} \\ \dots \\ b_{Nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ b_{2n} \\ b_{3n} \\ \dots \\ b_{Nn} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

En forma expandida la ecuación (25) puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} e_{11} & | & e_{12} & e_{13} & \dots & e_{1N} \\ \hline e_{21} & | & e_{22} & e_{23} & \dots & e_{2N} \\ e_{31} & | & e_{32} & e_{33} & \dots & e_{3N} \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{N1} & | & e_{N2} & e_{N3} & \dots & e_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ b_{2n} \\ b_{3n} \\ \dots \\ b_{Nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

esta expresión también puede expresarse en forma simbólica de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} e_{11} & E_{10} \\ E_{01} & E_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ b_{0n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

de la cual

$$E_{01} + E_{00} b_{0n} = 0 \quad (29)$$

de donde:

$$b_{0n} = -(E_{00})^{-1} E_{01} \quad (30)$$

Como estas expresiones son del tipo matricial, el término  $(E_{00})^{-1}$  representa la inversa de la matriz reducida, que se obtiene de eliminar la primer fila y la primer columna a la matriz  $E$ .

Las amplitudes del desplazamiento obtenidas de la ecuación (31) junto con la amplitud unitaria de la primer componente, constituye el vector desplazamiento aproximado asociado con el  $n$ -ésimo modo de vibración.

Habrà un elemento del vector  $b_{0n}$  cuya magnitud en valor absoluto sea la mayor de todas:  $b_{(mn)màxima}$ , de cada modo normal de vibración natural de la placa correspondiente a cada coeficiente de frecuencia. Dicho elemento es el que determinará la forma modal correspondiente a una determinada frecuencia, dado que será el término de la sumatoria que prevalecerá sobre las restantes.

$$W_{mn}(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} X_m(x) \cdot Y_n(y) \quad (31)$$

Para los casos tratados en este trabajo,  $X_m(x)$  se reemplazará por las ecuaciones (12), o (21), y de igual forma serán (15) o (18) para  $Y_n(y)$  y sus combinaciones según corresponda.

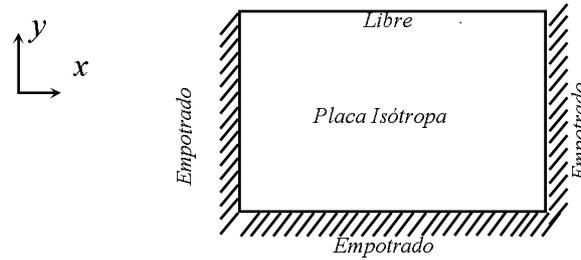
$\Omega_i = \sqrt{\rho h / \bar{D} a^2} \omega_i$		$\lambda$					
		1/2	2/3	1	3/2	2	5/2
$\Omega_1$	*	22.7078	23.0149	24.0195	26.7311	31.2038	37.6564
	Ref. [11]	-	23.015	24.020	26.731	-	37.656
$\Omega_2$	*	26.0641	29.4274	40.0393	65.9158	70.4673	76.4067
	Ref. [11]	-	29.427	40.039	65.916	-	76.407
$\Omega_3$	*	33.7911	44.3629	63.493	66.2189	103.482	135.149
	Ref. [11]	-	44.363	63.493	66.219	-	135.15
$\Omega_4$	*	46.7779	62.4172	76.7614	106.801	129.503	152.47
	Ref. [11]	-	62.417	76.761	106.80	-	152.47
$\Omega_5$	*	62.0733	68.8872	80.7127	125.405	144.284	193.015
	Ref. [11]	-	68.887	80.713	125.40	-	193.01
$\Omega_6$	*	65.1576	69.6957	116.798	152.481	205.251	213.745
	Ref. [11]	-	69.696	116.80	152.48	-	213.74

\*Este trabajo

**Tabla IV.** Coeficientes de frecuencia para placa isótropa ( $\nu = 0.3$ ), E-E-E-L

## Resultados numéricos

A los fines de efectuar una validación de los resultados para los casos presentados, se determinaron los valores de los primeros seis coeficientes de frecuencias naturales para cuando el material que conforma la placa es de tipo isótropo. Esto es, el funcional aplicado resultó de restar a la ecuación (11) la (8) en el dominio isótropo. Se tomaron algunas relaciones de aspecto de la placa identificadas por  $\lambda$ , como se observa en la Tabla IV. Considerándose 10 términos en cada función coordenada. En todos los casos los valores que aparecen en cursiva corresponden a los obtenidos por Leissa<sup>11</sup>, quien consideró el método de Ritz con 36 términos en el producto de las funciones vigas. Los valores mostrados corresponden a la placa vinculada según se observa en la Figura 2.



