

# DESARROLLOS RECIENTES EN ELEMENTOS DE ALTO RENDIMIENTO BASADOS EN LA FORMULACION LIBRE

CARLOS A. FELIPPA

*Department of Aerospace Engineering Sciences  
& Center for Space Structures and Control,  
University of Colorado,  
Boulder, Colorado 80309-0429, U.S.A.*

## RESUMEN

La formulación libre (FF) propuesta por Bergan y Nygård en 1984 ha tenido considerable éxito en la construcción de elementos finitos de alto rendimiento. En su enfoque original la formulación combina campos de desplazamientos internos incompatibles con desplazamientos de frontera compatibles, y una versión especializada de la prueba de la parcela. En este artículo se describen avances recientes que han colocado esta formulación dentro de un esquema variacional, y se discuten extensiones prácticas hechas posibles como consecuencia de estos avances.

## SUMMARY

The free formulation (FF) of Bergan and Nygård<sup>4</sup> has enjoyed considerable success in the construction of high-performance finite elements for linear and nonlinear structural analysis. In its original form the formulation combines nonconforming internal displacements and conforming boundary displacement assumptions with a specialized version of the patch test. Recent developments in fitting this formulation within a variational framework are described, and practical extensions opened up by these developments discussed.

## INTRODUCCION

El término "elementos finitos de alto rendimiento", se emplea aquí para identificar conjuntamente elementos que se han desarrollado para lograr el siguiente propósito:

*Proveer precisión ingenieril con mallas arbitrarias de elementos simples.*

El cumplimiento de este objetivo origina varios requisitos que deben satisfacerse en mayor o menor grado durante el desarrollo del elemento. Tales requisitos se listan en la Tabla I.

Recibido: Septiembre 1988

- Simple: pocos grados de libertad, todos ellos físicos
- Invariante respecto del marco de referencia
- Libre del efecto de bloqueo
- Debe poseer rango suficiente para evitar modos espúreos
- Rigidez equilibrada: ni demasiado rígido ni demasiado flexible
- Las tensiones y desplazamientos deben poseer similar exactitud
- Baja sensibilidad frente a la distorsión
- Debe poder combinarse con otros elementos
- Económico de calcular
- Fácilmente extendible al régimen no lineal y dinámico

Tabla I. Requisitos necesarios para elementos de alto rendimiento.

Algunos de estos requisitos son obvios. Por ejemplo, *baja sensibilidad frente a la distorsión* es una consecuencia inmediata de tratar de obtener la precisión necesaria con mallas *arbitrarias*. Pero otros puntos de la Tabla I necesitan alguna explicación.

Un requisito clave es que el elemento sea tan *simple* como se pueda. Debe observarse que esto muestra un gran contraste con las tendencias de finales de la década del 60 que recomendaron *elementos de alto orden* y culminaron con el desarrollo de modelos muy complejos, que incluyeron elementos con grados de libertad no-físicos. Una razón importante de este cambio es la reacción proveniente de los usuarios de programas de elementos finitos de propósito general. Mientras el uso de estos programas se amplía a más ingenieros sin un conocimiento profundo “del contenido de la caja negra”, la preferencia en la construcción de modelos de elementos finitos es elegir el “elemento más sencillo que realice la tarea”, entre los disponibles en el programa.

El requisito *rigidez equilibrada* también merece algunos comentarios. Este surge del objetivo de conseguir exactitud razonable con mallas gruesas. Esto se ilustra en la Figura 1 que muestra un estudio de convergencia de un problema clásico: la flexión de una placa cuadrada simplemente apoyada bajo la acción de una carga concentrada en el centro. La malla contiene  $N \times N$  elementos sobre un cuadrante de la placa. Se elige una “banda de exactitud” de un 1%, quizá arbitrariamente, como representativa de la precisión ingenieril para este problema más bien simple. Las características de convergencia de varios elementos triangulares simples se toman del extensivo estudio de Batoz, Bathe y Ho<sup>1</sup>. Aunque la mayoría de los elementos convergen, algunos son demasiado rígidos, mientras que otros son demasiado flexibles, y generalmente no entran en la banda de exactitud hasta que la malla se refina bastante ( $N \geq 8$ ). Por otra parte, los resultados designados ‘FF’ se han obtenido con un elemento basado en la formulación libre (FF) que se discutirá más adelante, yacen dentro de la banda para todas las mallas.

El requisito de rigidez equilibrada no deber interpretarse equivocadamente, para

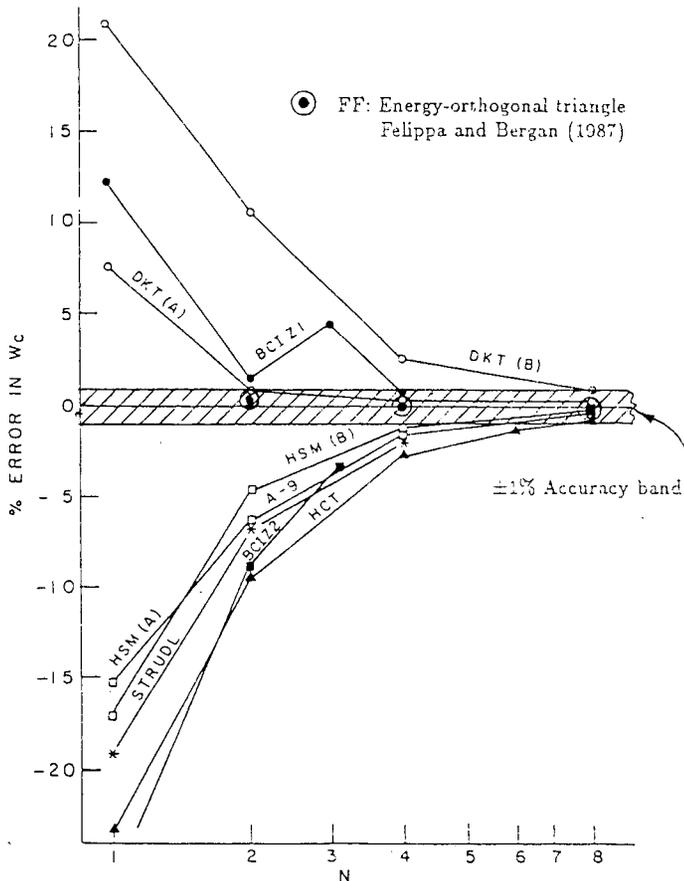


Figura 1. Estudio de convergencia de varios elementos finitos para flexión de placas, según Batoz et al<sup>1</sup>. Los resultados de la FF se toman de Felippa y Bergan<sup>10</sup>.

conseguir una convergencia asintótica rápida con mallas finas. Los elementos simples no pueden competir con elementos de alto orden en este aspecto. Lo que realmente importa es *la bondad de los resultados por mallas gruesas*.

## TEMA Y HERRAMIENTAS

Muchos investigadores se encuentran trabajando actualmente para desarrollar este tipo de elementos. El tema común de estas investigaciones es:

*Abandonar la formulación tradicional en desplazamientos.*

Las diferentes herramientas empleadas por estos investigadores en su búsqueda de elementos de alto rendimiento se indican en la Tabla II. Puede observarse que varias de éstas se han introducido hace más de veinte años. Pero sólo ahora se ha realizado un esfuerzo concertado para combinar varias de estas herramientas para forjar productos

superiores.

<i>Técnica</i>	<i>Año de Introducción</i>
• Funciones de forma incompatibles	1964
• Prueba de la parcela	1965
• Principios variacionales mixtos e híbridos	1965
• Proyectoros	1967
• Integración reducida y selectiva	1969
• Deformaciones asumidas	1970
• Balance energético	1974
• Ecuaciones diferenciales límites	1982

Tabla II. Herramientas para construcción de elementos.

Este trabajo trata acerca de *uno* de los enfoques posibles para la construcción de elementos de alto rendimiento. Este enfoque se basa en la formulación libre (FF). Como se ha comentado en la Introducción este enfoque se muestra considerablemente prometedor, al estar respaldado por impresionantes resultados computacionales.

## LA FORMULACION LIBRE

Al comienzo de la década de los ochenta se desarrolló la formulación libre (FF) para la construcción de elementos finitos basados en desplazamientos incompatibles. Este trabajo publicado en Bergan y Nygård<sup>4</sup>, consolidó una década de investigación de Bergan y sus colaboradores en Trondheim; testimonio de la misma puede encontrarse en Bergan y Hanssen<sup>2</sup>, Hanssen et al<sup>15</sup> y Bergan<sup>3</sup>. El producto de esta investigación han sido elementos finitos de alto rendimiento, especialmente para placas y cáscaras. Aplicaciones lineales se presentan en los trabajos anteriormente citados, así como en Bergan y Wang<sup>5</sup>, Bergan y Felippa<sup>7</sup>, y Felippa y Bergan<sup>10</sup>, mientras que aplicaciones no lineales se presentan en Bergan y Nygård<sup>8,9</sup> y Nygård<sup>16</sup>.

El concepto básico es que la matriz de rigidez elemental puede descomponerse en dos partes:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_h \quad (1)$$

donde

$\mathbf{K}_b$  matriz de rigidez básica, que se construye para satisfacer *convergencia*.

$\mathbf{K}_h$  matriz de rigidez de orden superior que se construye para satisfacer *estabilidad y exactitud*.

La descomposición (1) puede interpretarse a nivel de ecuación ensamblada o rigidez maestra como la descomposición de fuerzas

$$\mathbf{K}^A = (\mathbf{K}_b^A + \mathbf{K}_h^A)\mathbf{v} = \mathbf{f}_b^A + \mathbf{f}_h^A = \mathbf{f}^A \quad (2)$$

donde  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{f}^A$  son los vectores de desplazamientos nodales y fuerzas nodales ensambladas, respectivamente. Un postulado de la FF es que a medida que el tamaño promedio de la malla disminuye y la solución converge, el término  $\mathbf{K}_b\mathbf{v}$  domina.

