

## COMPARACIÓN DE ALGUNOS ESQUEMAS DE VOLÚMENES FINITOS Y DE ELEMENTOS FINITOS

JOSÉ MANUEL PÉREZ GONZÁLEZ\*  
ALFREDO LÓPEZ BENITO\*\*  
ARTURO HIDALGO LÓPEZ\*\*  
y  
CARLOS CONDE LÁZARO\*\*\*

\* *Universidad Politécnica de Madrid*  
*Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes*  
*Unidad Docente de Matemáticas*  
*28040 Madrid, España*  
*E-mail: jmperez@montes.upm.es*

\*\* *Universidad Politécnica de Madrid*  
*Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas*  
*Dpto Matemática Aplicada y Métodos Informáticos*  
*28003 Madrid, España*  
*Tel: + 34-91-336 6973, Fax: + 34-91-336 7051*  
*E-mail: alopez@dmami.upm.es*

\*\*\* *Universidad Rey Juan Carlos*  
*Escuela Superior de Ciencias Experimentales y Tecnología*  
*Móstoles, Madrid, España*  
*E-mail: cconde@escet.urjc.es*

### RESUMEN

En este trabajo se comparan dos esquemas numéricos aplicados a la ecuación general del transporte.

Se presenta un esquema lineal de Volúmenes Finitos con función de control lineal a trozos, acoplado con una  $\theta$ -discretización temporal, y mediante un análisis de Fourier se analiza la estabilidad del esquema para las distintas frecuencias.

Se concluye que para ciertos valores de  $\theta$ , el dominio de estabilidad en un plano Peclet-Courant es más amplio que el correspondiente de Elementos Finitos lineales y que existen zonas del plano Peclet-Courant en las que Volúmenes Finitos tiene un mejor comportamiento.

Para ambos tipos de esquemas se evalúa sobre ejemplos modelo la norma infinito, la norma 2 relativa y la norma 1 relativa del vector diferencia entre la solución exacta y la solución aproximada en la aplicación de cada esquema a la resolución de dichos ejemplos que poseen solución analítica conocida.

Recibido: Mayo 1996

## A COMPARISON BETWEEN FINITE VOLUMES SCHEMES AND FINITE ELEMENTS SCHEMES

### SUMMARY

This work is focused on the comparison of two numerical schemes for the resolution of the transport general equation.

A Finite Volume linear scheme, coupled with a time  $\theta$ -discretization is shown, which control function is a spline linear. The stability of the scheme for different frequencies is analysed by means of the Fourier method.

It can be concluded that, for certain  $\theta$  values, the stability domain in a Peclet-Courant plane is broader than that of the linear Finite Element scheme. Moreover, there are some areas in the Peclet-Courant plane in which the Finite Volume scheme has a better behaviour.

The infinity-norm, the relative 2-norm and the relative 1-norm of the difference vector between the exact and the approximate solution are evaluated, according to both schemes, in master examples resolution, which analytical solution is known.

### INTRODUCCIÓN

Este trabajo se desarrolla a partir de la comparación que se efectúa en el trabajo de E. Oñate y O.C. Zienkiewicz<sup>1</sup>, en el que se realiza una presentación del método de Volúmenes Finitos como un caso particular del de Elementos Finitos, precisamente aquél para el que la función test es la función constante  $\Omega(x) = 1$ . La presentación se realiza en 1D.

En dicha referencia, sus autores concluyen que, siendo bien conocido que para problemas de operadores autoadjuntos el método de Elementos Finitos Galerkin tiene un comportamiento óptimo, serán necesarias posteriores investigaciones experimentales para determinar si la ventaja computacional que el método de Volúmenes Finitos comporta en el tratamiento de los límites de los volúmenes de control justifica la pérdida de exactitud en la solución obtenida.

En esta línea abierta de investigación se enmarca el presente trabajo, y otros trabajos en preparación<sup>2</sup>, en el que se analiza un esquema de Volúmenes Finitos (VF1L2), que se describe más adelante.