**Figura 2.** Vinculación para la placa isotrópica

Placa Anisótropa E-E-E-SA						
$\Omega_i = \sqrt{\rho h / D_{11}} a^2 \omega_i$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
$\lambda = 2/5$	23.5279	26.91	32.2932	39.6819	48.8079	62.3279
$\lambda = 2/3$	25.7724	35.2778	49.9407	65.525	70.1787	77.9809
$\lambda = 1$	30.5162	51.7154	72.4358	81.633	102.175	118.339
$\lambda = 3/2$	42.1101	78.4318	99.5379	124.335	150.353	179.284
$\lambda = 2$	59.4737	98.0192	152.534	157.39	201.784	221.921
$\lambda = 5/2$	82.726	121.295	178.031	233.759	254.106	276.711

Placa Anisótropa E-E-E-L						
$\Omega_i = \sqrt{\rho h / D_{11}} a^2 \omega_i$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
$\lambda = 2/5$	22.31	24.5814	28.7913	34.9679	42.9669	55.4494
$\lambda = 2/3$	22.5391	28.8119	40.0654	55.8177	61.8685	69.3316
$\lambda = 1$	23.2773	37.1031	60.379	62.5705	81.998	92.9588
$\lambda = 3/2$	25.4213	54.2544	66.1951	93.3247	117.906	128.273
$\lambda = 2$	28.8488	65.3582	85.106	115.647	135.984	176.456
$\lambda = 5/2$	33.5739	71.2022	118.411	125.36	168.595	195.677

Placa Anisótropa E-E-SA-SA						
$\Omega_i = \sqrt{\rho h / D_{11}} a^2 \omega_i$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
$\lambda = 2/5$	17.2247	22.026	28.8887	37.5207	47.5928	51.9918
$\lambda = 2/3$	20.4189	32.3573	48.8281	55.5711	69.7432	70.7749
$\lambda = 1$	26.4519	50.4049	63.3345	81.503	97.9528	117.982
$\lambda = 3/2$	39.538	74.1003	96.158	123.293	140.259	178.507
$\lambda = 2$	57.6865	93.8505	146.966	156.763	195.877	221.184
$\lambda = 5/2$	81.2272	117.819	173.519	232.301	249.115	274.156

**Tabla V.** Coeficientes de frecuencias naturales para distintas relaciones de aspecto y vinculación de placa anisótropa

Para las 16 combinaciones de vínculos que en los lados opuestos no tienen la condición simplemente apoyado, los resultados obtenidos guardan una excelente concordancia con los presentados por Leissa<sup>11</sup>.

Los casos a), b) y c) aquí presentados se analizaron para el caso ortótropo, obteniendo una total concordancia con los obtenidos por Felix y coautores<sup>10</sup>, para  $\lambda = 1$  y  $\lambda = 1.5$ .

La Tabla V contiene los coeficientes de las seis primeras frecuencias naturales de placas anisótropas con diferentes relaciones de lados y condiciones de borde. Las relaciones de rigideces consideradas en los modelos fueron:  $D_{22} = D_{12} = D_{66} = 1/2$  y  $D_{16} = D_{26} = 1/3$  que representan a un material de anisotropía genérica.

Puede observarse la influencia de las condiciones de borde sobre los coeficientes de frecuencias, así, para el tercer caso dichos coeficientes disminuyen en general para las distintas relaciones de aspecto comparados con el primero. Las mayores diferencias que se producen se pueden observar cuando uno de los bordes tiene la condición libre. En general, los valores de los coeficientes de frecuencia permanecen por debajo de los casos anteriores, a excepción del primer coeficiente cuando la relación de aspecto es  $2/5$  y  $2/3$ , y el segundo, para la relación de aspecto  $2/5$ .