La presentación original de la FF fue basada en hipótesis de desplazamientos no conformes, el principio de los trabajos virtuales y una forma especializada de la prueba de la parcela de Irons que Bergan y Hassen<sup>2</sup> llamaron la prueba del elemento individual. Las matrices básicas y de orden superior se construyen de una manera independiente, siguiendo los procedimientos descritos a continuación.

### CONSTRUCCION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ BASICA

Las etapas principales se indican seguidamente en forma de "receta", cuya justificación puede encontrar el lector en el Apéndice I y las referencias allí citadas.

*Etapa 1.* Se supone una tensión constante,  $\boldsymbol{\sigma}$ , dentro del elemento.

*Etapa 2.* Se suponen desplazamientos de contorno,  $\mathbf{d}$ , sobre la frontera  $B$  del elemento. Este campo se describe en función de los desplazamientos nodales  $\mathbf{v}$  según:

$$\mathbf{d} = \mathbf{V}\mathbf{v} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{V}$  es un vector de las funciones de forma del contorno. El movimiento del contorno debe satisfacer continuidad entre elementos y contener exactamente los movimientos de sólido rígido y deformación constante.

*Etapa 3.* Construya la matriz de "agrupamiento".

$$\mathbf{L} = \oint_B \mathbf{V} \cdot n dB \quad (4)$$

que convierte las tracciones en el contorno  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  asociadas a  $\boldsymbol{\sigma}$ , en fuerzas nodales del elemento  $\mathbf{f}$ , conjugadas a  $\mathbf{v}$ . Es decir  $\mathbf{f} = \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}$ .

*Etapa 4.* La matriz de rigidez básica es

$$\mathbf{K}_b = \frac{1}{v} \mathbf{L}\mathbf{E}\mathbf{L}^T \quad (5)$$

donde  $\mathbf{E}$  es la matriz constitutiva tensión-deformación, supuesta constante sobre el elemento, y  $v = \int_v dV$  indica el volumen del elemento.

## CONSTRUCCION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE ORDEN SUPERIOR

Nuevamente se describen a continuación las etapas principales indicando "cómo realizarlas".

*Etapla 1.* Se suponen los mismos desplazamientos compatibles de contorno, utilizados al construir  $\mathbf{K}_b$ , o sea la ecuación (3).

*Etapla 2.* Se supone un campo de desplazamientos internos sobre el volumen del elemento  $V$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q} = \underbrace{\mathbf{N}_q \mathbf{q}_r}_{\text{movimiento rígido}} + \underbrace{\mathbf{N}_c \mathbf{q}_c}_{\text{deformación constante}} + \underbrace{\mathbf{N}_h \mathbf{q}_h}_{\text{orden superior}} \quad (6)$$

donde el vector  $\mathbf{N}$  recoge las funciones de forma y  $\mathbf{q}$  las coordenadas generalizadas. Esta hipótesis satisface las siguientes condiciones:

- (a) independencia lineal con respecto a  $\mathbf{v}$ ,
- (b) la dimensión de los vectores  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{v}$  es la misma,
- (c) los movimientos de sólido rígido y deformación constante son completos,
- (d) (opcional pero recomendado) los desplazamientos de mayor orden son energéticamente ortogonales a los desplazamientos de deformación constante.

Las deformaciones internas asociadas son:

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{e}_c + \mathbf{e}_h = \mathbf{B}_c \mathbf{q}_c + \mathbf{B}_h \mathbf{q}_c \quad (7)$$

ya que las deformaciones de sólido rígido  $\mathbf{B}_r \mathbf{q}_r$  deben anularse.

*Etapla 3.* Construya la transformación cuadrada no singular:

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (8)$$

que invertida conduce a:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}_h \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_r \\ \mathbf{H}_c \\ \mathbf{H}_h \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad (9)$$

*Etapla 4.* La matriz de rigidez de orden superior es:

$$\mathbf{K}_h = \mathbf{H}_h^T \mathbf{K}_{qh} \mathbf{H}_h \quad \text{donde} \quad \mathbf{K}_{qh} = \int_V \mathbf{B}_h^T \mathbf{C} \mathbf{B}_h dV \quad (10)$$

$\mathbf{K}_{qh}$  es la matriz de rigidez generalizada en función de las coordenadas  $\mathbf{q}$ .

## FORMULACION VARIACIONAL

En 1984 se planteó la siguiente cuestión: ¿encaja la FF en un marco variacional? Esto fue respondido parcialmente por Bergan y Felippa<sup>7</sup>, quienes mostraron que la rigidez básica es equivalente a un elemento híbrido con tensión constante. Pero esfuerzos persistentes realizados por el autor para encuadrar a la rigidez de orden superior en el contexto de un principio variacional híbrido no tuvieron éxito hasta el desarrollo de los funcionales híbridos-mixtos parametrizados por Felippa<sup>11,12</sup>. Con la ayuda de estas funcionales más generales es posible mostrar que la FF pertenece a una clase muy especial de elementos híbridos-mixtos que no responden al principio clásico de Hellinger-Reissner. Retrospectivamente, la clasificación de los elementos FF como híbridos no es sorprendente. Bajo ciertas condiciones estudiadas en el Apéndice I, los elementos híbridos satisfacen la prueba de la parcela de Irons *a priori*, y el desarrollo de la FF se ha basado en esa premisa.

Para encuadrar la FF dentro del marco híbrido, deben invocarse las siguientes hipótesis:

*Hipótesis 1.* Se construye un funcional híbrido no-standard, identificado como  $\Pi_\gamma^d$  en el Apéndice I. Este funcional depende linealmente de un parámetro  $\gamma$ . Este parámetro "interpola" entre el funcional de la mínima energía potencial y el funcional de Hellinger-Reissner, que se obtienen para  $\gamma = 0$  y  $\gamma = 1$ , respectivamente.

*Hipótesis 2.* Se suponen tres campos sobre cada elemento:

- (a) un campo de tensión constante
- (b) un campo de desplazamientos internos  $\mathbf{u}$  definido por  $n_q$  coordenadas generalizadas reunidas en el vector  $\mathbf{q}$  y
- (c) un campo de desplazamientos sobre el contorno  $\mathbf{d}$ , definido por  $n_v$  desplazamientos nodales reunidos en el vector  $\mathbf{v}$ . Tanto  $\mathbf{v}$  como  $\mathbf{u}$  deben representar exactamente movimientos de sólido rígido y deformación constante.

*Hipótesis 3.* El número de coordenadas generalizadas,  $n_q$  iguala al número de desplazamientos nodales,  $n_v$ , y la matriz cuadrada de transformación  $\mathbf{G}$  que relaciona  $\mathbf{v} = \mathbf{G}\mathbf{q}$  no es singular.

Las dos últimas hipótesis son precisamente las invocadas en la construcción de  $\mathbf{K}_h$ , como se ha discutido previamente.

En el Apéndice I se muestra que substituyendo los desarrollos de elementos finitos en  $\Pi_\gamma^d$ , imponiendo la estacionariedad del funcional con respecto a los grados de libertad, y eliminando los campos internos mediante una combinación de condensación estática y restricciones cinemáticas, se obtienen las ecuaciones de rigidez escaladas de la FF dadas por la ecuación (A.71), en función de los desplazamientos nodales  $\mathbf{v}$ . El parámetro  $\gamma$  aparece como un coeficiente de la matriz de rigidez de orden superior. Estas ecuaciones de rigidez pueden implementarse fácilmente en cualquier código de elementos finitos basado en la formulación de desplazamientos.

## CONCLUSIONES

¿Por qué puede considerarse útil la formulación variacional de la FF? Existen varias razones:

1. Explica el comportamiento de los elementos FF en lo que concierne a convergencia, estabilidad y precisión.
2. Abre el camino a extensiones que no son inmediatas desde el punto de vista físico. Estas dos extensiones permiten incorporar campos de tensiones de orden superior y utilizar más modos de desplazamientos internos que desplazamientos nodales, es decir que la dimensión de  $\mathbf{q}$  en la ecuación (6) excede la de  $\mathbf{v}$  en la (3). Estas extensiones se estudian en el Apéndice I.
3. Establece las bases teóricas para la estimación del error local y el refinamiento adaptable de la malla de elementos finitos.
4. Facilita la construcción de "elementos diseñados" necesarios para aplicaciones tales como resistencia, estabilidad y vibraciones de estructuras de compuestos laminados avanzados. Tales elementos pueden combinar los tres ingredientes de la estática interna, cinemática interna, y cinemática del contorno en una unión armoniosa para satisfacer requerimientos de comportamientos especiales.

## APENDICE I: FORMULACION VARIACIONAL

En este apéndice se cubre en detalle la formulación variacional recientemente presentada<sup>11-12</sup> de la formulación libre para el caso de elasticidad lineal.

**Ecuaciones del problema.** Considérese un *cuerpo elástico lineal* bajo la acción de cargas estáticas que ocupa el volumen  $V$ . El cuerpo está limitado por la superficie libre  $S$  que se descompone en  $S : S_d \cup S_t$ . Los desplazamientos se imponen sobre  $S_d$ , mientras que las cargas lo hacen sobre  $S_t$ . La normal unitaria en  $S$  se indica mediante  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}_1$ .

Los tres campos desconocidos en el volumen son los desplazamientos  $\mathbf{u} \equiv u_i$ , deformaciones infinitesimales  $\mathbf{e} \equiv e_i$  y tensiones  $\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$ . Los datos del problema incluyen: el campo de fuerzas de volumen  $\mathbf{b} \equiv b_i$  en  $V$ , los desplazamientos impuestos  $\hat{\mathbf{d}}$  en  $S_d$  y las tracciones impuestas  $\hat{\mathbf{t}} \equiv \hat{t}_i$  en  $S_t$ .