### PRESENTACIÓN DE LOS ESQUEMAS EMPLEADOS

Trabajaremos aquí también en 1D, sobre la ecuación escalar de variable real  $u(x, t)$ , con coeficientes constantes

$$a \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \nu \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + qu(x, t) = f(x, t), x \in [0, L], t \in [0, T]$$

VF1L2 es un esquema de Volúmenes Finitos que se obtiene subdividiendo  $[0, L]$  en volúmenes de control, multiplicando la ecuación anterior por funciones test lineales a trozos, interpolando la función  $u(x, t)$  mediante una función lineal a trozos soportada

en los puntos medios de los volúmenes de control, integrando sobre cada uno de los volúmenes y aplicando el teorema de Green al término difusivo.

Más concretamente, dada una partición  $K_N$ , del dominio  $[0, L]$ , definida por  $N$  elementos  $\{I_1 \equiv [x_0 = 0, x_1], I_2 \equiv [x_1, x_2], \dots, I_N \equiv [x_{N-1}, x_N = L]\}$ , en cada elemento  $I_n \equiv [x_{n-1}, x_n]$  se define una función interpolante lineal soportada en los valores obtenidos mediante el esquema numérico en los extremos del elemento

$$\hat{u}_n = \frac{x - x_n}{x_n - x_{n-1}} \cdot u_{n-1} + \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \cdot u_n = u_{n-1} \cdot N_{n-1}(x) + u_n \cdot N_n(x)$$

Expresamos la ecuación resultante de la discretización espacial asociada al volumen de control  $j$ , indicando como  $i$  un nodo o punto concreto del dominio. Su formulación general es

$$\sum_{i=j-1}^{j+1} M_{ji} \cdot \dot{u}_i + \sum_{i=j-1}^{j+1} (C_{ji} + K_{ji} + P_{ji}) \cdot u_i + F_j = 0$$

con

$$\begin{aligned} M_{ji} &= \int_{\Omega_j} \phi_j \cdot N_i dx \\ C_{ji} &= \nu \int_{\Omega_j} \phi_j \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} dx \\ K_{ji} &= k \int_{\Omega_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} dx - k \int_{\Gamma_j} \phi_j \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Gamma \\ P_{ji} &= q \int_{\Omega_j} \phi_j \cdot N_i dx \\ F_j &= - \int_{\Omega_j} \phi_j \cdot f dx \end{aligned}$$

En la expresión anterior, los volúmenes de control  $\Omega_n$ , tal como se muestra en la Figura 1, se han considerado centrados en los nodos, es decir,  $\Omega_n \equiv [x_{n-} = (x_n + x_{n-1})/2, x_{n+} = (x_{n+1} + x_n)/2]$

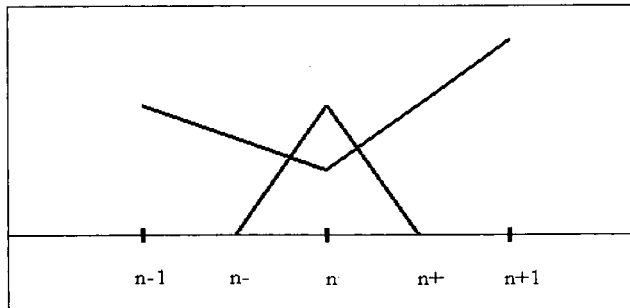


Figura 1

y la función de control asociada al volumen de control de centro en el nodo  $n$  se ha tomado como

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \frac{2}{h_n} \cdot \left(x - x_n + \frac{h_n}{2}\right), \quad \forall x \in \left[\frac{x_{n-1} + x_n}{2}, x_n\right] \\ \phi_n(x) &= -\frac{2}{h_{n+1}} \cdot \left(x - x_n - \frac{h_{n+1}}{2}\right), \quad \forall x \in \left[x_n, \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right] \end{aligned}$$

donde  $h_n$  y  $h_{n+1}$  son, respectivamente, las longitudes de los elementos  $n$  y  $n + 1$ .

