

MODELOS ELASTO-PLASTICOS DE ESTADO CRITICO PARA ANALISIS NUMERICOS DE PROBLEMAS GEOTECNICOS. I - FORMULACION BASICA Y PRINCIPALES MODIFICACIONES

*ANTONIO GENS

y

**D.M. POTTS

**E.T.S. Ingenieros de Caminos,
Jordi Girona Salgado, 31,
08034 Barcelona, España.*

***Civil Engineering Department,
Imperial College, London SW7, England.*

RESUMEN

Los modelos de estado crítico han tenido una importancia capital en la aplicación de la elastoplasticidad a la caracterización del comportamiento mecánico de materiales geotécnicos. En esta serie de dos artículos se revisa el estado actual de desarrollo de estos modelos y su aplicación a análisis numéricos de problemas geotécnicos. El primer artículo se inicia con una breve nota sobre el desarrollo histórico de los modelos pasando a continuación a describir, de forma resumida, la formulación básica y sus principales consecuencias. El artículo se completa con una descripción y breve discusión de las principales modificaciones propuestas a la formulación básica, en especial aquellas más frecuentemente utilizadas en análisis numéricos. Los temas seleccionados para ser objeto de una atención especial son: superficie de fluencia en el lado supercrítico, superficie de fluencia para suelos consolidados sin deformación lateral, componente elástica del modelo, comportamiento plástico en el interior de la superficie de fluencia principal y formulación en el plano desviador. El segundo artículo de la serie tratará de la implementación numérica de estos modelos y ofrecerá ejemplos de aplicación.

SUMMARY

Critical state models play a central role in the application of elasto-plasticity to the modelling of the mechanical behaviour of geomaterials. In this series of two papers, the present state of model development and their application to computational analysis of geotechnical problems are reviewed. The present paper starts with a brief historical note on the early model development followed by a description of the basic formulation and of its main consequences. The paper also describes and discusses the main modifications to the basic formulation, especially those actually used in numerical analyses. The following topics are specifically considered: yield surface in the supercritical side, yield surface for soils consolidated with zero

Recibido: Enero 1988

lateral deformation, elastic component of the model, plastic behaviour inside the main yield locus and formulation in the deviatoric plane. The second paper of the series will deal with numerical implementation and will describe examples of application.

INTRODUCCION

El comportamiento mecánico de los materiales geotécnicos presenta fenómenos de fluencia, deformaciones irreversibles y dilatación inducida por tensiones de corte. Estas características sugieren inmediatamente que la teoría de la plasticidad podría ser muy adecuada para la descripción del comportamiento de suelos y rocas. El desarrollo de los modelos de estado crítico ha supuesto un avance fundamental para la aplicación de dicha teoría a la Geomecánica. Modelos relativamente simples basados en las hipótesis de la plasticidad asociada son capaces de predecir, por lo menos cualitativamente, un gran número de aspectos fundamentales del comportamiento de los suelos.

En la presente serie de dos artículos se presenta una revisión del estado actual de la aplicación de los modelos de estado crítico (MEC) a los análisis numéricos de problemas geotécnicos. Esta aplicación se ha convertido en uno de los rasgos más característicos de la Geomecánica computacional. En este primer artículo se describe la formulación básica y se revisan las principales modificaciones a la misma, reservándose la implementación numérica y las aplicaciones al segundo artículo de esta serie. La literatura que trata de los diversos desarrollos de las teorías de Estado Crítico es muy vasta. En este trabajo, sólo se considerarán aquellos desarrollos que se utilizan con cierta frecuencia en aplicaciones numéricas. Inevitablemente, en esta revisión, se da un énfasis especial a las opiniones y experiencia personal de los autores.

NOTA HISTORICA

Desde los trabajos de Coulomb y Rankine^{1,2} existe una larga tradición de aplicaciones de la teoría de la Plasticidad a la Geomecánica. Por ejemplo, el método de las líneas de deslizamiento y los teoremas de análisis límite se utilizan con mucha frecuencia. Sin embargo, el ámbito de este artículo se limitará a aquellas formulaciones que proporcionan modelos realistas del comportamiento de los suelos que pueden ser utilizados en análisis completos de tensión/deformación.

En este contexto, hay que decir que, a pesar de las numerosas características del comportamiento de materiales geotécnicos que pueden describirse de forma natural por modelos elasto-plásticos, la aplicación de la plasticidad a la Geomecánica fue posterior al desarrollo en el campo paralelo de los materiales metálicos. La generalización de los modelos de Tresca y Von Mises (Figura 1) fueron el primer intento de tener en cuenta el carácter friccional de los materiales geomecánicos^{3,4}. Sin embargo, estos modelos no representaban bien muchos de los rasgos básicos del comportamiento de los suelos y la adopción de leyes de influencia asociadas conducía a la predicción de dilatación excesiva en fluencia y rotura.

En la década posterior se produjeron importantes contribuciones que condujeron finalmente a la formulación de los modelos de Estado Crítico. Drucker et al⁵ sugirieron

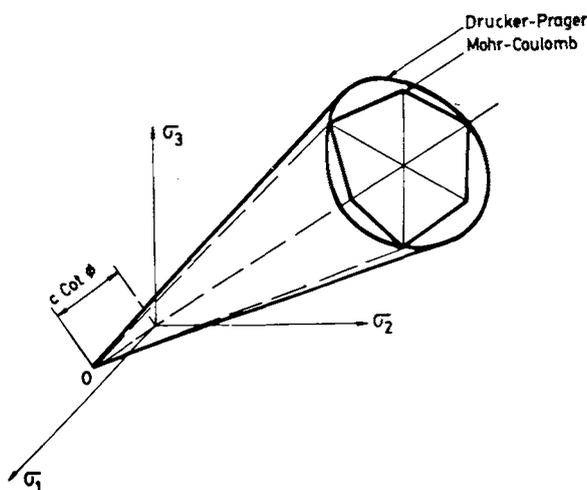


Figura 1. Modelos elasto-plásticos friccionales.

la existencia de una superficie de fluencia controlada por el cambio de volumen (*cap surface*), Roscoe et al⁶ postularon un esquema de comportamiento basado en el concepto de estado crítico y en la existencia de una superficie de estado límite y Calladine⁷ sugirió el marco de la Plasticidad rigidizable como base para una formulación consistente que integrara los distintos conceptos.

Los primeros modelos elasto-plásticos de Estado Crítico fueron la serie de formulaciones Cam-clay desarrolladas en la Universidad de Cambridge por Roscoe y sus colegas. La formulación del modelo Cam-clay original como una ley constitutiva completa de tipo elasto-plástico incremental se encuentra en las referencias 8 y 9. Posteriormente, Roscoe y Burland¹⁰ propusieron el modelo Cam-clay modificado y su extensión a tres dimensiones. Las primeras implementaciones numéricas de estos modelos en programas de elementos finitos datan de los primeros años de la década de los 70^{11,12,13}.

FORMULACION BASICA DE LOS MODELOS DE ESTADO CRITICO

EL modelo Cam-clay original^{8,9} puede resumirse de forma breve en los siguientes puntos:

- a) La superficie de fluencia es la curva logarítmica (Figura 2a):

$$q = M p' \ln(p'_0/p') \tag{1}$$

p'_0 define la posición de la superficie de fluencia y es, por tanto, el parámetro de rigidización.

- b) La rigidización es isotrópica y depende de la deformación volumétrica plástica, ϵ_v^p , de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\frac{dp'_0}{p'_0} = d\varepsilon^p_v (\lambda - \kappa)/(1 + e) \tag{2}$$

- c) Se supone plasticidad asociada.
- d) Las deformaciones volumétricas elásticas, ε^e_v , se calculan como:

$$d\varepsilon^e_v = (\kappa/(1 + e)) (dp'/p') \tag{3}$$

donde $q = \sigma_1 - \sigma_3$, $p' = (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)/3$, e es el índice de huecos y λ , κ y M son parámetros del modelo. σ_1 , σ_2 y σ_3 son las tensiones principales.

Dado que su ámbito de aplicación son los materiales porosos saturados, el modelo se formula en términos de tensiones efectivas que se definen como

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p_w \delta_{ij} \tag{4}$$

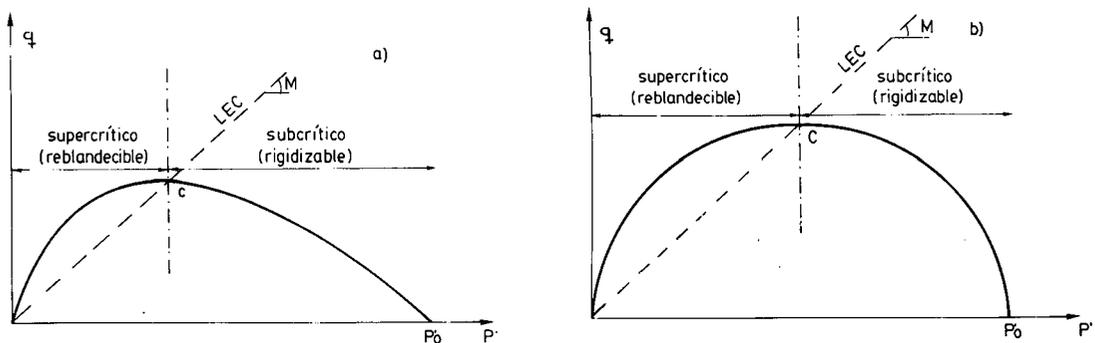


Figura 2. a) Superficie de fluencia para el modelo Cam-clay. b) Superficie de fluencia para el modelo Cam-clay modificado.

donde σ'_{ij} es la tensión efectiva, σ_{ij} la tensión total, p_w la presión intersticial y δ_{ij} la delta de Kronecker. El convenio de signos considera positivas a las tensiones y deformaciones de compresión. En la formulación original se postuló que las deformaciones de corte elásticas eran nulas. Para evitar problemas numéricos y conseguir una mejor representación del comportamiento dentro de la superficie de fluencia las deformaciones de corte elásticas se calculan generalmente usando un módulo de deformación de corte G que constituye un parámetro adicional del modelo. El modelo fue formulado inicialmente en el plano triaxial ($\sigma_2 = \sigma_3$ o $\sigma_2 = \sigma_1$). Las formulaciones en tres dimensiones se describirán más adelante.