Las relaciones entre los campos del volumen son las ecuaciones entre desplazamientos y deformaciones

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad \text{o} \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{i,j}) \quad \text{en } V \quad (\text{A.1})$$

las ecuaciones constitutivas

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{e} \quad \text{o} \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl}e_{kl} \quad \text{en } V \quad (\text{A.2})$$

y las ecuaciones de equilibrio

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^* \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b} \quad \text{o} \quad \sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{en } V \quad (\text{A.3})$$

donde  $\mathbf{D}^* = -\operatorname{div}$  indica el operador adjunto de  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)$ .

El vector de tensiones con respecto a la dirección definida por el vector unitario  $\mathbf{v}$  se indica según  $\boldsymbol{\sigma}_v = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}$ , o en componentes,  $\sigma_{vi} = \sigma_{ij}v_j$ . Sobre  $S$  el vector de tensiones se define según

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{o} \quad \sigma_{ni} = \sigma_{ij}n_j \quad (\text{A.4})$$

Con esta definición las condiciones de contorno en tensiones puede establecerse según

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{o} \quad \sigma_{ij}n_j = \hat{t}_i \quad \text{en } S_t \quad (\text{A.5})$$

y las condiciones de contorno en desplazamientos según

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{d}} \quad \text{o bien} \quad u_i = \hat{d}_i \quad \text{en } S_d \quad (\text{A.6})$$

## NOTACION

**Dependencia del campo.** En los métodos variacionales no trabajamos, por supuesto, con los campos exactos que satisfacen las ecuaciones del problema (A.1-A.3, A.4-A.6), sino con campos primarios *independientes*, que están sujetos a variaciones, y campos *dependientes* (secundarios, asociados, derivados) que no lo están. La aproximación se determina tomando variaciones con respecto a los campos independientes.

Un campo *independiente* se identificará mediante un tilde, por ejemplo  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Un campo dependiente se identifica escribiendo el símbolo del campo independiente como índice. Por ejemplo, si los desplazamientos se varían independientemente los campos de deformaciones y tensiones derivados son

$$\mathbf{e}^u = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}} \quad \boldsymbol{\sigma}^u = \mathbf{E}\mathbf{e}^u = \mathbf{E}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{A.7})$$

Una ventaja de esta notación es que tanto  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{e}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  pueden reservarse para los campos *exactos*.

**Abreviaciones de integrales.** Las integrales de volumen y superficie se abreviarán colocando paréntesis y corchetes suscritos, respectivamente, alrededor del integrando. Por ejemplo:

$$(f)_V \stackrel{\text{def}}{=} \int_V f dV, \quad [f]_S \stackrel{\text{def}}{=} \int_S f dS, \quad [f]_{S_d} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{S_d} F dS, \quad [f]_{S_t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{S_t} F dS \quad (\text{A.8})$$

Si  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  son funciones vectoriales y  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  funciones tensoriales, su producto interno sobre  $V$  se indica en la manera usual:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_V \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} dV = \int_V f_i g_i dV, \quad (\mathbf{p}, \mathbf{q})_V \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} dV = \int_V p_{ij} q_{ij} dV \quad (\text{A.9})$$

y análogamente para integrales de superficie, en cuyo caso se emplean corchetes.

**Declaraciones sobre Dominios.** La notación

$$(a = b)_V, \quad [a = b]_S, \quad [a = b]_{S_d}, \quad [a = b]_{S_t} \quad (\text{A.10})$$

se utiliza para declarar que la relación  $a = b$  es válida en cada punto de  $V$ ,  $S$ ,  $S_d$  y  $S_t$ , respectivamente.

**Interfases Internas.** En las subsecciones siguientes se construye un principio variacional, en el que los desplazamientos del contorno  $\mathbf{d}$  pueden variarse en forma independiente de los desplazamientos internos  $\mathbf{u}$ . Estos desplazamientos toman la parte de multiplicadores de Lagrange que relajan la continuidad interna de los desplazamientos. Los principios variacionales de este tipo se llaman *desplazamientos generalizados*, o *d-generalizados* por brevedad.

La elección de  $\mathbf{d}$  como campo independiente *no* es variacionalmente admisible sobre  $S_d$  o  $S_t$ . Debemos así extender la definición para incluir superficies internas designadas conjuntamente como  $S_i$ . Así

$$S : S_d \cup S_t \cup S_i \quad (\text{A.11})$$

Sobre  $S_i$  no se imponen ni desplazamientos ni tracciones. Un caso simple se ilustra en la Figura 2, en la que la interfase  $S_i$  divide a  $V$  en dos subvolúmenes  $V^+$  y  $V^-$ .

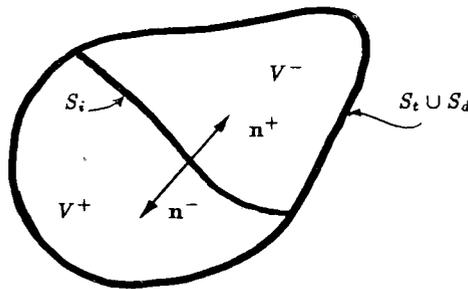


Figura 2. Ejemplo superficie interna.

Una interfase tal como  $S_i$  en la Figura 2 tiene dos lados,  $S_i^+$  y  $S_i^-$ , que identifican a  $S_i$  como los bordes de  $V^+$  y  $V^-$ , respectivamente. En puntos suaves de  $S_i$  las normales unitarias  $\mathbf{n}^+$  y  $\mathbf{n}^-$  tienen sentidos opuestos.

A continuación se generalizan las abreviaciones de las integrales (A.8) – (A.9). Utilizando la Figura 2, una integral de volumen es la suma de integrales sobre los subvolúmenes:

$$(f)_V \stackrel{\text{def}}{=} \int_{V^+} f dV + \int_{V^-} f dV \quad (\text{A.12})$$

Una integral sobre  $S_i$  incluye dos contribuciones

$$[g]_{S_i} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{S_i^+} g^+ dS + \int_{S_i^-} g^- dS \quad (\text{A.13})$$

donde  $g^+$  y  $g^-$  indican el valor del integrando  $g$  sobre  $S_i^+$  y  $S_i^-$ , respectivamente. Estos dos valores pueden ser diferentes si  $g$  es discontinua o involucra una proyección sobre las normales.

### EL PRINCIPIO DE HU-WASHIZU

Existen varios enunciados esencialmente equivalentes del funcional de Hu-Washizu en la elasticidad lineal. La forma inicial utilizada aquí es el funcional de cuatro campos

$$\Pi_W^d(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{d}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^e, \tilde{\mathbf{e}})_V + (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}^u - \tilde{\mathbf{e}})_V - P^d \quad (\text{A.14})$$

donde  $P^d$  es el potencial debido "a las cargas"

$$P^d(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{d}}) = (\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{u}})_V + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}]_{S_d} + [\hat{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}]_{S_i} \quad (\text{A.15})$$

El funcional  $\Pi_W^d$  se llama  $d$ -generalizado en el sentido que los campos de volúmenes  $\tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}$  y  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  así como los desplazamientos superficiales  $\tilde{\mathbf{d}}$  están sujetos a variaciones independientes, mientras que en la forma convencional del principio la relación  $[\mathbf{d} = \mathbf{u}]_{S_d \cup S_i}$  se impone *a priori*. El índice  $d$  se utiliza para distinguirlo de la variante  $t$ -generalizada

$$\Pi_W^t(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{t}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^e, \tilde{\mathbf{e}})_V + (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}^u - \tilde{\mathbf{e}})_V - P^t \quad (\text{A.16})$$

en el que las tracciones superficiales  $\tilde{\mathbf{t}}$  varían de forma independiente del campo de tensiones internas  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ . Este es el punto de partida en el clásico libro de Washizu<sup>21</sup>. Las versiones parametrizadas de (A.16) se estudian con mayor detalle en Felippa<sup>11</sup>.

Los funcionales que no son  $d$ - o  $t$ -generalizados se llamarán convencionales. Las tres versiones difieren solamente en el término del potencial debido a las cargas.

### PARAMETRIZACION

La restricción del funcional de Hu-Washizu mediante la imposición selectiva de las ecuaciones de campo y condiciones de contorno *a priori* conduce a seis funcionales indicados (en su forma convencional) en el capítulo 4 de la monografía de Oden y Reddy<sup>17</sup>. Para el estudio presente resulta de interés especial el funcional  $d$ -generalizado de Hellinger-Reissner

$$\Pi_R^d(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{t}}) = -\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{e}}^\sigma)_V + (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}^u)_V - P^d \quad (\text{A.17})$$

así como el funcional de energía potencial  $d$ -generalizado

$$\Pi_P^d(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^u, \mathbf{e}^u)_V - P^d \quad (\text{A.18})$$

Además Oden y Reddy<sup>18</sup> presentan un funcional sin nombre particular cuya versión  $d$ -generalizada es

$$\Pi_U^d(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^u, \tilde{\mathbf{t}}) = (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}^u)_V - \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}^\sigma)_V - (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}^u)_V - P^d \quad (\text{A.19})$$

Estos tres funcionales son casos particulares de la siguiente expresión parametrizada:

$$\Pi_\gamma^d(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{t}}) = \frac{1}{2}(1-\gamma)(\boldsymbol{\sigma}^u, \mathbf{e}^u)_V - \frac{1}{2}\gamma(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}^\sigma)_V + \gamma(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}^u)_V - P^d \quad (\text{A.20})$$

donde  $\gamma$  es un escalar. Si  $\gamma = 0, 1, -1$ , obtenemos los funcionales  $\Pi_R^d$ ,  $\Pi_P^d$  y  $\Pi_U^d$ , respectivamente.