Para las condiciones de contorno consideradas, se presentan seguidamente en la Figura 3, las formas modales de vibración natural correspondientes al caso de placa anisótropa con relación de lados  $\lambda = 1$ .

Las formas modales evidencian el efecto de la anisotropía, que hace que las formas no permanezcan paralelas a los lados de la placa como en el caso de la placa isótropa simplemente apoyada. Para los casos a) y c) las formas son muy similares hasta el quinto modo.

En el caso b) se observa que la presencia de un borde libre hace que existan diferencias significativas en relación a los casos anteriores, aún para el primer modo.

## CONCLUSIONES

El clásico método variacional de Ritz utilizado en este trabajo muestra ser una herramienta útil en el momento de determinar parámetros dinámicos en placas anisótropas cuya solución analítica es de suma complejidad en el campo de la dinámica estructural.

Los valores obtenidos son el resultado de la aplicación de un algoritmo, relativamente sencillo de implementar y que puede aplicarse a aquellos casos en los que las placas presenten algún tipo de complejidad y sólo se requiere de una herramienta computacional.

En relación con los valores propiamente dichos de coeficientes de frecuencias de placas anisótropas con distintas condiciones de apoyo, no se puede establecer un patrón de comportamiento dinámico, como en el caso de placas isótropas, debido a la anisotropía del material.

Obviamente, los resultados obtenidos en la presente investigación mediante 100 términos son considerablemente más precisos que los determinados hace casi cuatro décadas mediante un número mucho menor de términos.

También es importante destacar el hecho de que los códigos de elementos finitos de que usualmente dispone el analista no poseen una versión que permita el tratamiento dinámico o aún estático de placas anisótropas. El análisis presentado en este estudio obviamente sí lo permite, lo que evidencia su conveniencia.

## AGRADECIMIENTOS

La Ing. Mg. Patricia M. Ciancio es estudiante de Doctorado en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

El presente trabajo fue auspiciado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, por la Secretaría de Ciencia, Arte y Tecnología de la Universidad Nacional del Centro de Argentina y por el CONICET.

## REFERENCIAS

- 1 J.E. Ashton, "Natural modes of free – free anisotropic plates", *Shock and Vibration Bull.*, Vol. **39**, Part A, pp. 93-100, (1969).
- 2 J.E. Ashton y M.E. Waddoups, "Analysis of anisotropic plates", *J. Comp. Mat.*, Vol. **3**, pp.140-165, (1969).

- 3 J.E. Ashton y J.D. Anderson, "Natural modes of vibration of boron-epoxy plates", *Shock and Vibration Bull.*, Vol. **39**, Part 4, pp. 81-91, (1969).
- 4 C.W. Bert y B.L. Mayberry, "Free vibrations of unsymmetrically laminated anisotropic plates with clamped edges", *J. Comp. Mat.*, Vol. **3**, pp. 282-293, (1969).
- 5 D. Mohan y H.B. Kingsbury, "Free vibrations of generally orthotropic plates", *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. **50**, N° 1(2), pp. 266-269, (1971).
- 6 A.W. Leissa, "The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **287**, pp. 961-978, (2005).
- 7 S.G. Lekhnitskii, "*Anisotropic plates*", New York-London-París: Gordon and Breach Science Publishers, (1968).
- 8 L.G. Nallim y R.O. Grossi, "On the use of orthogonal polynomials in the study of anisotropic plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **264**, pp. 1201-1207, (2003).
- 9 R.P. Felgar Jr., "Formulas for integrals containing characteristic functions of a vibrating beam", *The University of Texas Publications*, Circ. N° 14, (1950).
- 10 D.H. Felix, D.V. Bambill y C.A. Rossit, "Desarrollo de un algoritmo de cálculo para la implementación del método de Rayleigh-Ritz en el cálculo de frecuencias naturales de vibración de placas rectangulares con complejidades adicionales", *Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.*, Vol. **20**, N° 2, pp. 123-138, (2004).
- 11 A.W. Leissa, "The free vibration of rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **31**, N° 3, pp. 257-293, (1973).
- 12 S.G. Mikhlin, "*Variational methods in mathematical physics*", (Publicado inicialmente en ruso en 1957), (Traducción al inglés por T. Boddington), Pergamon Press, Oxford, (1964).