La discontinuidad de la superficie de fluencia del modelo Cam-clay original en el punto $q = 0$ implica dificultades tanto teóricas como prácticas. Como la ley de fluencia es asociada, cambios isotrópicos de tensiones en ese punto causarán deformaciones de corte distintas de cero. Además, el modelo puede predecir cambios de tensiones poco

razonables para algunos tipos de incrementos de deformación. El modelo Cam-clay modificado¹⁰ supera estas dificultades adoptando una elipse

$$q^2 = M^2 p' (p'_0 - p') \tag{5}$$

como superficie de fluencia (Figura 2b).

Como ambos modelos son básicamente semejantes, se pueden considerar como la formulación básica de los modelos de estado crítico. A continuación se examinan algunas de sus consecuencias.

En la Figura 2 el punto *C* representa el punto donde la superficie de fluencia tiene pendiente horizontal. En ese punto, las deformaciones volumétricas plásticas serán cero y la superficie de fluencia permanecerá estacionaria. Un punto como el *C* será, por tanto, el estado final de un suelo en rotura, independientemente de las condiciones iniciales. La existencia de dicho estado, denominado estado crítico, es un rasgo característico del comportamiento de los suelos. Puesto que la rigidización es isotrópica la sucesión de puntos de estado crítico dibujará una línea recta (LEC) de pendiente *M* (Figura 2). Por tanto, el modelo compatibiliza, de forma natural, la plasticidad asociada con una envolvente de rotura friccional y con dilatancia nula en el estado final del suelo. Los modelos también predicen una relación única entre índice de huecos (o humedad) y tensiones en el estado crítico. La Figura 3 presenta resultados experimentales que muestran un buen acuerdo con las predicciones cualitativas de la formulación básica.

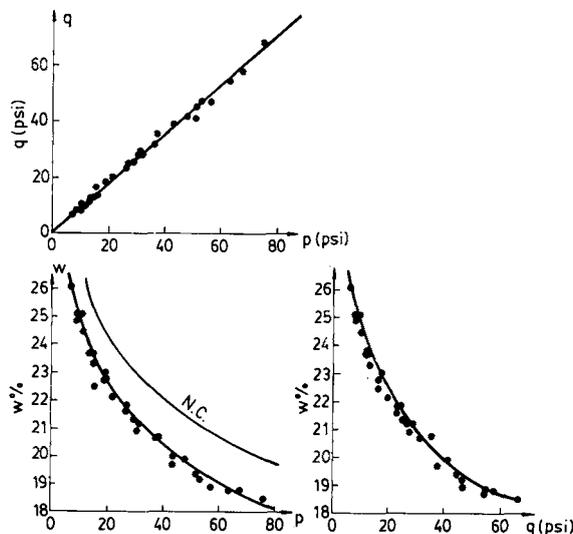


Figura 3. Línea de estado crítico para la arcilla de Weald representada en los espacios $q - p'$, w (humedad) $- p'$ y $w - q$ (según Roscoe et al°).

Otra característica del comportamiento de los suelos que los modelos Cam-clay predicen satisfactoriamente es la dependencia de la respuesta volumétrica del suelo de su

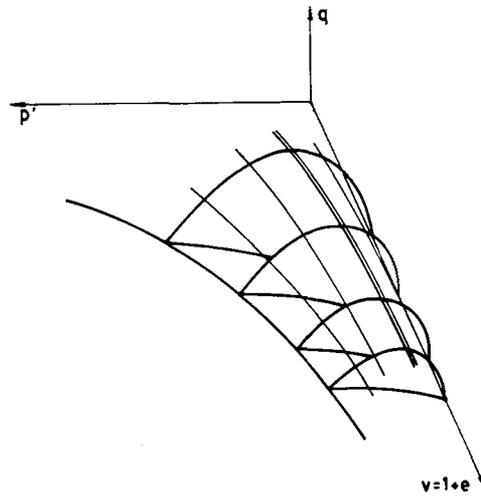


Figura 4. Superficie de estado límite.

historia de tensiones. Si un elemento de suelo entra en fluencia en un punto a la derecha de C , las deformaciones volumétricas plásticas serán positivas y, como consecuencia, el material se rigidizará. Este lado se denomina “húmedo” o subcrítico. Si la fluencia ocurre en un punto a la izquierda de C (lado “seco” o supercrítico) las deformaciones volumétricas plásticas son negativas y el comportamiento será reblandecible. Por lo tanto, la superficie de fluencia a la izquierda del punto de estado crítico actúa también como una envolvente de rotura.

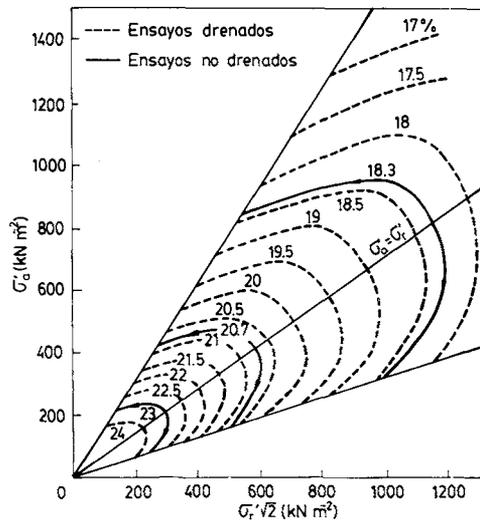


Figura 5. Contornos de humedad constante. Se observa una relación única humedad-tensión efectiva independiente del tipo de ensayo (según Henkel¹⁶).

Los modelos Cam-clay también predicen una Superficie de estado límite (SEL)

única en el espacio $q - p' - e$ (Figura 4) fuera de la cual no son admisibles estados del suelo. La superficie en cuestión representa una relación única entre el índice de huecos y el valor de las tensiones efectivas para muestras normalmente consolidadas de acuerdo con el principio de Rendulic¹⁴. Aunque esta relación única ha sido observada en algunos suelos^{15,16} (véase por ejemplo la figura 5), su existencia no es general para todos los casos, sobre todo, cuando se comparan distintos tipos de consolidación^{17,18,19}, lo que puede implicar la necesidad de efectuar modificaciones a la formulación básica. Este punto se tratará más adelante.

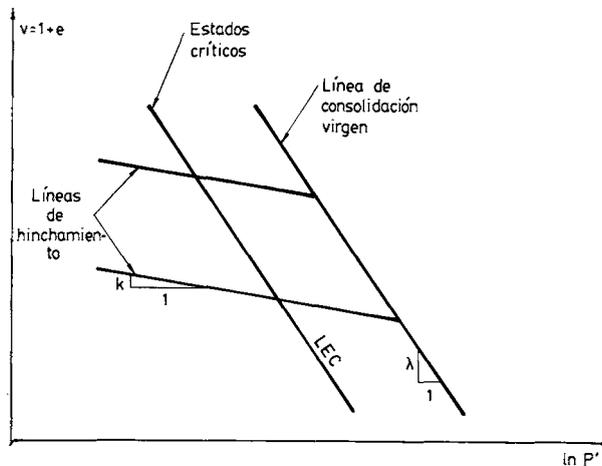


Figura 6. Líneas de consolidación e hinchamiento según los modelos de estado crítico.

El comportamiento de consolidación/hinchamiento que se deriva de la formulación (Figura 6) se corresponde también, de forma suficientemente aproximada al comportamiento observado de los suelos. Las líneas de consolidación virgen para razones de tensiones constantes son, en el espacio $(e \text{ (o humedad)} - \ln p')$, rectas paralelas a la línea de estados críticos. En la Figura 7 se presentan resultados experimentales correspondientes a una arcilla de baja plasticidad que se ajustan perfectamente a esta predicción.

La satisfactoria modelización de un elevado número de los rasgos del comportamiento más importantes de los suelos de forma muy económica en términos de hipótesis y parámetros explica el éxito de los modelos Cam-clay. Naturalmente, cuando se comparan cuantitativamente las predicciones de los modelos con los resultados experimentales, se encuentra que modelos simples de este tipo no son capaces de reproducir exactamente el comportamiento real de los suelos. Sin embargo, esta formulación básica proporciona a menudo predicciones suficientemente aproximadas sobre todo si no existen rotaciones o cambios de dirección de las tensiones. Los resultados obtenidos con estos modelos en los Simposios de predicción de Montreal²¹ y Grenoble²² han sido satisfactorios. En la referencia 23 se presenta una lúcida discusión acerca de las posibilidades y limitaciones de esta formulación básica y su relación con el comportamiento observado de los suelos. Es importante señalar que, en el momento

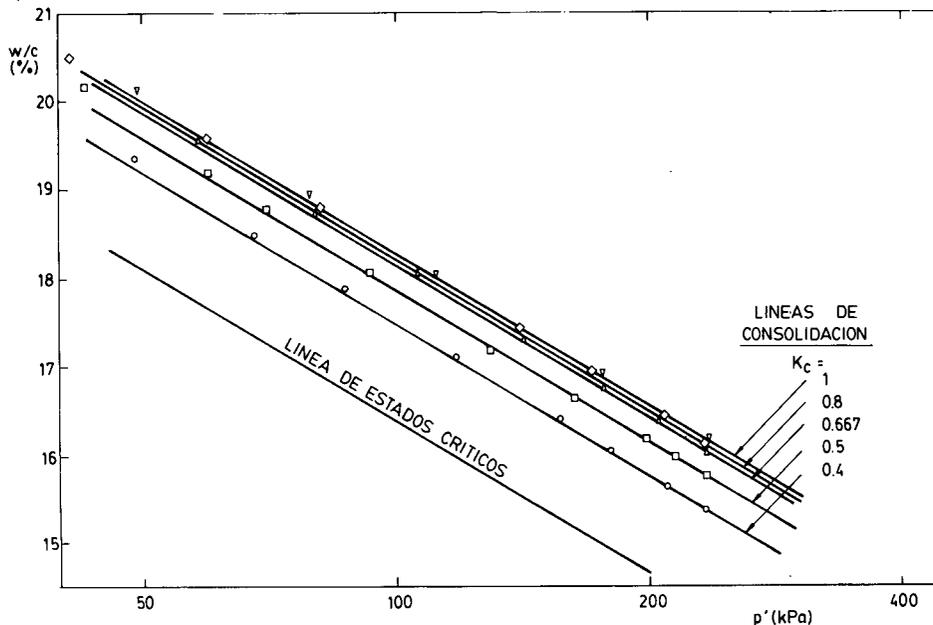


Figura 7. Líneas de consolidación para distintos valores de $K_c = \sigma'_3/\sigma'_1$ en una arcilla de baja plasticidad, Lower Cromer Till (según Gens²⁰).

actual, el modelo Cam-clay modificado continúa siendo el modelo de estado crítico más frecuentemente utilizado en análisis numéricos.