**Primera variación.** Definiendo las tensiones  $\gamma$ -ponderadas

$$\boldsymbol{\sigma}^\gamma \stackrel{def}{=} \gamma \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + (1-\gamma)\boldsymbol{\sigma}^u \quad \text{en } V, \quad \boldsymbol{\sigma}_n^\gamma \stackrel{def}{=} \gamma \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n + (1-\gamma)\boldsymbol{\sigma}_n^u \quad \text{sobre } S$$

la primera variación de (A.20) puede escribirse

$$\begin{aligned} \delta \Pi_\gamma^d &= \gamma(\mathbf{e}^u - \mathbf{e}^\sigma, \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}})_V - (\text{div } \boldsymbol{\sigma}^\gamma + \mathbf{b}, \delta \tilde{\mathbf{u}})_V - [\hat{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\sigma}_n^\gamma, \delta \tilde{\mathbf{u}}]_{S_i} \\ &\quad - [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^\gamma, \delta \tilde{\mathbf{u}}]_{S_d} - [\mathbf{u} - \hat{\mathbf{d}}, \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n]_{S_d} \\ &\quad - [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^\gamma, \delta \tilde{\mathbf{u}}]_{S_i} - [\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}, \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n]_{S_i} - [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \delta \tilde{\mathbf{d}}]_{S_i} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Como  $\mathbf{d}$  es único en  $S_i$ , mientras  $\tilde{\mathbf{u}}$  y  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  son generalmente discontinuos sobre él, las integrales de interfase en (A.22) se subdividen como sigue:

$$\begin{aligned} [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^\gamma, \delta \tilde{\mathbf{u}}]_{S_i} &= [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^+ - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^{\gamma+}, \delta \tilde{\mathbf{u}}^+]_{S_i^+} + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^- - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^{\gamma-}, \delta \tilde{\mathbf{u}}^-]_{S_i^-}, \\ [\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}, \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n]_{S_i} &= [\tilde{\mathbf{u}}^+ - \tilde{\mathbf{d}}, \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^+]_{S_i^+} + [\tilde{\mathbf{u}}^- - \tilde{\mathbf{d}}, \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^-]_{S_i^-}, \\ [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \delta \tilde{\mathbf{d}}]_{S_i} &= [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^+, \delta \tilde{\mathbf{d}}]_{S_i^+} + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^-, \delta \tilde{\mathbf{d}}]_{S_i^-} = [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^+ - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^-, \delta \tilde{\mathbf{d}}]_{S_i^-} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Igualando la primera variación a cero y teniendo en cuenta (A.23), las ecuaciones de Euler y las condiciones de contorno para  $\gamma \neq 0$  resultan ser:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}^u = \mathbf{e}^\sigma)_V, \quad (\text{div } \boldsymbol{\sigma}^\gamma + \mathbf{b} = 0)_V, \quad [\boldsymbol{\sigma}_n^\gamma = \hat{\mathbf{t}}]_{S_i}, \quad [\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_n^\gamma]_{S_d}, \quad [\mathbf{u} = \hat{\mathbf{d}}]_{S_d}, \\ [\boldsymbol{\sigma}_n^{\gamma+} + \boldsymbol{\sigma}_n^+ = 0]_{S_i^+}, \quad [\boldsymbol{\sigma}_n^{\gamma-} + \boldsymbol{\sigma}_n^- = 0]_{S_i^-}, \quad [\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^- = \mathbf{d}]_{S_i}, \quad [\boldsymbol{\sigma}_n^+ + \boldsymbol{\sigma}_n^- = 0]_{S_i} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Las ecuaciones constitutivas no aparecen ya que están impuestas *a priori* en  $\Pi_\gamma^d$ . Si  $\gamma = 0$  la primera ecuación,  $(\mathbf{e}^u = \mathbf{e}^\sigma)_V$ , se anula.

**Potencial de cargas modificado.** La sustitución de  $\mathbf{d}$  en lugar de  $\mathbf{u}$  en el potencial de cargas (A.15)

$$P^d(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{d}}) = (\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{u}})_V + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \tilde{\mathbf{d}} - \hat{\mathbf{d}}]_{S_d} + [\hat{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{d}}]_{S-t} + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}]_{S_i} \quad (A.25)$$

no es variacionalmente admisible porque resultan ecuaciones de Euler incorrectas. Esta expresión, sin embargo, ha aparecido en publicaciones que tratan con métodos híbridos y mixtos. Un potencial correcto que se asemeja a (A.25) puede obtenerse en dos etapas. Primero los términos de superficie  $[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}]_{S_i}$  y  $[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}]_{S_d}$  se suman y restan para obtener

$$P^d(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{d}}) = (\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{u}})_V + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \tilde{\mathbf{d}} - \hat{\mathbf{d}}]_{S_d} + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n - \hat{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}]_{S_i} + [\hat{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{d}}]_{S_i} + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}]_S \quad (A.26)$$

Segundo, se supone que  $\hat{\mathbf{t}}$  está en el espacio de  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  y la condición  $[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n = \hat{\mathbf{t}}]_{S_i}$  se satisface *a priori*, reduciendo (A.26) a

$$P^d(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{d}}) = (\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{u}})_V + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \tilde{\mathbf{d}} - \hat{\mathbf{d}}]_{S_d} + [\hat{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{d}}]_{S_i} + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}]_S \quad (A.27)$$

Esta expresión difiere de (A.25) en que la importante integral de dislocación en la superficie se toma sobre  $S$  y no sobre  $S_i$ . Simplificaciones adicionales aparecen si las condiciones de contorno en desplazamientos  $[\tilde{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{d}}]_{S_d}$  se satisfacen exactamente:

$$P^d(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{d}}) = (\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{u}})_V + [\hat{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{d}}]_{S_i} + [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}]_S \quad (A.28)$$

De aquí en adelante se utiliza esta expresión de  $P^d$ , pues las modificaciones necesarias para tener en cuenta el caso  $[\tilde{\mathbf{d}} \neq \hat{\mathbf{d}}]_{S_d}$  son de menor importancia.

## EQUILIBRIO ENERGETICO

**Normas.** Indicamos mediante  $U(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon})_V$  la energía de deformación asociada con el campo  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Podemos reescribir (A.20) como el desviador de energía potencial

$$\Pi_\gamma^d = \Pi_P^d - \gamma U(\mathbf{e}^u - \mathbf{e}^\sigma) \quad (A.29)$$

porque

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_\gamma^d - \Pi_P^d}{\gamma/2} &= (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}^\sigma - \mathbf{e}^u) - (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^u, \mathbf{e}^u)_V = \\ &= (\boldsymbol{\sigma}^u - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}^u - \mathbf{e}^\sigma)_V = (\mathbf{E}\mathbf{e}^u - \mathbf{E}\mathbf{e}^\sigma, \mathbf{e}^u - \mathbf{e}^\sigma)_V \end{aligned} \quad (A.30)$$

Si  $\mathbf{E}$  es positiva definida,  $U(\mathbf{e}^u - \mathbf{e}^\sigma) \geq 0$  y luego

$$\Pi_\gamma^d \leq \Pi_p^d \quad \text{si } \gamma > 0 \quad (\text{A.31})$$

Si  $\tilde{\mathbf{u}}$  es cinemáticamente admisible,  $\Pi_p^d$  excede de la energía potencial exacta como se muestra más adelante. Se deduce que para mejorar las soluciones en energía hay que tomar  $\gamma \geq 0$ . Así, los principios asociados con  $\gamma < 1$  tienen limitado interés práctico.

Indiquemos mediante  $\Pi(\mathbf{u})$  la energía total exacta

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e})_V - (\mathbf{b}, \mathbf{u})_V - [\hat{\mathbf{t}}, \mathbf{u}]_S, \quad (\text{A.32})$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\mathbf{e}$  indican los campos de tensión y deformación exactos, respectivamente. Si  $\tilde{\mathbf{u}}$  es cinemáticamente admisible y así satisface  $[\tilde{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{d}}]_{S_d}$ , entonces la norma en energía entre  $\Pi_p^d(\tilde{\mathbf{u}})$  y el funcional exacto (A.32) es (ver por ejemplo la sección 34 de Gurtin<sup>14</sup>).

$$\Pi_p^d - \Pi = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^u - \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}^u - \mathbf{e})_V = U(\mathbf{e}^u - \mathbf{e}) \quad (\text{A.33})$$

**Aproximación Equilibrada Óptima.** Para obtener una aproximación *equilibrada en energía* imponemos la condición  $\Pi_\gamma^d = \Pi$ , que conduce a

$$\gamma_{opt} = \frac{U(\mathbf{e}^u - \mathbf{e})}{U(\mathbf{e}^u - \mathbf{e}^\sigma)} = \frac{(\boldsymbol{\sigma}^u - \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}^u - \mathbf{e})}{(\boldsymbol{\sigma}^u - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}^u - \mathbf{e}^\sigma)} \quad (\text{A.34})$$

Por ejemplo, si suponemos que las tensiones y deformaciones exactas son la media de los campos aproximados, entonces,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^u + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}), \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^\sigma + \mathbf{e}^u) \quad (\text{A.35})$$

y luego  $\gamma_{opt} = \frac{1}{4}$ .

**Estimadores de error.** La diferencia de deformación ( $\mathbf{e}^u - \mathbf{e}^\sigma$ ) puede utilizarse como una medida puntual de la precisión de la solución, y el *trabajo de dislocación* asociado  $U(\mathbf{e}^u - \mathbf{e}^\sigma)$  es una medida del error en energía, para aplicaciones tales como refinamiento adaptable de las mallas.