La ecuación tipo, asociada al volumen de control de centro en el nodo  $n$ , es para una partición regular de longitud de elemento tipo  $h$

$$\begin{aligned} \frac{ah}{24} \cdot [\bar{u}_{n-1} + 10\bar{u}_n + \bar{u}_{n+1}] + \frac{\nu}{4} \cdot [-u_{n-1} + u_{n+1}] + \frac{k}{h} \cdot [-u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1}] + \\ + \frac{qh}{24} \cdot [u_{n-1} + 10u_n + u_{n+1}] = \int_{\frac{x_{n-1} + x_n}{2}}^{\frac{x_n + x_{n+1}}{2}} \omega_n \cdot f dx \end{aligned}$$

y tras una  $\theta$ -discretización temporal

$$\begin{aligned} \left[ah + \delta\theta \left(-6\nu - 24\frac{k}{h} + qh\right)\right] \cdot u_{n-1}^{j+1} + 2 \cdot \left[5ah + \delta\theta \left(24\frac{k}{h} + 5qh\right)\right] \cdot u_n^{j+1} + \\ + \left[ah + \delta\theta \left(6\nu - 24\frac{k}{h} + qh\right)\right] \cdot u_{n+1}^{j+1} = \left[ah + \delta(1-\theta) \left(6\nu + 24\frac{k}{h} - qh\right)\right] \cdot u_{n-1}^j + \\ + 2 \cdot \left[5ah - \delta(1-\theta) \left(24\frac{k}{h} + 5qh\right)\right] \cdot u_n^j + \left[ah + \delta(1-\theta) \left(-6\nu + 24\frac{k}{h} - qh\right)\right] \cdot u_{n+1}^j + \\ + 24\delta(\theta \cdot F_n^{j+1} + (1-\theta)F_n^j) \end{aligned}$$

donde se ha designado por  $u_n^j$  la aproximación de  $u$  en  $(x_n, t_j)$ .

Este esquema se compara con otro denominado en este trabajo EF1, que es un esquema de Elementos Finitos lineal.

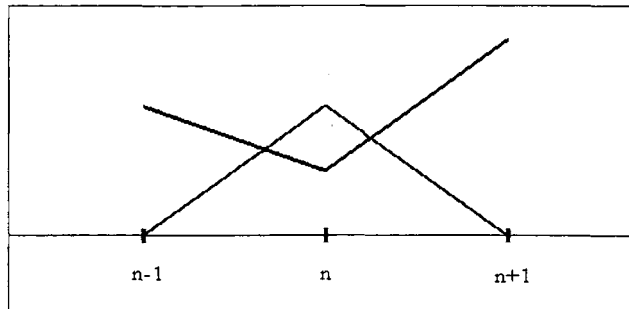


Figura 2

En este esquema se utilizan elementos de dos nodos (Figura 2), siendo los dominios de integración  $\Omega_n \equiv [x_{n-1}, x_{n+1}]$ .

Las funciones test que aparecen en la formulación discretizada son

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{1}{h_n} \cdot (x - x_n + h), \quad \forall x \in [x_{n-1}, x_n] \\ \phi_n &= -\frac{1}{h_{n+1}} \cdot (x - x_n - h_{n+1}), \quad \forall x \in [x_n, x_{n+1}] \end{aligned}$$

Con ello para el caso de mallado regular de diámetro  $h$ , la ecuación tipo resultante, asociada al nodo  $n$ , es

$$\begin{aligned} \frac{ah}{6} [\bar{u}_{n-1} + 4\bar{u}_n + \bar{u}_{n+1}] + \frac{\nu}{2} [-u_{n-1} + u_{n+1}] + \frac{k}{h} [-u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1}] + \\ + \frac{qh}{6} [u_{n-1} + 4u_n + u_{n+1}] = \int_{x_n-h}^{x_n+h} \omega_n \cdot f dx \end{aligned}$$

y tras una  $\theta$ -discretización temporal

$$\begin{aligned} \left[ ah + \delta\theta \left( -3\nu - 6\frac{k}{h} + qh \right) \right] \cdot u_{n-1}^{j+1} + 4 \cdot \left[ ah + \delta\theta \left( 3\frac{k}{h} + qh \right) \right] \cdot u_n^{j+1} + \\ + \left[ ah + \delta\theta \left( 3\nu - 6\frac{k}{h} + qh \right) \right] \cdot u_{n+1}^{j+1} = \left[ ah + \delta(1-\theta) \left( 3\nu + 6\frac{k}{h} - qh \right) \right] \cdot u_{n-1}^j + \\ + 4 \cdot \left[ ah + \delta(1-\theta) \left( -3\frac{k}{h} - qh \right) \right] \cdot u_n^j + \left[ ah + \delta(1-\theta) \left( -3\nu + 6\frac{k}{h} - qh \right) \right] \cdot u_{n+1}^j + \\ + 6\delta(\theta \cdot F_n^{j+1} + (1-\theta)F_n^j) \end{aligned}$$