MODIFICACIONES A LA FORMULACION BASICA

Se han propuesto un gran número de modificaciones a la formulación básica presentada en el apartado anterior. El objetivo ha sido conseguir un mejor acuerdo entre predicciones y comportamiento observado y modelar nuevos tipos de fenómenos como por ejemplo los efectos debidos a carga cíclica. En la referencia 24 se presenta una excelente revisión de las leyes constitutivas elasto-plásticas existentes donde pueden verse los modelos de estado crítico más importantes. En este trabajo sólo se discutirán aquellas modificaciones que se utilizan con cierta frecuencia en análisis numéricos. Como la influencia de la formulación de estado crítico es tan amplia, es a menudo difícil fijar los límites que separan los modelos de estado crítico del resto de modelos elasto-plásticos. En este trabajo se ha adoptado un criterio poco restrictivo para efectuar esta distinción.

En esta sección se considerarán específicamente los siguientes puntos: superficie de fluencia en el lado "seco" o supercrítico, modificaciones para suelos consolidados en condiciones K_0 (deformación lateral nula), componente elástica del modelo, comportamiento plástico en el interior de la superficie de fluencia y formulaciones en el plano desviador.

Superficie de fluencia en el lado supercrítico

Un defecto de la formulación básica es que las superficies de fluencia adoptadas (Figura 2) sobreestiman las tensiones de rotura en el lado supercrítico de forma significativa. Además, Hvorslev²⁵ encontró que una línea recta es una buena aproximación para la envolvente de rotura para suelos sobreconsolidados. En la Figura 8 se presentan resultados experimentales que ilustran estas afirmaciones. No es sorprendente, por tanto, que en una de las primeras aplicaciones numéricas de los modelos Cam-clay²⁶ se adoptara una línea recta como superficie de fluencia en el lado supercrítico (Figura 9a). Esta nueva función de fluencia se suele llamar superficie de Hvorslev. Si se adopta plasticidad asociada, el resultado es una dilatación demasiado elevada, tal como ocurre en los modelos clásicos de Mohr-Coulomb o Drucker-Prager. Además, una ley de fluencia asociada implicaría una discontinuidad en el punto de estado crítico. Por estas razones, Zienkiewicz y Naylor²⁶ utilizaron una ley de fluencia no asociada en la que la dilatación crecía linealmente desde cero en el punto de estado crítico hasta un valor prefijado en $p' = 0$. Otros autores²⁷ han utilizado formulaciones similares. En relación con la superficie de Hvorslev, los autores han obtenido buenos resultados utilizando la forma de la superficie de fluencia del Cam-Clay como potencial plástico.

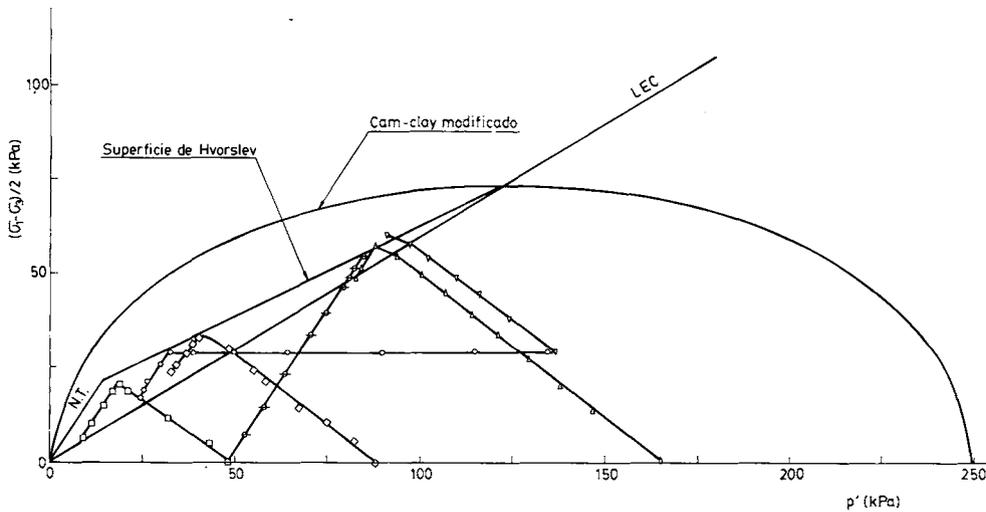


Figura 8. Comparación de la superficie de Hvorslev y el modelo Cam-Clay modificado como superficie de fluencia en el lado supercrítico para la arcilla Lower Cromer Till (según Gens²⁰).

Los modelos tipo "Cap"^{28,29} pueden considerarse, básicamente, como modelos de estado crítico con una superficie de fluencia supercrítica modificada (Figura 9b). Existe, sin embargo, una importante diferencia. La superficie de fluencia propiamente dicha se mueve de acuerdo con los cambios de deformación volumétrica plástica pero la superficie de rotura (supercrítica) es fija. Por tanto, no se predice comportamiento reblandecible. El modelo supone plasticidad asociada. Debido a su simplicidad y flexibilidad, el modelo ha sido utilizado con cierta frecuencia en análisis numéricos^{30,31,32}.

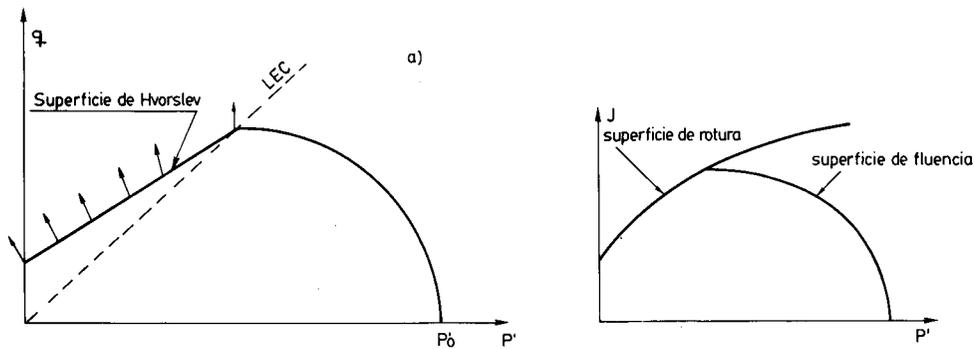


Figura 9. Modificaciones a la superficie de fluencia supercrítica. a) Superficie de Hvorslev. b) Modelo "Cap".

Aunque las modificaciones a las superficies de fluencia supercríticas son necesarias para predecir tensiones de rotura realistas en esa zona, generalmente no se implementan. Como se verá en el segundo artículo de esta serie, la mayoría de las aplicaciones numéricas de los modelos de estado crítico se refieren a materiales en el lado subcrítico y la región supercrítica se emplea en pocas ocasiones. Sin embargo, un modelo general debería incluir modificaciones del tipo descrito en este apartado para obtener predicciones realistas en todos los casos.

Superficies de fluencia para suelos consolidados en condiciones K_0

La formulación básica de los modelos Cam-Clay se basa en resultados de ensayos realizados en muestras consolidadas isotrópicamente. Sin embargo, la evidencia experimental indica^{33,34} que para arcillas consolidadas sin deformación lateral (K_0), las superficies de fluencia no están centradas en el eje $q = 0$ sino que han sufrido una rotación en el espacio de tensiones hacia la línea de consolidación K_0 . Un ejemplo se presenta en la Figura 10 donde se muestra la superficie de fluencia obtenida experimentalmente en el caso de una arcilla de baja plasticidad consolidada en condiciones K_0 . En consecuencia, existen, para suelos con este tipo de consolidación, diversas propuestas para el cambio de la superficie de fluencia clásica a otras formas aproximadamente centradas en la línea de consolidación K_0 ^{35,36}. Formulaciones utilizadas en análisis numéricos se presentan en las referencias 37, 38 y 39.

En el modelo de Sekiguchi y Ohta³⁷, se sustituye el parámetro $\eta = q/p'$ por $\eta' = q/p' - q_a/p'_a$ donde q_a y p'_a son los valores de q y p' al final de la consolidación K_0 . Esto causa una rotación de la superficie de fluencia que adopta la forma indicada en la Figura 11a. En las referencias 40 y 41 se presentan aplicaciones numéricas de este modelo. Otras aplicaciones utilizando un modelo similar han sido descritas en las Referencias 38 y 42.