## DISCRETIZACION POR ELEMENTOS FINITOS

En este apartado se estudia la discretización mediante elementos finitos de  $\Pi_\gamma^d$ . Siguiendo la práctica corriente en elementos finitos, las componentes de tensiones y deformaciones se disponen en vectores unidimensionales, mientras el tensor de elasticidad  $\mathbf{E}$  se dispone en forma de una matriz cuadrada simétrica. Las hipótesis de Elementos Finitos se escriben globalmente

$$(\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{q})_V, \quad (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{A}\mathbf{a})_V, \quad [\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{V}\mathbf{v}]_S \quad (\text{A.36})$$

Aquí las matrices  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{V}$  contienen funciones de forma de desplazamientos generalizados, modos internos de tensiones y modos de desplazamientos de interfase,

respectivamente, mientras los vectores columna  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{v}$  contienen desplazamientos generalizados, amplitudes de modos de tensiones, y desplazamientos de la interfase, respectivamente. Los campos de volumen impuesto  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  y  $\tilde{\mathbf{u}}$  no necesitan ser continuos a través de  $S_i$ . Los campos derivados son

$$(\mathbf{e}^u = \mathbf{D}\mathbf{N}\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{q})_V, \quad (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{q})_V, \quad (\mathbf{e}^\sigma = \mathbf{E}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{a})_V \quad (\text{A.37})$$

Insertando estas expresiones en  $\Pi_\gamma^s$ , junto con el potencial de cargas (A.28), obtenemos la siguiente forma algebraica

$$\Pi_\gamma^s(\mathbf{a}, \mathbf{q}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2}(1-\gamma)\mathbf{q}^T\mathbf{K}_u\mathbf{q} - \frac{1}{2}\gamma\mathbf{a}^T\mathbf{C}\mathbf{a} + \gamma\mathbf{q}^T\mathbf{Q}\mathbf{a} - \mathbf{q}^T\mathbf{P}\mathbf{a} + \mathbf{v}^T\mathbf{L}\mathbf{a} - \mathbf{q}^T\mathbf{f}_q - \mathbf{v}^T\mathbf{f}_v \quad (\text{A.38})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_u &= (\mathbf{B}^T\mathbf{E}\mathbf{B})_V = \mathbf{K}_u^T, & \mathbf{C} &= (\mathbf{A}^T\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A})_V = \mathbf{C}^T, & \mathbf{Q} &= (\mathbf{B}^T\mathbf{A})_V, \\ \mathbf{L} &= [\mathbf{V}^T\mathbf{A}_n]_{S_i}, & \mathbf{P} &= [\mathbf{N}^T\mathbf{A}_n]_{S_i}, & \mathbf{f}_q &= (\mathbf{N}^T\mathbf{b})_V, & \mathbf{f}_v &= [\mathbf{N}^T\mathbf{t}]_{S_i} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Las matrices  $\mathbf{K}_u$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{P}$  se denominan rigidez de desplazamientos internos, compliancia, influencia, colocación de fuerzas nodales y dislocación del contorno, respectivamente. Haciendo (A.38) estacionaria se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} -\gamma\mathbf{C} & \gamma\mathbf{Q}^T - \mathbf{P}^T & \mathbf{L}^T \\ \gamma\mathbf{Q} - \mathbf{P} & (1-\gamma)\mathbf{K}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{L} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_q \\ \mathbf{f}_v \end{Bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

La primera ecuación matricial es la analogía discreta de la primera, quinta y octava relaciones en (A.24), y expresa la compatibilidad interna y en los contornos. La tercera ecuación matricial es la analogía discreta de la última relación, y expresa equilibrio a través de  $S_i$ . La segunda ecuación matricial es la analogía discreta de las restantes y expresa equilibrio en el contorno y en el interior del cuerpo.

Se muestra más adelante que si los modos tensiones supuestos en  $\mathbf{A}$  son *libres de divergencia* (autoequilibrados),  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q}$  y (A.40) se reduce a

$$\begin{bmatrix} -\gamma\mathbf{C} & -(1-\gamma)\mathbf{Q}^T & \mathbf{L}^T \\ -(1-\gamma)\mathbf{Q} & (1-\gamma)\mathbf{K}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{L} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_q \\ \mathbf{f}_v \end{Bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

Estos resultados se reinterpretan ahora en función de elementos híbridos.

## ELEMENTOS HIBRIDOS

**Enfoque.** El tratamiento precedente es relevante para la construcción de *elementos híbridos conectados por desplazamientos*. Otros elementos híbridos basados en hipótesis más estrictas fueron construidos originalmente por Pian y colaboradores<sup>18,19,20</sup>. Desde una perspectiva más reciente, las principales características de la formulación híbrida son:

- (A) El dominio se subdivide en elementos *antes* de establecer el principio variacional.
- (B) Las condiciones de continuidad a través de los bordes del elemento se relajan mediante la introducción de desplazamientos o tracciones en el contorno como campos de multiplicadores de Lagrange.
- (C) Todos los grados de libertad en desplazamientos internos y tensiones se eliminan (mediante condensación estática o restricciones cinemáticas) a *nivel elemental*.

La primera característica indica que los funcionales híbridos son efectivamente *dependientes de la malla*, pues el proceso de subdivisión del dominio introduce elementos de contorno que deben tratarse como *interfases internas*, y luego forman parte de  $S_i$ . Los desarrollos previos siguen siendo válidos si uno interpreta "cuerpo" como "elemento individual", "volumen" como "volumen elemental", y "superficie" como "contorno entre elementos".

**Continuidad y Conectores.** Los campos internos  $\bar{\sigma}$  y  $\bar{u}$  pueden ser discontinuos entre elementos. Sin embargo, el campo de desplazamientos de contorno  $\bar{d}$  debe ser continuo en  $S_i$ , es decir, debe tomar el mismo valor en elementos adyacentes. Esta condición puede satisfacerse si  $\bar{d}$  se *interpola unívocamente mediante los valores nodales en la interfase*, en la frontera que separa dos elementos. Es natural tomar tales valores nodales como componentes de  $\mathbf{v}$ , que automáticamente resulta el vector *de desplazamientos nodales conectados o conectores*.

## RELACIONES CINEMATICAS

En este apartado y en los siguientes trabajaremos con un *elemento individual* a menos que se indique otra cosa. El volumen del elemento es  $V$  y la superficie del mismo es  $S : S_d \cup S_t \cup S_i$ . El subvector  $\mathbf{v}$  contiene  $n_v$  grados de libertad conectores de elementos, mientras  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{a}$  contienen  $n_q$  y  $n_a$  variables internas, respectivamente. Supondremos que  $n_q \geq n_v$ .

La primera ecuación matricial (ecuación de compatibilidad discreta) en (A.40) puede interpretarse como la proposición de equilibrio de energía de dislocación:

$$\frac{1}{2}\gamma(\bar{\sigma}, \mathbf{e}^u - \mathbf{e}^\sigma)_V - \mathbf{a}^T(\mathbf{P}^T\mathbf{q} - \mathbf{L}^T\mathbf{v})_V = 0 \quad (\text{A.42})$$

Haciendo  $\gamma = 0$  y observando que  $\mathbf{a}$  es arbitraria, (A.42) impone que la restricción cinemática

$$\mathbf{P}^T\mathbf{q} = \mathbf{L}^T\mathbf{v} \quad (\text{A.43})$$

se satisfaga. La misma relación emerge si  $\gamma \neq 0$ , pero los desplazamientos de elementos se fuerzan a cumplir:

$$(\tilde{\sigma}, e^u - e^\sigma)_V = 0 \quad (A.44)$$

como una condición de *optimalidad* que dice que el trabajo del error en energía sobre las tensiones impuestas debe ser nulo para movimientos arbitrarios del elemento. La restricción (A.43) juega un papel fundamental en las derivaciones que siguen. Una consecuencia inmediata es que la primera ecuación matricial en (A.40) se reduce a la equivalente de (A.44), que se convierte en  $\gamma \mathbf{a}^T (-\mathbf{C}\mathbf{a} + \mathbf{Q}^T \mathbf{q}) = 0$ . Por lo tanto si  $\gamma \neq 0$ ,

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{q}, \quad \text{o} \quad \mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{v} \quad \text{si} \quad \mathbf{P} \equiv \mathbf{Q} \quad (A.45)$$

Supondremos que  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{v}$  se conectan mediante relaciones algebraicas lineales

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (A.46)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{H}\mathbf{v} \quad (A.47)$$

donde  $\mathbf{G}$  es una matriz de transformación de orden  $n_q \times n_v$  y  $\mathbf{H}$  es una matriz de transformación de orden  $n_q \times n_v$ . El cálculo de estas matrices y las relaciones de conexión se discuten más adelante. Empleando (A.46 – A.47) la restricción (A.43) puede establecerse de dos formas

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{L}^T \mathbf{G}, \quad \mathbf{P}^T \mathbf{H} = \mathbf{L}^T \quad (A.48)$$

La eliminación de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{q}$  en (A.40), empleando (A.45) – (A.47), y teniendo en cuenta la segunda de las (A.48), conduce a las ecuaciones de rigidez externas

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (A.49)$$

en donde

$$\mathbf{K} = \gamma [\mathbf{L}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{L}^T - \mathbf{L}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{L}^T] + (1 - \gamma) \mathbf{H}^T \mathbf{K}_u \mathbf{H}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_v + \mathbf{H}^T \mathbf{f}_q \quad (A.50)$$

Si  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q}$ , el sistema (A.41) se reduce a (A.49) pero con

$$\mathbf{K} = \gamma \mathbf{L}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{L}^T + (1 - \gamma) \mathbf{H}^T \mathbf{K}_u \mathbf{H} \quad (A.51)$$

## DESCOMPOSICION DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS INTERNO

Para obtener información adicional de la estructura de las ecuaciones (A.49) y eventualmente enlazar con la formulación libre, procedemos a descomponer ambos campos de elementos internos como se indica seguidamente.