### ESTUDIO DE ESTABILIDAD

Se consideran soluciones que tengan por desarrollo de Fourier la expresión

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \alpha_k \cdot \sin(i\omega_k t - i\nu_k x)$$

donde  $\omega_k$  es la frecuencia de la  $k$ -ésima componente y  $\nu_k$  el número de onda de dicha componente. Representaremos por  $\lambda_k$  la longitud de onda asociada a la componente  $k$ .

En virtud de la linealidad del operador se estudia la componente genérica, analizando la ganancia o coeficiente de amplificación  $|G|$  y el ángulo de fase relativo  $\varphi$  para cada frecuencia  $\omega_k$ .

La ganancia es la relación entre la amplitud de onda después de un intervalo de tiempo  $\Delta t$  y la amplitud antes de dicho intervalo. Asimismo, el ángulo de fase relativo

es el ángulo de fase de la componente Fourier correspondiente a la frecuencia  $\omega_k$  después de un intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

La condición de estabilidad de von Neumann viene dada entonces por  $|G| \leq 1$ , condición que debe verificarse para cualquier frecuencia.

Además, para que el esquema tenga un funcionamiento aceptable  $\varphi$  debe situarse en las proximidades de cero para cualquier frecuencia.

Denotando  $G = \frac{p+qi}{r+si}$  se obtiene que

$$|G| = \frac{\sqrt{(pr + qs)^2 + (qr - ps)^2}}{r^2 + s^2}; \quad \varphi = \arctan \frac{qr - ps}{pr + qs}$$

Para VF1L2 los parámetros de las expresiones anteriores resultan ser

$$\begin{aligned} p &= \left( ah + 24\delta(1 - \theta)\frac{k}{h} - \delta(1 - \theta)qh \right) \cdot \cos \nu h + \left( 5ah - 24\delta(1 - \theta)\frac{k}{h} - 5\delta(1 - \theta)qh \right) \\ q &= (6\delta(1 - \theta)\nu) \sin \nu h \\ r &= \left( ah - 24\delta\theta\frac{k}{h} + \delta\theta qh \right) \cdot \cos \nu h + \left( 5ah + 24\delta\theta\frac{k}{h} + 5\delta\theta qh \right) \\ s &= (-6\delta\theta\nu) \cdot \sin \nu h \end{aligned}$$

y para el esquema EF1 estos parámetros están dados por

$$\begin{aligned} p &= \left( ah + 6\delta(1 - \theta)\frac{k}{h} - \delta(1 - \theta)qh \right) \cdot \cos \nu h + \left( 2ah - 6\delta(1 - \theta)\frac{k}{h} - 2\delta(1 - \theta)qh \right) \\ q &= (3\delta(1 - \theta)\nu) \sin \nu h \\ r &= \left( ah - 6\delta\theta\frac{k}{h} + \delta\theta qh \right) \cdot \cos \nu h + \left( 2ah + 6\delta\theta\frac{k}{h} + 2\delta\theta qh \right) \\ s &= (-3\delta\theta\nu) \cdot \sin \nu h \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores para distintos valores de  $\theta$  se resumen en las figuras numeradas de la 4 a la 15, que contienen cada una de ellas cuatro gráficos en un plano paramétrico Courant-Peclet en los que se emplean escalas logarítmicas.