Mouratidis y Magnan³⁸ han desarrollado el modelo constitutivo Mèlanie basado en el modelo conceptual YLIGHT⁴³ que a su vez está basado en un extenso trabajo experimental realizado en la Universidad de Laval en arcillas blandas canadienses. Las principales diferencias con la formulación básica de Estado Crítico son:

- la nueva superficie de fluencia está centrada en la línea de consolidación K_0 (Figura

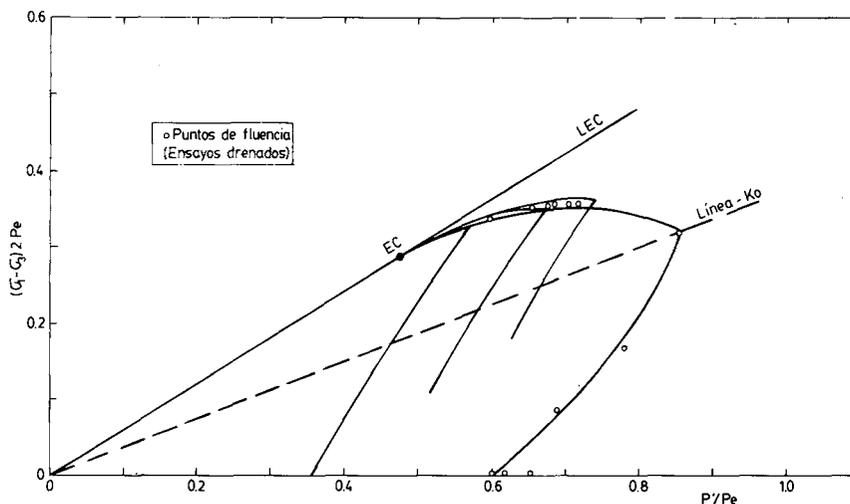


Figura 10. Superficie de fluencia para la arcilla Lower Cromer Till consolidada sin deformación lateral (según Gens²⁰).

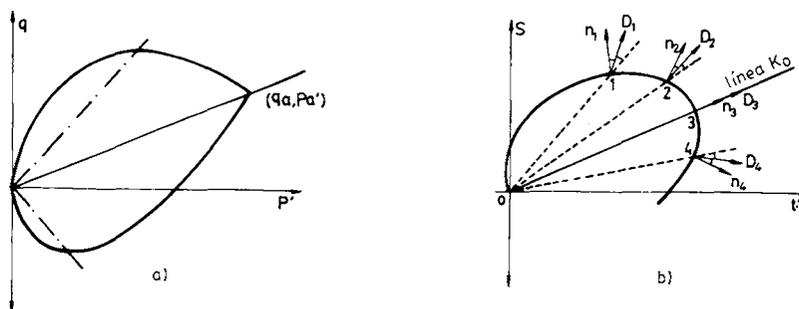


Figura 11. Superficie de fluencia para suelos consolidados en condiciones K_0 .
 a) Modelo de Sekiguchi-Ohta. b) Modelo Mèlanie ($s = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$, $t' = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}$).

11b)

- la ley de fluencia es no asociada. El vector que representa el incremento de deformación plástica es la bisectriz del ángulo que forma la normal a la superficie de fluencia y la línea $\eta = \text{constante}$.

Pueden verse ejemplos de aplicación de este modelo a problemas geotécnicos en las referencias 44, 45 y 46.

La nueva forma de la superficie de fluencia está obviamente causada por la anisotropía que se desarrolla durante la consolidación K_0 . Para que estos modelos fueran consistentes deberían incorporar el desarrollo gradual de la anisotropía con deformación plástica que da como resultado un cambio progresivo de la forma de la

superficie de fluencia (Figura 12). Aunque se han propuesto algunos modelos de este tipo^{47,48}, no parece que hayan sido utilizados todavía en análisis numéricos.

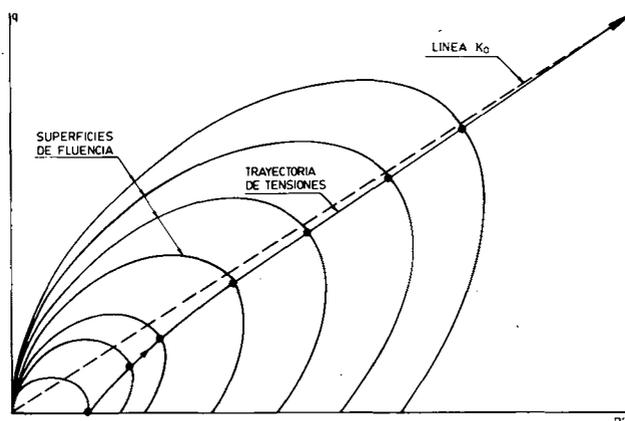


Figura 12. Cambio gradual de la forma de la superficie de fluencia desde el estado de consolidación isotrópica al estado de consolidación K_0 .

A falta de comparaciones suficientes entre esta formulación y la básica, no es fácil evaluar la necesidad de incorporar este nuevo tipo de superficies de fluencia en los modelos de estado crítico. Por una parte, estas nuevas superficies parecen representar mejor el comportamiento de muestras consolidadas en condiciones K_0 pero por otro lado los modelos Cam-Clay clásicos han dado buenos resultados modelando el comportamiento en el campo de arcillas naturales (que básicamente están consolidadas sin deformación lateral). La única comparación disponible entre los dos tipos de formulación se refiere al análisis de un terraplén sobre arcilla blanda que utilizó el modelo Cam-Clay modificado y el modelo Mèlanie⁴⁴. Los resultados no son concluyentes. El modelo Cam-Clay predice mejor los asentamientos pero da valores demasiado altos para los desplazamientos laterales. Las predicciones de presiones intersticiales son buenas para ambos modelos. Sin otras comparaciones y sin identificar con más precisión las causas de las diferencias en las predicciones, no es posible en este momento alcanzar conclusiones firmes acerca de las ventajas prácticas de adoptar los modelos descritos en este apartado.

Componente elástica del modelo

Una de las hipótesis de la formulación básica es que la deformación volumétrica elástica es

$$d\epsilon_v^e = \left(\frac{\kappa}{1+e} \right) \left(\frac{dp'}{p'} \right) \quad (6)$$

Suponiendo isotropía, esta hipótesis tiene como consecuencia un modelo elástico no lineal en el que el módulo de deformación volumétrica K es

$$K = \frac{(1 + e)p'}{\kappa} \tag{7}$$

K es, por tanto, proporcional a p' y $(1 + e)$ aunque el cambio de esta última variable es en general pequeño.

La formulación básica no imponía ninguna condición a la componente de corte del modelo elástico. Las primeras aplicaciones numéricas adoptaban un módulo de Poisson, ν , constante, lo que suponía un valor variable del módulo de deformación de corte, G

$$G = \frac{3(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)} \frac{p'(1 + e)}{\kappa} \tag{8}$$

también proporcional a p' .

Sin embargo, Zytinsky et al⁴⁹ demostraron que este modelo elástico no era conservativo y que, por tanto, se podía extraer energía del mismo para algunos tipos de ciclos de carga. En la práctica, este hecho puede no ser muy importante si sólo se considera carga monótona pero puede resultar significativo si la carga supone la aplicación de ciclos de tensiones. En consecuencia, se suele adoptar un valor constante de G para asegurar que el modelo elástico es conservativo. Sin embargo, un valor de G constante no se corresponde bien con las observaciones experimentales y puede suponer valores negativos del módulo de Poisson para valores bajos de tensiones.

Houlsby⁵⁰ ha estudiado las condiciones para las que se consigue un comportamiento conservativo en los casos en que:

- a) G es proporcional a la tensión efectiva media, p' ,
- b) G es proporcional a la presión de preconsolidación, p'_0 .

Ambas hipótesis son consistentes con la evidencia experimental disponible.

En el primer caso, un modelo conservativo es posible si se hace el módulo de deformación volumétrico ligeramente dependiente de la tensión de corte. Las líneas de razón de tensiones constantes son ahora contornos de deformación de corte constante. El segundo caso implica un acoplamiento elasto-plástico. Formulando el problema en el marco de un enfoque termomecánico de la teoría de la plasticidad⁵¹, se encuentra que la hipótesis de proporcionalidad entre G y p'_0 conduce a un ligero cambio en la forma de la superficie de fluencia.

En todo caso, estos modelos elásticos son en general demasiado simples para representar adecuadamente el comportamiento real del suelo para estados de tensiones en el interior de la superficie de fluencia. Jardine et al⁵² han mostrado la importancia de adoptar una deformabilidad variable si se desean obtener distribuciones realistas de desplazamientos. En problemas con carga monótona, puede ser conveniente adoptar un modelo elástico no lineal más complejo para representar el comportamiento del suelo dentro de la superficie de fluencia. Los autores han utilizado las relaciones empíricas propuestas en la referencia 53 basadas en resultados experimentales

$$G = p' \left(A + B \cos \left(\alpha \log \frac{E}{\sqrt{3}C} \right)^\gamma \right) \quad (9a)$$

$$K = p' \left(R + S \cos \left(\delta \log \frac{|\epsilon_v|}{T} \right)^\mu \right) \quad (9b)$$

donde $A, B, C, R, S, T, \alpha, \gamma, \delta$ y ν son constantes. E es el segundo invariante del tensor desviador de deformaciones y ϵ_v la deformación volumétrica. Se puede reemplazar p' por c_u si se desea.

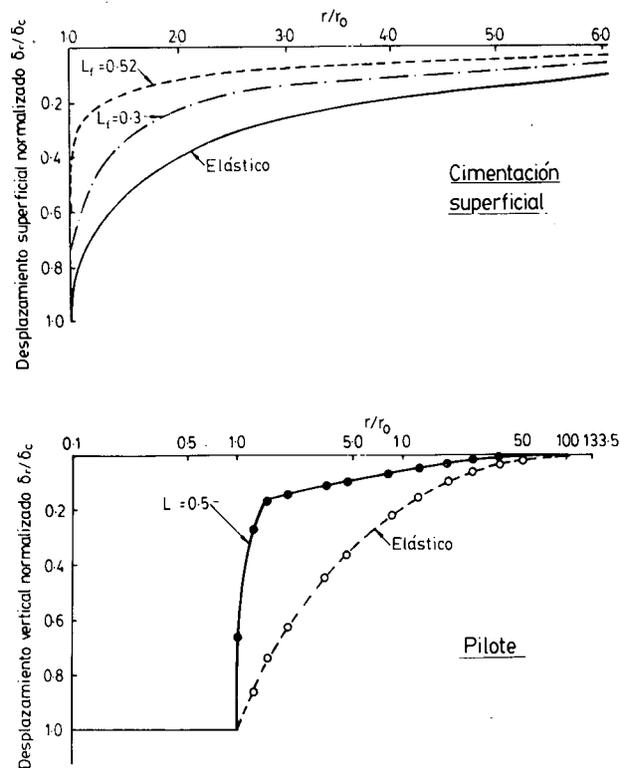


Figura 13. Perfiles de asentamientos calculados con distintos modelos elásticos (según Jardine et al⁵²).