**Descomposición de tensiones.** El campo de tensiones impuestas  $\tilde{\sigma}$  se descompone en un valor medio  $\bar{\sigma}$ , y un desviador

$$\tilde{\sigma} = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma}_h = \bar{\sigma} + \mathbf{A}_h \mathbf{a}_h \quad (\text{A.52})$$

en la cual

$$\bar{\sigma} = (\tilde{\sigma})_V / v, \quad (\mathbf{A}_h)_V = 0 \quad (\text{A.53})$$

donde  $v = (1)_V$  indica el volumen del elemento. La segunda relación en (A.53) se obtiene integrando (A.52) sobre  $V$  y observando que  $\mathbf{a}_h$  es arbitrario.

**Descomposición de desplazamientos internos.** El vector  $\tilde{\mathbf{u}}$  se descompone en componentes de movimientos de cuerpo rígido, deformación constante y desplazamientos de orden superior:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_r \mathbf{q}_r + \mathbf{N}_c \mathbf{q}_c + \mathbf{N}_h \mathbf{q}_h \quad (\text{A.54})$$

Aplicando el operador de deformación  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)$  a  $\tilde{\mathbf{u}}$  se obtiene el campo de deformación asociado

$$\mathbf{e}^u = \mathbf{D}\mathbf{N}_r \mathbf{q}_r + \mathbf{D}\mathbf{N}_c \mathbf{q}_c + \mathbf{D}\mathbf{N}_h \mathbf{q}_h = \mathbf{B}_r \mathbf{q}_r + \mathbf{B}_c \mathbf{q}_c + \mathbf{B}_h \mathbf{q}_h \quad (\text{A.55})$$

Pero  $\mathbf{B}_r = \mathbf{D}\mathbf{N}_r$  se anula pues  $\mathbf{N}_r$  contiene solamente movimientos de cuerpo rígido. También somos libres de elegir que  $\mathbf{B}_c = \mathbf{D}\mathbf{N}_c$  sea la matriz identidad  $\mathbf{I}$  si las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}_c$  se identifican con los valores de las deformaciones medias (promediadas por el volumen)  $\bar{\mathbf{e}}^u$ . Consecuentemente (A.55) se reduce a

$$\mathbf{e}^u = \bar{\mathbf{e}}^u + \mathbf{e}_h^u = \bar{\mathbf{e}}^u + \mathbf{B}_h \mathbf{q}_h \quad (\text{A.56})$$

en la cual

$$\mathbf{q}_c = \bar{\mathbf{e}}^u = (\mathbf{e}^u)_V / v, \quad (\mathbf{B}_h)_V = 0 \quad (\text{A.57})$$

**Partición de las ecuaciones.** Suponemos que todos los módulos elásticos en  $\mathbf{E}$  son *constantes* en el elemento. La partición de las incógnitas

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\sigma} \\ \mathbf{a}_h \end{array} \right\}, \quad \mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_r \\ \bar{\mathbf{e}}^u \\ \mathbf{q}_h \end{array} \right\} \quad (\text{A.58})$$

induce la siguiente partición de las ecuaciones generales del elemento (A.40).

$$\begin{bmatrix} -\gamma v \mathbf{E}^{-1} & \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{P}}_r^T & \gamma v \mathbf{I} - \bar{\mathbf{P}}_c^T & -\bar{\mathbf{P}}_h^T & \bar{\mathbf{L}}^T \\ \mathbf{0} & -\gamma v \mathbf{C}_h & -\mathbf{P}_{hr}^T & -\bar{\mathbf{P}}_{hc}^T & \gamma \mathbf{Q}_h^T - \mathbf{P}_{hh}^T & \mathbf{L}_h^T \\ -\bar{\mathbf{P}}_r & \mathbf{P}_{hr} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \gamma v \mathbf{I} - \bar{\mathbf{P}}_c & \mathbf{P}_{hc} & \mathbf{0} & (1-\gamma)v \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{P}}_h & \gamma \mathbf{Q}_h - \mathbf{P}_{hh} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (1-\gamma) \mathbf{K}_{qh} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{L}} & \mathbf{L}_h & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{a}_h \\ \mathbf{q}_r \\ \bar{\mathbf{e}}^u \\ \mathbf{q}_h \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{qr} \\ \mathbf{f}_{qc} \\ \mathbf{f}_{qh} \\ \mathbf{f}_v \end{Bmatrix} \quad (\text{A.59})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_h &= (\mathbf{A}_h^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A}_h)_V, \quad \mathbf{Q}_h = (\mathbf{B}_h^T \mathbf{A}_h)_V, \quad \mathbf{K}_{qh} = (\mathbf{B}_h^T \mathbf{E} \mathbf{B}_h)_V, \\ \bar{\mathbf{P}}_x &= [\mathbf{N}_{xn}^T]_S, \quad x = r, c, h, \quad \mathbf{P}_{xh} = [\mathbf{N}_x^T \mathbf{A}_{hn}]_S, \quad x = r, c, h, \\ \bar{\mathbf{L}} &= [\mathbf{V}_n^T]_V, \quad \mathbf{L}_h = [\mathbf{V}^T \mathbf{A}_{hn}]_S, \quad \mathbf{f}_{qx} = (\mathbf{N}_x^T \mathbf{b})_S, \quad x = r, c, h \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

**Transformaciones Integrales.** La aplicación del teorema de la divergencia al trabajo de las tensiones medias sobre  $\mathbf{e}^u$  conduce a

$$\begin{aligned} (\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{e}}^u)_V &= (\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{e}}^u + \mathbf{B}_h \mathbf{Q}_h)_V = \mathbf{v} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \bar{\mathbf{e}}^u + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T (\mathbf{B}_h)_V \mathbf{q}_h = \mathbf{v} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \bar{\mathbf{e}}^u \\ &= [\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n, \bar{\mathbf{u}}]_s = [\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n, \mathbf{N}_r \mathbf{q}_r + \mathbf{N}_c \bar{\mathbf{e}}^u + \mathbf{N}_h \mathbf{q}_h]_S = \\ &= \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T (\bar{\mathbf{P}}_r \mathbf{q}_r + \bar{\mathbf{P}}_c \bar{\mathbf{e}}^u + \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{q}_h) \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

de donde

$$\bar{\mathbf{P}}_r = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{P}}_c = v \mathbf{I}, \quad \bar{\mathbf{P}}_h = \mathbf{0} \quad (\text{A.62})$$

Un análisis similar del trabajo del desviador de tensiones  $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_h, \mathbf{e}^u)_V$  no conduce a formas simples para las matrices  $\mathbf{P}_{hx}$  a menos que  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_h$  sea *libre de divergencias*, en cuyo caso:

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_{hc} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_{hh} = \mathbf{Q}_h \quad (\text{A.63})$$

Obteniéndose  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q}$ , como se había enunciado antes. Insertando (A.62) y (A.63) en (A.59) se obtiene la forma particionada de (A.41):

$$\begin{bmatrix} -\gamma v \mathbf{E}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(1-\gamma)v \mathbf{I} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{L}}^T \\ \mathbf{0} & -\gamma \mathbf{C}_h & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(1-\gamma) \mathbf{Q}_h^T & \mathbf{L}_h^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -(1-\gamma)v \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (1-\gamma)v \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(1-\gamma) \mathbf{Q}_h & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (1-\gamma) \mathbf{K}_{qh} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{L}} & \mathbf{L}_h & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{a}_h \\ \mathbf{q}_r \\ -\bar{\mathbf{e}}^u \\ \mathbf{q}_h \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{qr} \\ \mathbf{f}_{qc} \\ \mathbf{f}_{qh} \\ \mathbf{f}_v \end{Bmatrix} \quad (\text{A.64})$$

**Relaciones Cinemáticas.** Si las tensiones de mayor orden son autoequilibradas de tal forma que  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q}$ , las relaciones (A.48) se particionan como

$$\begin{bmatrix} 0 & v\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_h^T \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{L}}^T \quad \mathbf{L}_h^T] [\mathbf{G}_r \quad \mathbf{G}_c \quad \mathbf{G}_h] \quad (A.65)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & v\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_r \\ \mathbf{H}_c \\ \mathbf{H}_h \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{L}}^T \quad \mathbf{L}_h^T]$$

y por consiguiente las relaciones

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{G}_r &= \mathbf{0}, & \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{G}_c &= v\mathbf{I}, & \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{G}_h &= \mathbf{0}, & \bar{\mathbf{L}}^T &= v\mathbf{H}_c, \\ \mathbf{L}_h^T \mathbf{G}_r &= \mathbf{0}, & \mathbf{L}_h^T \mathbf{G}_c &= \mathbf{0}, & \mathbf{L}_h^T \mathbf{G}_h &= \mathbf{Q}_h^T, & \mathbf{L}_h^T &= \mathbf{Q}_h^T \mathbf{H}_h. \end{aligned} \quad (A.66)$$

Las primeras cuatro fueron obtenidas mediante otros medios por Bergan<sup>7</sup> y Bergan y Nygård<sup>4</sup>, quienes las llamaron condiciones de *ortogonalidad en fuerzas* para tener en cuenta la interpretación física de  $\bar{\mathbf{L}}$  como la matriz de "colocación nodal de las fuerzas de contorno" en la formulación libre estudiada antes.

Si las tensiones de mayor orden no son autoequilibradas, las últimas cuatro de (A.66) se reemplazan por

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_h^T \mathbf{G}_r &= \mathbf{P}_{hr}^T, & \mathbf{L}_h^T \mathbf{G}_c &= \mathbf{P}_{hc}^T, & \mathbf{L}_h^T \mathbf{G}_h &= \mathbf{P}_{hh}^T, \\ \mathbf{L}_h^T &= \mathbf{P}_{hr}^T \mathbf{H}_r + \mathbf{P}_{hc}^T \mathbf{H}_c + \mathbf{P}_{hh}^T \mathbf{H}_h \end{aligned} \quad (A.67)$$

## INTERPRETACION DE LA FORMULACION LIBRE

La formulación libre de Bergan y Nygård<sup>4</sup>, fue concebida originalmente como un modelo de elementos finitos no compatibles basados en desplazamientos que cumplen la versión de nulidad de tracciones de la prueba de la parcela, que Bergan y Hansen<sup>2</sup> llamaron la "prueba de la parcela individual". Aquí la formulación se reinterpreta en el contexto del principio híbrido (A.20). Las hipótesis que conducen a la FF se describieron en la Introducción y se estudian con mayor detalle en lo que sigue.