En cada figura, el gráfico de la parte superior izquierda define el dominio de estabilidad del esquema, comparándolo con el correspondiente método de elementos finitos, utilizando distintos tonos de gris según el convenio que se describe en la parte superior izquierda de la Figura 3. A cada tono de gris se le asocian las iniciales de los esquemas estables en el dominio, VF en el caso de serlo el de Volúmenes Finitos, EF en el caso de serlo el de Elementos Finitos, EFVF en caso de serlo ambos o ningún símbolo si no lo es ninguno.

En cada una de las figuras citadas, el gráfico de la parte superior derecha indica, mediante un código de tonos de gris reflejado en la parte superior derecha de la Figura 3, el error o desfase angular  $\phi$  de la componente de Fourier de longitud de onda  $\lambda$  en la solución obtenida mediante el esquema VF1L2 respecto a la homóloga componente de la solución exacta para el valor de  $\lambda/h = 2$ .

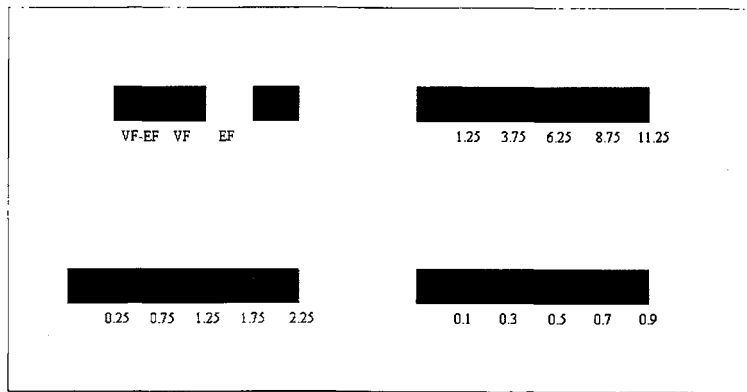


Figura 3

Análogamente, en las Figuras 4 a 15, el gráfico de la parte inferior izquierda indica mediante un código de tonos de gris reflejado en la parte inferior izquierda de la Figura 3, el error o desfase angular para el valor  $\lambda/h = 5$ .

Finalmente, el gráfico de la parte inferior derecha indica el error o desfase angular para el valor de  $\lambda/h = 25$  mediante un código de tonos de gris reflejado en la parte inferior derecha de la Figura 3.

El comportamiento del error angular para los tres valores citados de  $\lambda/h$  refleja de forma significativa la difusión numérica presente en la solución obtenida mediante el esquema VF1L2 correspondiente a cada par de valores Peclet-Courant en el dominio de estabilidad del esquema.

Recogemos a continuación las figuras de resultados obtenidos para el esquema VF1L2 para distintos valores del parámetro  $\theta$ : 0,00; 0,25; 0,48; 0,50; 0,75 y 1,00, correspondientes a una ecuación de transporte con término  $q = 0$  y los mismos valores de  $a$ ,  $v$  y  $k$ .

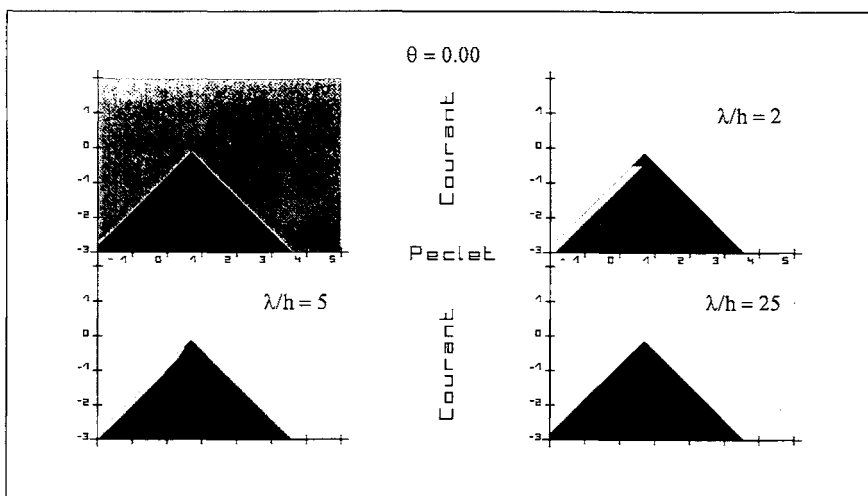


Figura 4.  $\theta = 0,00$ ;  $a = 1,00$ ;  $k = 0,03$ ;  $v = 1,00$ ;  $q = 0,00$