Las consecuencias de utilizar este modelo elástico no lineal se muestran en la Figura 13 donde se representan los perfiles de asentamientos para una cimentación superficial y una cimentación profunda. Se puede observar que la cubeta de asentamientos tiene una variación lateral mucho más abrupta en el caso de utilizar el modelo elástico fuertemente no lineal definido por las ecuaciones (9).

Es importante señalar que la relación única estado crítico-índice de huecos desaparece si el modelo elástico no incluye la expresión (6) para el cálculo de deformaciones volumétricas elásticas.

Comportamiento plástico en el interior de la superficie de fluencia principal

Como se ha indicado anteriormente, un simple modelo elástico no es en general suficiente para predecir satisfactoriamente el comportamiento del suelo en el interior de la superficie de fluencia. Esto es particularmente importante cuando se consideran los efectos de la carga cíclica puesto que es necesario modelar un comportamiento irreversible y acumulativo si se desean obtener predicciones realistas. Para conseguirlo se han propuesto un gran número de modelos que usan distintas formas de la teoría de la plasticidad (por ejemplo plasticidad multi-superficie, plasticidad de dos superficies, plasticidad con superficie límite, plasticidad generalizada^{54,55,56,57}). Ahora, la formulación básica tiene un papel secundario, proporcionando simplemente un marco general en el que se insertan los distintos modelos. Por ello, sólo se presentará un breve resumen de este amplio tema.

Las formulaciones que se utilizan en análisis numéricos pueden dividirse en dos grupos:

- a) Modelos en los que los efectos de la carga cíclica se describen mediante una formulación separada que se añade a un modelo clásico convencional^{58,59}.
- b) Modelos completos en los que los efectos de la carga cíclica son el resultado de la formulación misma del modelo^{55,60,61,62,63}.

La distinción es importante de cara a las aplicaciones numéricas. El segundo tipo de modelos puede describir más exactamente el comportamiento real del suelo ciclo a ciclo, incluyendo los efectos de histéresis. Sin embargo, pueden ser muy costosos de utilizar especialmente en análisis que incluyen un gran número de ciclos como en el caso de la tormenta de diseño para estructuras situadas en alta mar.

Los modelos de tipo a) utilizan generalmente un parámetro de "fatiga" o endocrónico que representa una medida del efecto acumulado de la aplicación de cargas cíclicas. Van Eekelen y Potts⁵⁸ adoptan la presión intersticial generada por la carga cíclica como parámetro de fatiga. Su incremento en cada ciclo depende de la amplitud normalizada del ciclo de tensión. La parte estática del modelo es una formulación de estado crítico denominada Drammen clay que incluye fluencia en el interior de la superficie de fluencia principal. En la referencia 64 se presenta una aplicación del modelo al caso de una estructura de gravedad sometida a una tormenta de diseño de más de 3500 ciclos. Zienkiewicz et al⁵⁹ utilizaron la deformación volumétrica como parámetro de fatiga cuyo incremento dependía de la longitud total del camino de deformaciones desviadoras. Este modelo de densificación, acoplado a una formulación clásica de estado crítico, ha sido aplicada al análisis de un estrato de arena saturada sometida a una acción sísmica horizontal⁶⁵. El mismo problema ha sido utilizado⁶⁶ para comparar los resultados del modelo de densificación con los de otras dos leyes constitutivas del tipo b)^{55,61}. El incremento de presión intersticial es distinto según el tipo de modelo; el incremento más rápido corresponde al modelo de "densificación".

Un desarrollo reciente ha sido la introducción de la formulación de la plasticidad generalizada⁶⁷ en la formulación de estado crítico^{62,63}, obteniéndose como resultado un modelo relativamente simple con una buena capacidad de predicción. Un modelo

similar (basado en el concepto de superficie reflejante) se describe en la referencia 68. De nuevo el caso unidimensional de un estrato de arena saturada ha sido utilizado para comparar estos modelos con el de "densificación"^{63,68}. Como puede observarse en la Figura 14 todos los modelos son capaces de predecir licuefacción. De nuevo el modelo de "densificación" predice el aumento más rápido de presiones intersticiales.

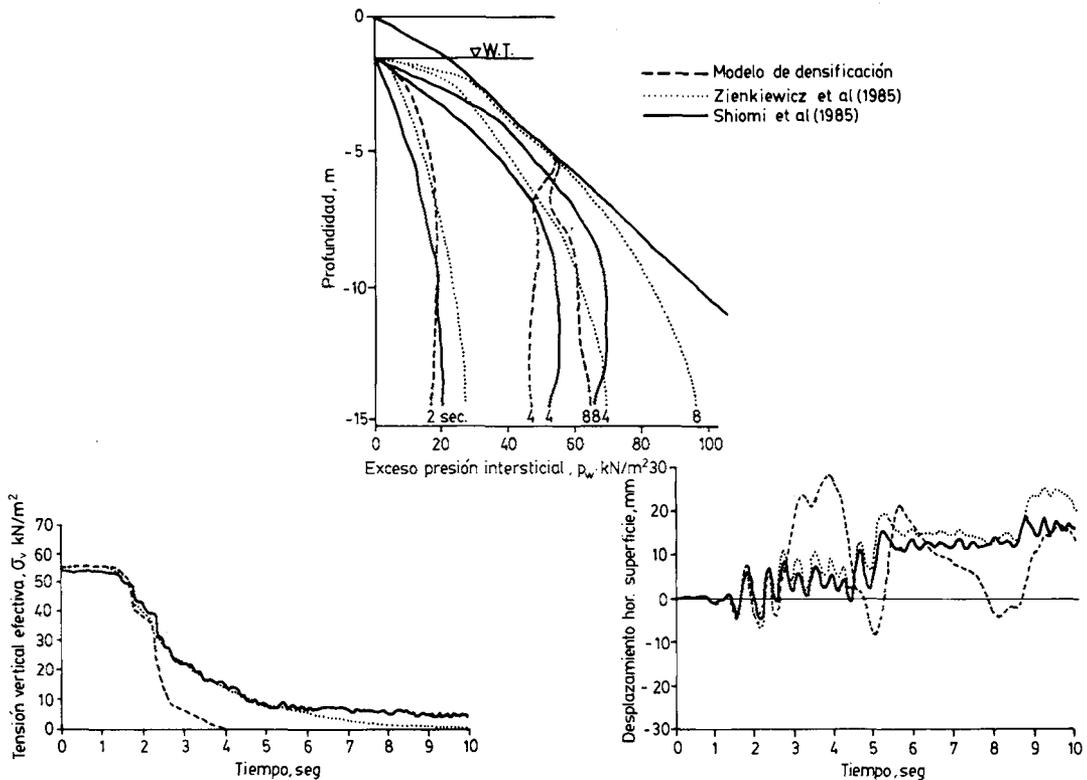


Figura 14. Comparación entre los modelos de densificación⁶⁹, de Zienkiewicz et al⁶² y de Shiomi et al⁶⁸ para el caso de un estrato de arena sometido a una acción sísmica horizontal (según Shiomi et al⁶⁸).

Recientemente el modelo de plasticidad generalizada ha sido aplicado al análisis de modelos bidimensionales de terraplenes ensayados en el aparato centrífugo con buenos ajustes entre predicciones y observaciones⁶⁹. El modelo tipo b) de Prevost⁶⁰ ha sido utilizado en el cálculo de la respuesta de la cimentación de una estructura marina sometida a un número limitado de ciclos de oleaje⁷⁰. Puede observarse, por tanto, que se está iniciando la aplicación de los modelos completos de tipo b) al análisis numérico de estructuras reales. Esto es una consecuencia de la aparición de formulaciones más simples de modelos completos y del aumento continuado en la potencia de cálculo de los ordenadores.

Aunque la principal motivación en el desarrollo de estos modelos ha sido la modelización del comportamiento dinámico de los suelos, pueden ser también aplicados

a problemas estáticos. Un ejemplo es el uso del modelo de Prevost en el análisis de la excavación de un túnel con escudo en suelos blandos^{71,72}. En dicho análisis se efectúa una interesante comparación entre los resultados de este modelo y los obtenidos utilizando el modelo Cam-Clay modificado convencional. Ambos modelos proporcionaron básicamente predicciones similares, quizás marginalmente mejores para el modelo de Prevost; lo que puede ser debido al proceso de carga/descarga que supone el proceso de avance de un escudo.

Algunas formulaciones que postulan comportamiento plástico dentro de la superficie de fluencia principal han tenido como objetivo principal mejorar la fiabilidad numérica de las aplicaciones computacionales. Por ejemplo, Naylor⁷³ propuso una modificación de los modelos clásicos que combinaba las hipótesis de la plasticidad de superficie límite con un modelo elastoplástico de material compuesto formulado en paralelo. Como consecuencia, la transición elasto-plástica es más suave, se mejora la fiabilidad numérica y se consigue una mejor modelización del comportamiento del suelo. La formulación tiene la interesante propiedad que, en el lado supercrítico, se alcanza rotura antes de alcanzar la superficie de fluencia principal. La introducción de una superficie de Hvorslev se hace por tanto menos necesaria.

Formulación en el plano desviador

La formulación de estado crítico original se basó, de forma casi exclusiva, en resultados de ensayos triaxiales convencionales. Las zonas de espacio de tensiones en los que estos ensayos operan son muy limitadas ya que la tensión principal intermedia debe ser igual o a la tensión principal mayor o a la tensión principal menor. Por tanto, la formulación básica se desarrolló en términos de q y p' . Sin embargo, para ser utilizados en análisis numéricos los modelos deben generalizarse por lo menos a tres dimensiones, postulando alguna hipótesis sobre la forma de la superficie de fluencia y el potencial plástico en el plano desviador.