**Tensiones internas.** El campo de tensiones internas es *constante*. Consecuentemente no hay  $\mathbf{a}_n$  parámetros, reduciéndose (A.59) o (A.64) a

$$\begin{bmatrix} -\gamma v \mathbf{E}^{-1} & \mathbf{0} & -(1-\gamma)v\mathbf{I} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{L}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -(1-\gamma)v\mathbf{I} & \mathbf{0} & (1-\gamma)v\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (1-\gamma)\mathbf{K}_{qh} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{L}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{q}_r \\ \bar{\mathbf{e}}^u \\ \mathbf{q}_h \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{qr} \\ \mathbf{f}_{qc} \\ \mathbf{f}_{qh} \\ \mathbf{f}_v \end{Bmatrix} \quad (A.68)$$

**Invertibilidad de  $\mathbf{G}$ .** La matriz  $\mathbf{G}$  en (A.46) se construye mediante *colocación nodal*, es decir, mediante la evaluación de la expansión  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{q}$  en los nodos del contorno del elemento. Esto establece la transformación

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}\mathbf{q} = [\mathbf{G}_r \quad \mathbf{G}_c \quad \mathbf{G}_h] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \bar{\mathbf{e}}^u \\ \mathbf{q}_h \end{Bmatrix} \quad (\text{A.69})$$

De acuerdo con las hipótesis indicadas previamente, la matriz  $\mathbf{G}$  es cuadrada y no singular. Así, invirtiendo (A.69) obtenemos

$$\mathbf{q} = \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{H}\mathbf{v} \quad \text{o} \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \bar{\mathbf{e}}^u \\ \mathbf{q}_h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_r \\ \mathbf{H}_c \\ \mathbf{H}_h \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_r \\ v^{-1}\bar{\mathbf{L}}^T \\ \mathbf{H}_h \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad (\text{A.70})$$

Las ecuaciones de rigidez de la FF. Eliminando  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  y  $\mathbf{q}$  de (A.68) se obtienen las ecuaciones de rigidez de la FF

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = [\mathbf{K}_b + (1 - \gamma)\mathbf{K}_h]\mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (\text{A.71})$$

donde

$$\mathbf{K}_b = v^{-1}\bar{\mathbf{L}}\mathbf{E}^{-1}\bar{\mathbf{L}}^T, \quad \mathbf{K}_h = \mathbf{H}_h^T \mathbf{K}_{qh} \mathbf{H}_h, \quad \mathbf{f} = \mathbf{F}_v + \mathbf{H}_r^T \mathbf{f}_{qr} + v^{-1}\bar{\mathbf{L}}\mathbf{f}_{qc} + \mathbf{H}_h \mathbf{f}_{qh} \quad (\text{A.72})$$

En la formulación libre  $\mathbf{K}_b$  y  $\mathbf{K}_h$  reciben el nombre de matrices de rigidez *básica* y *de orden superior*, respectivamente. Un valor  $\gamma = 1/2$  derivado de estudios de equilibrio de energía fue recomendado por Bergan y Felippa<sup>7</sup> para un elemento de tensión plana. Como  $\mathbf{K}_b$  es singular (excepto para los elementos más simples) no es admisible tomar  $\gamma = 1$  que corresponde al funcional de Hellinger-Reissner  $d$ -generalizado (A.17).

## LA FORMULACION LIBRE EXTENDIDA

En la formulación libre extendida (EFF) el número de desplazamientos internos libres,  $n_q = \dim(\mathbf{q})$ , puede exceder el número de desplazamientos nodales conectores  $n_v = \dim(\mathbf{v})$ . Podemos establecer la relación (A.69) como antes, pero la matriz  $\mathbf{G}$  será ahora rectangular y no puede invertirse directamente. Una forma de evitar esta dificultades retener  $n_q - n_v = \dim(\mathbf{a}_h)$  modos de tensión de orden superior; un procedimiento alternativo se discute en el próximo apartado. Los modos de tensiones se suponen autoequilibrados de forma que se cumpla (A.63). Las relaciones disponibles son

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}\mathbf{q}, \quad \mathbf{C}_h \mathbf{a}_h = \mathbf{L}_h^T \mathbf{v} = \mathbf{Q}_h^T \mathbf{q}_h \quad (\text{A.73})$$

que pueden combinarse para formar el sistema matricial

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{a}_h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_r & \mathbf{G}_c & \mathbf{G}_h \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_h^{-1} \mathbf{Q}_h^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \bar{\mathbf{e}}^u \\ \mathbf{q}_h \end{Bmatrix} \quad (\text{A.74})$$

La matriz del término derecho es cuadrada, e invertible si  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{C}_h$  y  $\mathbf{Q}_h$  poseen el rango completo. Resolviendo para  $\mathbf{q}$  y eliminando  $\mathbf{a}_h$  se obtiene

$$\mathbf{q} = \{ \mathbf{q}_r \quad \mathbf{q}_c \quad \mathbf{q}_h \} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}'_h & \mathbf{J}_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{a}_h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_r \\ \mathbf{H}_c \\ \mathbf{H}'_h + \mathbf{J}_h \mathbf{C}_h^{-1} \mathbf{Q}_h^T \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_r \\ \mathbf{H}_c \\ \mathbf{H}_h \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad (\text{A.75})$$

donde  $\mathbf{H}_h$  y  $\mathbf{J}_h$  resultan del proceso de inversión. Desde que  $\mathbf{H}'_h \mathbf{G}_h + \mathbf{J}_h \mathbf{C}_h^{-1} \mathbf{Q}_h^T = \mathbf{I}$ , podemos expresar  $\mathbf{H}_h$  como

$$\mathbf{H}_h = \mathbf{H}'_h + \mathbf{I} - \mathbf{H}'_h \mathbf{G}_h \quad (\text{A.76})$$

Teniendo  $\mathbf{H}$  disponible, reemplazando en (A.49) – (A.51) obtenemos la ecuación matricial de rigidez de la formulación libre extendida:

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = [\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_{bh} + (1 - \gamma)\mathbf{K}_h]\mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (\text{A.77})$$

donde  $\mathbf{K}_v$ ,  $\mathbf{K}_h$  y  $\mathbf{f}$  son las mismas que en (A.72) y

$$\mathbf{K}_{bh} = \mathbf{L}_h \mathbf{C}_h^{-1} \mathbf{L}_h^T \quad (\text{A.78})$$

Resulta ahora  $\gamma = 1$  admisible? Si la combinación  $\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_{bh}$  tiene el rango correcto la respuesta es afirmativa. Curiosamente, si las fuerzas de volumen  $\mathbf{b}$  se anulan y  $\gamma = 1$ , las ecuaciones (A.77) son precisamente las ecuaciones de rigidez para los elementos híbridos originales de Pian<sup>19</sup>, que por supuesto pueden construirse sin ninguna hipótesis de desplazamientos internos.

## AUMENTO JERARQUICO DE CONECTORES

Un enfoque alternativo para construir una transformación invertible tal como (A.74) consiste en aumentar  $\mathbf{v}$  con  $n_q - n_v$  grados de libertad conectores reunidos en un subvector  $\mathbf{v}_x$ . Estos pueden elegirse para obtener una matriz de transformación cuadrada de la forma

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_r & \mathbf{G}_c & \mathbf{G}_h \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \bar{\mathbf{e}}^u \\ \mathbf{q}_H \end{Bmatrix} \quad (\text{A.79})$$

Si se sigue este enfoque, es importante elegir  $\mathbf{v}_x$  en forma *jerárquica*, de tal manera que la  $\mathbf{G}$  expandida tenga la estructura mostrada arriba. En otras palabras,  $\mathbf{v}_x$  *no debe ser "excitado" por movimientos de sólido rígido o movimientos de deformación constante*. De lo contrario, la compatibilidad interelemental de los desplazamientos de contorno se violaría para tales movimientos, y la prueba de la parcela, discutida en el Apéndice II, falla.

La inversión de (A.79) provee la matriz  $\mathbf{H}$ . Las ecuaciones de la FF (A.71) pueden construirse con la contribución de la energía de deformación desde  $\mathbf{v}_x$ , que siguen a la matriz de rigidez de mayor orden  $\mathbf{K}_h$ . Finalmente los  $\mathbf{v}_h$  grados de libertad pueden condensarse estáticamente.

¿Cuál es el mejor enfoque para EFF? La decisión parece ser dependiente del tipo de elemento. La elección descansa básicamente en si resulta más fácil elegir modos de tensiones autoequilibradas que conectores jerárquicos, mientras se preserva la invariancia del elemento. Si ambos enfoques aparecen igualmente factibles, todavía no hay suficiente experiencia para decidir cuál de los dos es generalmente preferible.

### COMENTARIOS SOBRE LA FF EXTENDIDA

El calificativo *libre* en la formulación libre acentúa "libertad respecto a las condiciones de conformidad", que es un ingrediente inherente en la formulación de desplazamientos convencional, y la posibilidad de construir las contribuciones básicas y de orden superior a la rigidez, mediante hipótesis independientes. No obstante, cuando se estudia la FF desde el punto de vista variacional, resultan inmediatamente aparentes varias restricciones. La formulación FF extendida libera las más problemáticas al costo de requerir hipótesis más complicadas acerca de las tensiones, o bien conectores jerárquicos adicionales. Por consiguiente, es necesario reconocer que todavía no se ha llegado a la admirable meta de conseguir la libertad absoluta.

El desarrollo de la EFF como se ha indicado aquí fue motivado por las dificultades encontradas en la construcción de los siguientes elementos:

*Triángulo de tensión plana de 3 nodos con rotaciones nodales.* Similar al elemento construido por Bergan y Felippa<sup>7</sup>, pero con un equipo de desplazamientos internos *totalmente cuadrático*. Así, son necesarios  $n_v = 9$ ,  $n_q = 12$  y tres campos de tensiones autoequilibradas o tres adicionales conectores jerárquicos.

*Tetraedro de 4 nudos con rotaciones nodales.* La extensión del elemento previo a 3 dimensiones requiere  $n_v = 24$  y  $n_q = 30$  y se necesitan seis campos de tensiones adicionales, o seis conectores jerárquicos.

La adopción de campos de desplazamientos internos cuadráticos completos elimina ciertas dificultades en la selección de los modos de orden superior discutida por Bergan y Felippa<sup>7,10</sup>.

### APENDICE II. PRUEBA DE LA PARCELA BASADA EN LA CANCELACION DE TENSIONES

Es instructivo estudiar si esta clase de elementos cumple la prueba de la parcela para un  $\gamma$  arbitrario. Para investigar esta cuestión empleamos el esquema de la Figura 2 y visualizamos los subvolumenes  $V^+$  y  $V^-$  como *dos elementos conectados* a través de  $S_i$  con una frontera de tracción externa  $S_t$ . Ambos elementos están en un estado de *tensión constante*  $\sigma_0$ . Las tracciones superficiales impuestas son  $[\hat{t} = \sigma_{0n}]_{S_i}$  y las fuerzas de volumen  $b$  se anulan.

Primero se elige (A.64) como ecuación gobernante discreta para el ensamble de dos elementos. Las únicas fuerzas no nulas resultan  $\mathbf{f}_v = [\mathbf{V}^T]_{S_i}$ . La observación clave es

$$\bar{\mathbf{L}} = [\mathbf{V}_n^T]_S = [\mathbf{V}_n^T]_{S_i} \quad (\text{A.80})$$

porque la integral sobre  $S_i$  se anula mientras  $(V_+ = V_-)_{S_i}$  teniendo en cuenta las condiciones de compatibilidad en la interfase establecida en el Apéndice I y  $\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$ . Entonces para cualquier  $\gamma$  puede verificarse que la solución de (A.64) es la requerida por el criterio de la parcela, es decir

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}_0 = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^u, \quad \mathbf{a}_h = 0, \quad \mathbf{q}_r = \text{arbitrario}, \quad \bar{\mathbf{e}}^u = \mathbf{E}^{-1}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^u, \quad \mathbf{q}_h = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{L}^T\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 + \mathbf{G}_r\mathbf{q}_r \quad (\text{A.81})$$

Para comprobar (A.81) se encuentra que deben satisfacerse las siguientes relaciones dadas en (A.66)

$$\bar{\mathbf{L}}^T\mathbf{G}_r = 0, \quad \bar{\mathbf{L}}^T\mathbf{G}_c = \mathbf{v}\mathbf{I}, \quad \mathbf{L}^T\mathbf{G}_h = 0, \quad \mathbf{L}^T\mathbf{G}_r = 0 \quad (\text{A.82})$$

Si por el contrario tomamos la ecuación más general (A.59) la verificación de (A.81) exige que

$$\bar{\mathbf{P}}_r = 0, \quad \bar{\mathbf{P}}_c = \mathbf{v}\mathbf{I}, \quad \bar{\mathbf{P}}_h = 0, \quad \mathbf{P}_{hr}^T = \mathbf{L}_h^T\mathbf{G}_r, \quad \mathbf{P}_{hc}^T = \mathbf{L}_h^T\mathbf{G}_c, \quad \mathbf{P}_{hh}^T = \mathbf{L}_h^T\mathbf{G}_h \quad (\text{A.83})$$

Las primeras tres surgen del teorema de la divergencia como se ha mostrado en (A.61). Pero las tres últimas, listadas en (A.67) son una consecuencia de la restricción cinemática (A.43) que se ve así directamente correlacionada con el cumplimiento del criterio de la parcela.

Como lo ha hecho notar Fraeijs de Veubeke<sup>13</sup>, el significado físico de esta forma del criterio de la parcela es que *el trabajo virtual es nulo en la interfase* cuando la parcela de elementos está bajo un estado de tensión constante.

Este trabajo fue escrito en el período Julio-Agosto 1988. Desde entonces, la investigación de elementos de alto rendimiento basados en principios variacionales parametrizados ha sido extendida y continuada en las referencias [22]–[26].

## AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido financiada conjuntamente por la "Office of Naval Research" bajo subsidio N0001486-C-0082 y por el "Naval Research Laboratory" bajo subsidio N00014-87-K-298.

## REFERENCIAS

1. J.L. Batoz, K.J. Bathe y Lee-Wing Ho, "A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements", *Int. Journal Num. Meth. Engrg.*, Vol. 15, pp. 1771–1812, (1980).
2. P.G. Bergan y L. Hanssen, "A new Approach for deriving 'good' finite elements", *MAFELAP II Conference, The Mathematics of Finite Elements and Applications*, Vol. II, Brunel University, 1975, Ed. J.R. Whiteman, Academic Press, London, (1976).
3. P.G. Bergan, "Finite Elements Based on Energy Orthogonal Functions", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 15, pp. 1141–1155, (1980).

4. P.G. Bergan y M.K. Nygård, "Finite Elements with increased freedom in choosing shape functions", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 20, pp. 643-664, (1984).
5. P.G. Bergan y X. Wang, "Quadrilateral plate bending elements with shear deformations", *Computer & Structures*, Vol. 19, pp. 25-32, (1984).
6. P.G. Bergan et al, FENRIS Manuals, Theory - Program Outline - Data Input, NTH, SINTEF y A.S. Veritas, Hovik, Norway, (1984).
7. P.G. Bergan y C.A. Felippa, "A Triangular Membrane Element with Rotational Degrees of Freedom", *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, Vol. 50, pp. 25-69, (1985).
8. P.G. Bergan y M.K. Nygård, "Nonlinear Shell Analysis Using Free Formulation Finite Elements", *Proc. Europe-US Symposium on Finite Elements Method for Nonlinear Problems*, celebrado en Trondheim, Norway, Springer-Verlag, Berlín, (1985).
9. P.G. Bergan y M.K. Nygård, "Free Formulation Elements Applied to Stability of Shells", *Proc. Int. Conf. on Computational Engineering Science - ICES88*, Atlanta, Georgia, (1988).
10. C.A. Felippa y P.G. Bergan, "A Triangular Plate Bending Element Based on an Energy-Orthogonal Free Formulation", *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, Vol. 61, pp. 129-160, (1987).
11. C.A. Felippa, "Parametrized Multifield Variational Principles in Elasticity: I. Mixed Functionals", *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 5, pp. 69-78, (1989).
12. C.A. Felippa, "Parametrized Multifield Variational Principles in Elasticity: II. Hybrid Functionals and the Free Formulation", *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 5, pp. 79-88, (1989).
13. B.M. Fraeijs de Veubeke, "Variational Formulation and the Patch Test", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 8, pp. 783-801, (1974).
14. M. Gurtin, "The Linear Theory of Elasticity", *Encyclopedia of Physics*, ed, C. Truesdell, Springer-Verlag, Berlín, (1972).
15. L. Hanssen, T.G. Syvertsen y P.G. Bergan, "Stiffness Derivation Based on Element Convergence Requirements", *MAFELAP III Conference, The Mathematics of Finite Elements and Applications*, Vol. III, Brunel University, 1975, Ed. J.R. Whiteman, Academic Press, London, (1979).
16. M.K. Nygård, "The Free Formulation for Nonlinear Finite Element Analysis with Applications to Shells", *Dr. Ing. Dissertation*, Division of Structural Mechanics, The Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Norway, (1986).
17. J.T. Oden y J.N. Reddy, "*Variational Methods in Theoretical Mechanics*", Springer-Verlag, Berlín, (1983).
18. T.H.H. Pian, "Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions", *AIAA Journal*, Vol. 2, pp. 1333-1356, (1964).
19. T.H.H. Pian y P. Tong, "Basis of finite element methods for solid continua", *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 1, pp. 3-29, (1969).
20. T.H.H. Pian, "Finite Element Methods by Variational Principles with Relaxed Continuity Requirements", *Variational Methods in Engineering*, Vol. 1, ed. C. Brebbia y H. Tottenham, Southampton University Press, Southampton, U.K., (1973).
21. K. Washizu, "*Variational Methods in Elasticity and Plasticity*", Pergamon Press, Oxford, (1968).
22. C.A. Felippa, "The extended free formulation of finite elements in linear elasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, pp. 609-616, (1989).
23. C.A. Felippa y C. Militello, "Developments in variational methods for high performance

- plate and shell elements”, *Analytical and Computational Models for Shells*, CED, Vol. **3**, eds. A.K. Noor, T. Belytschko y J.C. Simo, American Society of Mechanical Engineers, ASME, New York, pp. 191–216, (1989).
24. C.A. Felippa y C. Militello, “Principios variacionales parametrizados en elasticidad lineal”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **6**, pp. 333–342, (1990).
  25. C.A. Felippa y C. Militello, “Variational formulation of high performance finite elements: parametrized variational principles”, *Computers and Structures*, Vol. **36**, pp. 1–11, (1990).
  26. C.A. Felippa y C. Militello, “The ANDES formulation of finite elements”, *Memorias I Congreso Métodos Numéricos en Ingeniería*, ed. G. Winter y M. Galante, Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, (1990).