La primera generalización¹⁰ se efectuó simplemente reemplazando q por J (segundo invariante del tensor desviador de tensiones, s). Esto es equivalente a suponer que el potencial plástico y la superficie de fluencia (y, por tanto, la superficie de rotura) son círculos en el plano desviador (Figura 15). Sin embargo, es bien sabido que un criterio tipo Von-Mises no representa bien las condiciones de rotura para suelos en los que un criterio del tipo de Mohr-Coulomb es más apropiado. Roscoe y Burland¹⁰ sugirieron que las superficies circulares de fluencia fueran usadas en conjunción con el criterio de rotura de Mohr-Coulomb. Esto implica, sin embargo, que las condiciones de estado crítico sólo pueden alcanzarse bajo condiciones de compresión triaxial ($\sigma_2 = \sigma_3$). Zienkiewicz y Naylor²⁶ propusieron la siguiente variación de M con θ

$$M = \frac{3 \operatorname{sen} \phi'}{\sqrt{3} \cos \theta - \operatorname{sen} \phi'} \tag{10}$$

donde ϕ' es el ángulo de fricción y θ el ángulo de Lode

$$\theta = -\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(1.5 \sqrt{3} \frac{\det s}{J^3} \right)$$

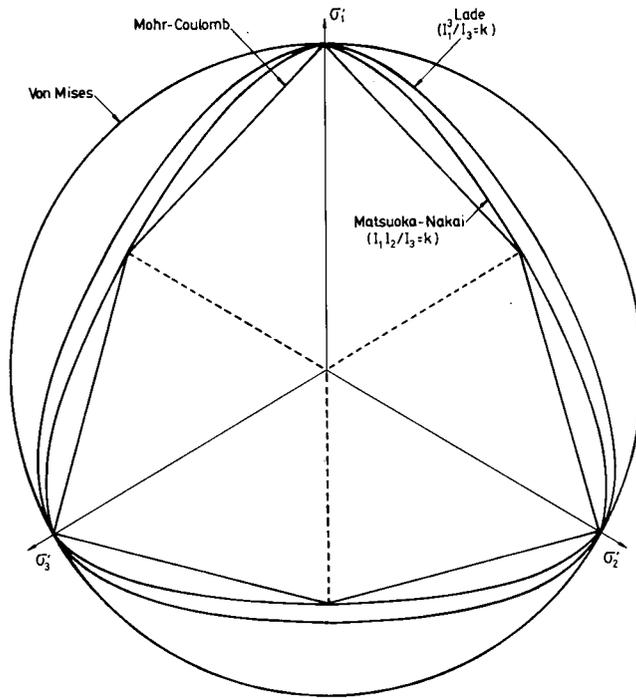


Figura 15. Superficie de rotura en el plano desviador

La expresión (10) es de hecho el criterio de Mohr-Coulomb formulado en el plano desviador (Figura 15). La discontinuidad de la expresión (10) para $\theta = \pm 30^\circ$ requiere, generalmente, un redondeo "ad hoc" de las esquinas.

Aunque es suficiente para una primera aproximación, el criterio de Mohr-Coulomb no se ajusta perfectamente a las condiciones observadas de rotura en suelos. En consecuencia, se han sugerido otras formas de superficie que son continuas y muestran un mejor acuerdo con los resultados experimentales. Las debidas a Lade⁷⁴ y a Matsuoka y Nakai⁷⁵ son las más conocidas (Figura 15). Randolph⁷⁶ efectuó la interesante sugerencia de que el valor de k en las expresiones de Lade y de Matsuoka y Nakai fuera variable y dependiera del ángulo de rozamiento movilizado en cada instante. De esta forma, la superficie de fluencia cambia gradualmente de una forma casi circular para valores de J cercanos a 0 a la forma deseada de superficie de rotura. Esta variación progresiva de forma se corresponde bien al comportamiento observado del suelo.

Van Eekelen⁷⁷ propuso una familia de superficies de fluencia (o potenciales plásticos) continuas en el plano desviador que son muy apropiadas para la generalización de modelos bidimensionales. Esta familia puede expresarse como

$$G(\theta) = X (1 + Y \sin 3\theta)^{-Z} \quad (11)$$

donde X , Y y Z son constantes. Existen limitaciones para los valores de Y y Z si se desean superficies conexas. Un método simple de incorporar la forma deseada para la superficie de fluencia o el potencial plástico consiste en sustituir el parámetro M de la formulación básica por $G(\theta)$. Las formas de las superficies de Von Mises, de Lade y de

Matsuoka y Nakai se pueden aproximar bien utilizando la ecuación (11).

La importancia de la formulación del modelo en el plano desviador ha sido estudiada por Potts y Gens⁷⁸ que demostraron que la forma del potencial plástico $G_p(\theta)$ y el ángulo de dilatancia ψ determina el valor del ángulo de Lode en rotura, θ_f , en problemas de deformación plana. La expresión que relaciona θ_f con ψ es

$$-\frac{\text{sen}\psi}{\sqrt{3}} = \frac{G'_p(\theta_f) \cos\theta_f - G_p(\theta_f) \text{sen}\theta_f}{G'_p(\theta_f) \text{sen}\theta_f + G_p(\theta_f) \cos\theta_f} \quad (12)$$

Para estudiar el efecto de variar el ángulo θ en rotura se utilizaron dos casos distintos:

- (a) Resistencia de fuste de un pilote rígido infinitamente largo (Figura 16).

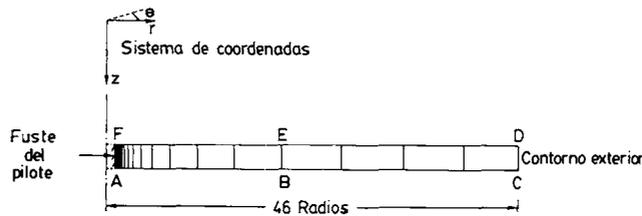


Figura 16. Malla de elementos finitos para el análisis de la resistencia de fuste de un pilote.

- (b) Cimentación rígida en faja bajo carga vertical (Figura 17)

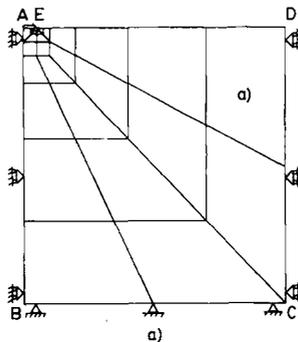


Figura 17. Malla de elementos finitos para el análisis de una cimentación en faja.

El primer problema está muy determinado cinemáticamente lo que lo hace muy útil como ejemplo de prueba para la comprobación de la implementación de nuevas características del modelo o de nuevos algoritmos numéricos. El segundo caso tiene un grado de determinación cinemática mucho menor y se utiliza para ampliar la gama de problemas estudiados.

Para los análisis, se adoptó el modelo Cam-clay modificado convencional. Se supuso que el suelo estaba normalmente consolidado con un valor de K_0 inicial $(\sigma'_3/\sigma'_1) = 0.7$.

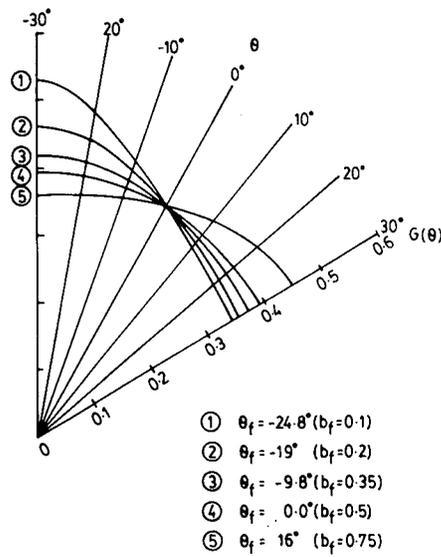


Figura 18. Potenciales plásticos en el plano desviador.

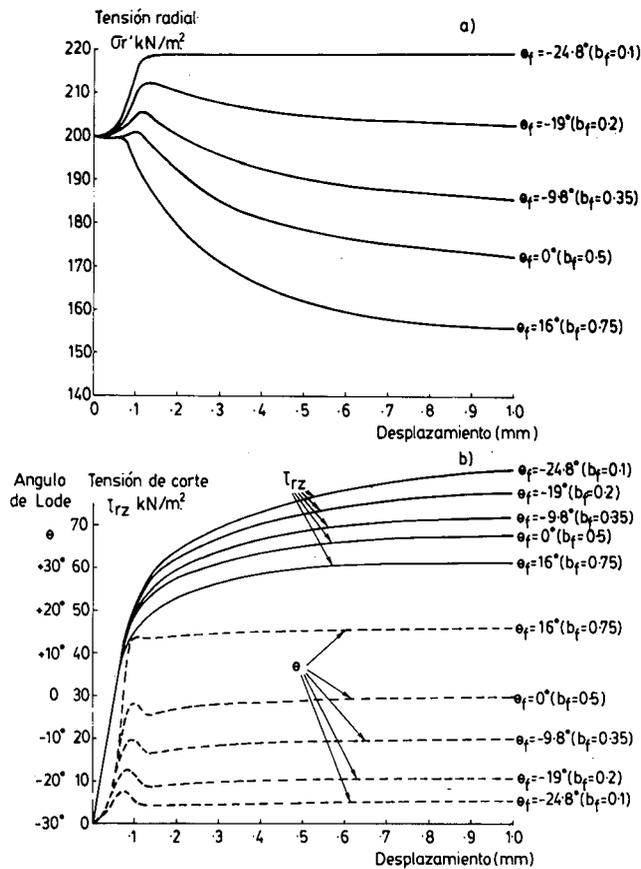


Figura 19. a) Variación de la tensión radial del suelo adyacente al fuste con el desplazamiento del pilote. b) Variación de la tensión de corte y ángulo de Lode del suelo adyacente al fuste con el desplazamiento del pilote.

Para obtener un rango amplio de valores de ángulo de Lode en rotura, θ_f , se utilizaron distintas formas del potencial plástico en el plano desviador (Figura 18). La Figura 19 muestra las variaciones de la tensión radial, la tensión de corte y el ángulo de Lode en el material adyacente al pilote que se obtuvieron en un análisis drenado. Los resultados muestran grandes diferencias que dependen del valor de θ_f . Las diferencias disminuyen pero son todavía significativas en el caso de una carga vertical drenada en faja (Figura 20).

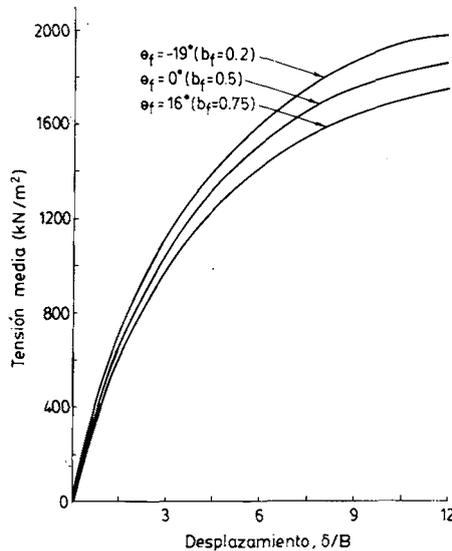


Figura 20. Variación de la tensión vertical media con el desplazamiento de la cimentación.

El factor determinante de las diferencias observadas es el valor de θ en rotura. Como se puede observar en la Figura 21, la variación de la forma de la superficie de fluencia y del potencial plástico tiene sólo un efecto marginal si el valor de θ_f se mantiene fijo. Es importante señalar que en los análisis sin drenaje el valor de θ_f no influye en los resultados siempre que se utilice el mismo valor de resistencia al corte sin drenaje para todos los valores de θ_f . Es probable que en análisis tridimensionales y axisimétricos, en los que el valor de θ_f no es fijado por las condiciones de contorno, el efecto del ángulo de Lode en rotura sea menor. Sin embargo, el potencial plástico utilizado debería garantizar un valor realista de θ en rotura, por lo menos en problemas de deformación plana. Algunos de los potenciales plásticos propuestos en la literatura no cumplen esta condición.

OBSERVACIONES FINALES

En este artículo se ha pasado revista al desarrollo histórico de los modelos de estado crítico. Las formulaciones básicas (modelos Cam-Clay) abrieron la posibilidad de utilización de modelos elasto-plásticos como leyes constitutivas capaces de representar de forma adecuada muchas de las características básicas del comportamiento mecánico de los suelos.

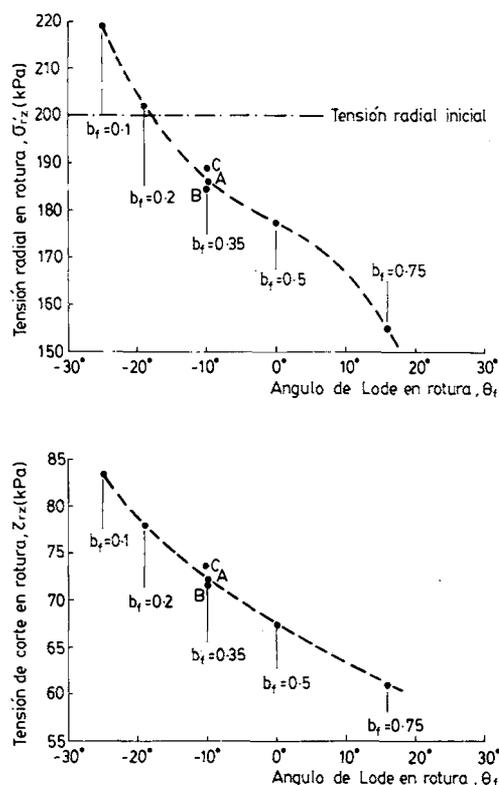


Figura 21. Variación de la tensión radial y la tensión de corte en rotura con el ángulo de Lode en rotura. A: análisis estándar. B: análisis con una forma alternativa del potencial elástico. C: análisis con una forma alternativa de la superficie de fluencia.

La necesidad de conseguir un mejor ajuste cuantitativo entre predicciones y observaciones ha conducido a un gran número de modificaciones de esta formulación básica. Las modificaciones más directamente relacionadas con aplicaciones numéricas han sido descritas y discutidas en este artículo de forma necesariamente breve. En concreto, se ha prestado atención preferente a los temas de la superficie de fluencia en el lado supercrítico, la superficie de fluencia para muestras consolidadas en condiciones K_0 , las formulaciones elástica y plástica en el interior de la superficie de fluencia principal y la generalización a tres dimensiones a través de la formulación en el plano desviador.

La aplicación de estos modelos al análisis de estructuras geotécnicas reales requiere una implementación numérica que será el tema del próximo artículo de esta serie.

REFERENCIAS

1. C.A. Coulomb, "Essai sur une application des règles de maxims et minims à l'architecture", *Mém. Acad. R. Sci.*, Vol. 7, pp. 343-382, (1776).
2. W.J.M. Rankine, "On the stability of loose earth", *Phil. Trans. R. Soc.*, Vol. 147, pp. 9-27, (1857).

3. D.C. Drucker y W. Prager, "Soil mechanics and plastic analysis of limit design", *Q. Appl. Math.*, Vol. 10, pp. 157-164, (1952).
4. D.C. Drucker, "Limit analysis of two and three-dimensional soil mechanics problems", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 1, pp. 217-226, (1953).
4. D.C. Drucker, R.E. Gibson y D.J. Henkel, "Soil mechanics and work hardening theories of plasticity", *Trans. ASCE*, Vol. 122, pp. 338-346, (1957).
6. K.H. Roscoe, A.N. Schofield y C.P. Wroth, "On the yielding of soils", *Géotechnique*, Vol. 8, pp. 22-52, (1958).
7. C.R. Calladine, "Correspondence", *Géotechnique*, Vol. 13, pp. 250-255, (1963).
8. K.H. Roscoe y A.N. Schofield, "Mechanical behaviour of an idealised 'wet' clay", *Proc. 2nd Eur. Conf. SMFE*, Vol. 1, pp. 47-54, Wiesbaden, (1963).
9. A.N. Schofield y C.P. Wroth, *Critical State Soil Mechanics*, McGraw-Hill, London, (1968).
10. K.H. Roscoe y J.B. Burland, "On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay", *Engineering Plasticity*, Cambridge Univ. Press, (1968).
11. I.M. Smith, "Incremental numerical analysis of a simple deformation problem in Soil Mechanics", *Géotechnique*, Vol. 20, pp. 357-372, (1970).
12. D.J. Naylor, "Non-linear finite elements for soils", *Ph. D. Thesis*, University of Swansea, (1975).
13. B. Simpson, "Finite element computations in soil mechanics", *Ph. D. Thesis*, University of Cambridge, (1973).
14. L. Rendulic, "Relation between void ratio and effective principal stress for a remoulded silty clay", *Proc. 1st Int. Conf. SMFE*, Vol. 3, pp. 48-51, Harvard, (1936).
15. D.J. Henkel, "The relationships between the effective stresses and water content in saturated clays", *Géotechnique*, Vol. 10, (1960).
16. A.S. Balasubramaniam. "A critical study of the uniqueness of state boundary surface for saturated specimens of kaolin", *Geotechnical Eng.*, Vol. 5, pp. 21-38, (1974).
17. P.I. Lewin y J.B. Burland, "Stress probe experiments on saturated normally consolidated clay", *Géotechnique*, Vol. 22, pp. 301-317, (1970).
18. A. Gens, "A state boundary surface for soils not obeying Rensulic's Principle", *Proc. 11th Int. Conf. SMFE*, Vol. 2, pp. 473-476, San Francisco, (1985).
19. T. Mitachi y S. Kitago, "The influence of stress history and stress system on the stress-strain-strength properties of saturated clay", *Soils and Foundations*, Vol. 20, pp. 13-28, (1979).
20. A. Gens, "Stress-strain and strength characteristics of a low plasticity clay", *Ph. D. Thesis*, University of London, (1982).
21. C.P. Wroth y G.T. Houlby, "A critical state model for predicting the behaviour of clays", *Proc. Workshop on Limit Eq., Plasticity and Gen. stress-strain in Geot. Eng.*, pp. 592-627, Montreal, (1980).
22. G.T. Houlby, C.P. Wroth y D.M. Wood, "Predictions of the results of laboratory tests on a clay using a critical state model", *Proc. Int. Workshop on Const. Beh. of Soils*, pp. 99-121, Grenoble, (1982).
23. C.P. Wroth y G.T. Houlby, "Soil mechanics-Property characterization and analysis procedures", *Proc. 11th Int. Conf. SMFE*, Vol. 1, pp. 1-55, San Francisco, (1985).
24. "ISSMFE Subcommittee on constitutive laws of soils-Constitutive laws of soils", Ed. Muruyama, S., Jap., Soc. SMFE, (1985).
25. M.J. Hvorslev, "*Über die Festigkeitseigenschaften Gestörter Bindiger Böden*", Kopenhagen, (1937).

26. O.C. Zienkiewicz y D.J. Naylor, "Finite element studies of soils and porous media", *Lectures on finite elements in continuum mechanics*, Ed. Oden, J.T. and de Arantes, E.R., UAH Press, pp. 459-493, (1973).
27. T. Tanaka, M. Yanasuka y Y.S. Tani, "Seismic response and liquefaction of embankments-numerical solution and shaking table tests", *2nd Int. Symp. on Num. Mod. in Geom.*, Ghent, pp. 679-688, (1986).
28. F.L. Di Maggio y I.S. Sandler, "Material model for granular soils", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. 97, pp. 935-950, (1971).
29. I.S. Sandler, F.L. Di Maggio y G.Y. Baladi, "Generalized cap model for geologic materials", *J. Geotech. Eng. Div.*, ASCE, Vol. 102, pp. 683-697, (1986).
30. I.S. Sandler y D. Rubin, "An algorithm and a modular subroutine for the cap model", *Int. J. Numer. and Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 3, pp. 173-186, (1979).
31. W.F. Chen y G.Y. Baladi, *Soil plasticity*, Elsevier ASP, Amsterdam, (1985).
32. R.P. Daddazio, M.M. Ettourney y I.S. Sandler, "Nonlinear dynamic slope stability analysis", *J. Geotech. Engng.*, ASCE, Vol. 113, pp. 285-298, (1987).
33. R.H.G. Parry y V. Nadarajah, "A volumetric yield locus for lightly overconsolidated clay", *Géotechnique*, Vol. 23, pp. 450-453, (1973).
34. F. Taveñas y S. Leroeuil, "Effect of stresses and time on yielding of clays", *Proc. 9th Int. Conf. SMFE*, Vol. 1, pp. 319-326, Tokyo, (1977).
35. H. Ohta y C.P. Wroth, "Anisotropy and stress reorientation in clay under load", *Proc. 2nd Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, Blacksburg, Vol. 1, pp. 319-328, (1976).
36. M. Kavvas y M.M. Baligh, "Non linear consolidation analyses around pile shafts", *Proc. 3rd Int. Conf. Beh. Off-shore Struct*, Vol. 2, pp. 338-347, (1982).
37. H. Sekiguchi y H. Ohta, "Induced anisotropy and time dependency in clays", *Proc. 9th Int. Conf. SMFE, Spec, Session 9*, pp. 163-175, Tokyo, (1977).
38. T. Matsui y N. Abe, "Multi-dimensional elasto-plastic consolidation analysis by finite element method", *Soils and Foundations*, Vol. 21, pp. 75-95, (1981).
39. A. Mouratidis y J.P. Magnan, "Un modèle élastoplastique anisotrope avec écrouissage pour les argilles molles naturelles: Melanie", *Revue Francaise de Géotechnique*, Vol. 25, pp. 55-62, (1983).
40. S. Hata, H. Ohata, S. Yoshida, H. Kitamura y H. Honda, "A deep excavation in soft clay. Performance of an anchored diaphragm wall", *Proc. 5th Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, Vol. 2, pp. 725-730, Nagoya, (1985).
41. H. Ohta, H. Kitamura, M. Itoh y M. Katsumata, "Ground movement due to advance of two shield tunnels parallel in vertical plane", *Proc. 5th Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, Vol. 2, pp. 1161-1166, Nagoya, (1985).
42. T. Matsui y N. Abe, "Multi-dimensional consolidation analysis of soft clay", *Proc. 4th Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, Vol. 1, pp. 337-347, Edmonton, (1982).
43. F. Tavenas, "Some aspects of clay behaviour and their consequences on modelling techniques", *ASME STP*, no. 740, pp. 667-677, (1981).
44. J.P. Magnan, A. Belkeziz, P. Humbertt y A. Mouradatis, "Finite element analysis of soil consolidation with special reference to the case of strain hardening elastoplastic stress-strain models", *Proc. 4th Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, Vol. 1, pp. 327-336, Edmonton, (1982).
45. J.P. Magnan, P. Humbertt y A. Mouradatis, "Finite element analysis of soil deformations with time under an experimental embankment failure", *Proc. Int. Symp. Num. Mod. Geomech.*, pp. 601-608, Zurich, (1982).
46. J.P. Magnan y M.Z. Babchia, "Analyse numérique des massifs d'argiles molles", *Proc. 11th*

- Int. Conf. SMFE*, Vol. 2, pp. 781-784, San Francisco, (1985).
47. K. Hashigushi, "An expression of anisotropy in a plastic constitutive equation of soils", *Proc. 9th Int. Conf. SMFE*, Specialty Session 9, pp. 302-305, Tokyo, (1977).
 48. P.K. Banerjee, A.S. Stipho y N.B. Yousif, "A theoretical and experimental investigation of the behaviour of anisotropically consolidated clay", *Developments in Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Ed. Banerjee, P.K. and R. Butterfield, Elsevier ASP, Vol. 2. pp. 1-41, (1985).
 49. M. Zytinsky, M.F. Randolph, R. Nova y C.P. Wroth, "On modelling the unloading-reloading behaviour of soils", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 2, pp. 87-93, (1985).
 50. G.T. Houlsby, "The use of a variable shear modulus in elasticplastic models for clays", *Computers and Geotechnics*, Vol. 1, pp. 3-13, (1985).
 51. G.T. Houlsby, "A derivations of the small-strain theory of plasticity from thermomechanics", *Proc. Int. Conf. on Deform. and Flow of granular MAT.*, delft, pp. 109-118, (1982).
 52. R.J. Jardine, D.M. Potts, A.B. Fourie y J.B. Burland, "Studies of the influence of non-linear stress-strain characteristics in soil-structure interaction", *Géotechnique*, Vol. 36, pp. 377-396, (1986).
 53. R.J. Jardine, M.J. Symes y J.B. Burland, "The measurement of soil stiffness in the triaxial apparatus", *Géotechnique*, Vol. 34, pp. 323-340, (1984).
 54. Z. Mroz, V. Morris y O.C. Zienkiewicz, "An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 2, pp. 203-221, (1978).
 55. J.F. Dafalias y L.R. Herrmann, "Bounding surface formulation of soil plasticity", *Soil-Mechanics-Transient and Cyclic loads*, Ed. G. Pande and O.C. Zienkiewicz, O.C. Wiley, pp. 253-282, Chichester, (1982).
 56. G.N. Pande y St. Pietruszczak, "Reflecting surface model for soils", *Proc. Int. Symp. Num. Mod. Geomech.*, pp. 54-64, Zurich, (1982).
 57. R. Nova y T. Hueckel, "A unified approach to the modelling of liquefaction and cyclic mobility of sands", *Soils and Foundations*, Vol. 21, pp. 13-28, (1981).
 58. H.A.M. Van Eekelen y D.M. Potts, "The behaviour of Drammen clay under cyclic loading", *Géotechnique*, Vol. 28, pp. 173-196, (1978).
 59. O.C. Zienkiewicz, C.T. Chang y E. Hinton, "Nonlinear seismic response and liquefaction", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 2, pp. 381-404, (1978).
 60. J.H. Prevost, "Plasticity theory for soil stress-strain behaviour", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. 104, pp. 1177-1194, (1978).
 61. J.P. Carter, J.R. Booker y C.P. Wroth, "A Critical State Model for Cyclic loading"; *Soil-Mechanics-Transient and Cyclic Loads*, Ed. G.N. Pande and O.C. Zienkiewicz, Wiley, pp. 219-252, Chichester, (1982).
 62. O.C. Zienkiewicz, K.H. Leung y M. Pastor, "Simple model for transient soil loading in earthquake analysis. I. Basic model and its application", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 9, pp. 453-476, (1985).
 63. M. Pastor, O.C. Zienkiewicz y K.H. Leung, "Simple model for transient soil loading in earthquake analysis. II. Non- associative models for sands", *Int. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 9, pp. 477-498, (1985).
 64. D.M. Potts, "Behaviour of clay during cyclic loading", *Developments in Soil Mechanics and foundation Engineering*, Ed. P.K. Banerjee and R. Butterfield, Elsevier ASP, Vol.2, pp. 105-138, London, (1985).

65. O.C. Zienkiewicz, K.H. Leung, E. Hinton y C.T. Chang, "Earth dam analysis for earthquakes: numerical solutions and constitutive relations for nonlinear (damage) analysis", *Dams and earthquakes*, T. Telford Ltd., London, pp. 179-194, (1981).
66. O.C. Zienkiewicz, K.H. Leung y E. Hinton, "Earthquake response behaviour of soils with drainage", *Proc. 4th Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, Edmonton, **3**, pp. 983-1002, (1982).
67. O.C. Zienkiewicz y Z. Mroz, "Generalized plasticity formulation and applications to geomechanics", *Mechanics of engineering materials* (C.S. Desai y R.H. Gallagher, ed.), Wiley, Chichester, pp. 655-679, (1984).
68. T. Shiomi, S. Yamamoto y T. Matsumoto, "Application of numerical method on liquefaction problems", *Proc. 5th Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, Nagoya, **3**, pp. 1393-1400, (1985).
69. O.C. Zienkiewicz, A.H.C. Chen, D.K. Paul, M. Pastor y T. Shiomi, "Computational modelling for soil-pore-fluid interaction in dynamic or static environment", *Symp. on Centrifuge Dynamic model test data and the evaluation of numerical modelling*, Cambridge, (1987).
70. J.H. Prevost y T.J.R. Hugues, "Analysis of gravity Off-shore structures formulations subjected to cyclic wave loading", *Proc. 10th OTC Conf.*, Houston, **1**, pp. 1809, (1978).
71. G.W. Clough, B.P. Sweeney y R.J. Finno, "Measured soil response to EPB shield tunnelling", *Jour. Geotech. Div.*, ASCE, **109**, pp. 131-149, (1983).
72. G.W. Clough, T. Shirasuna y R.J. Finno, "Finite element analysis of advanced shield tunnelling in soils", *Proc. 5th Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, Nagoya, **2**, pp. 1167-1174, (1985).
73. D.J. Naylor, "A continuous plasticity version of the critical state model", *Int. J. for Num. Meth. Eng.*, Vol. **21**, pp. 1187-1204, (1985).
74. P.V. Lade y J.M. Duncan, "Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil", *Jour. Geot. Eng. Div.*, ASCE, **101**, pp. 1037-1053, (1975).
75. H. Matsuoka y T. Nakai, "Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses", *Proc. JSCE*, **232**, pp. 59-70, (1974).
76. M.F. Randolph, "Generalising the Cam-clay models", *Workshop on Implementation of Critical State Soil Mechanics in Finite Element Comp.*, Cambridge, (1982).
77. H.A.M. Van Eekelen, "Isotropic yield surfaces in three dimensions for use in soil mechanics", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. **4**, pp. 89-101, (1980).
78. D.M. Potts y A. Gens, "The effect of the plastic potential in boundary value problems involving plane strain deformation", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. **8**, pp. 259-286, (1984).