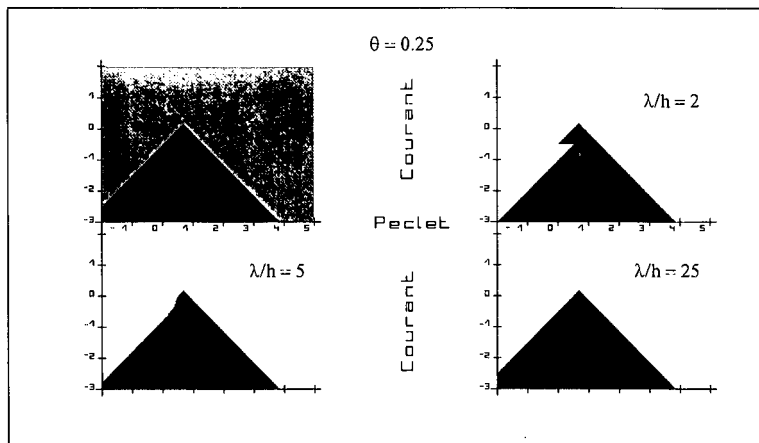


Figura 5.  $\theta = 0,25$ ;  $a = 1,00$ ;  $k = 0,03$ ;  $v = 1,00$ ;  $q = 0,00$

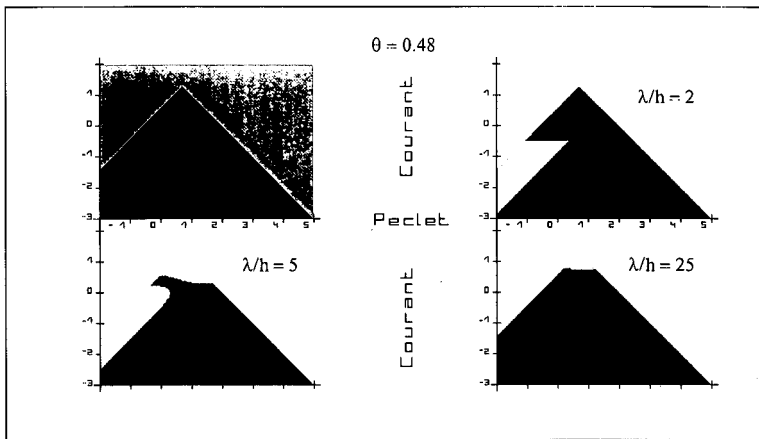


Figura 6.  $\theta = 0,48$ ;  $a = 1,00$ ;  $k = 0,03$ ;  $v = 1,00$ ;  $q = 0,00$

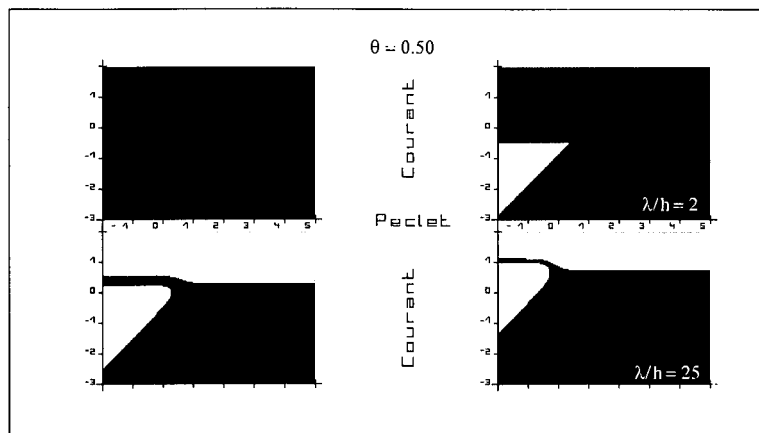


Figura 7.  $\theta = 0,50$ ;  $a = 1,00$ ;  $k = 0,03$ ;  $v = 1,00$ ;  $q = 0,00$



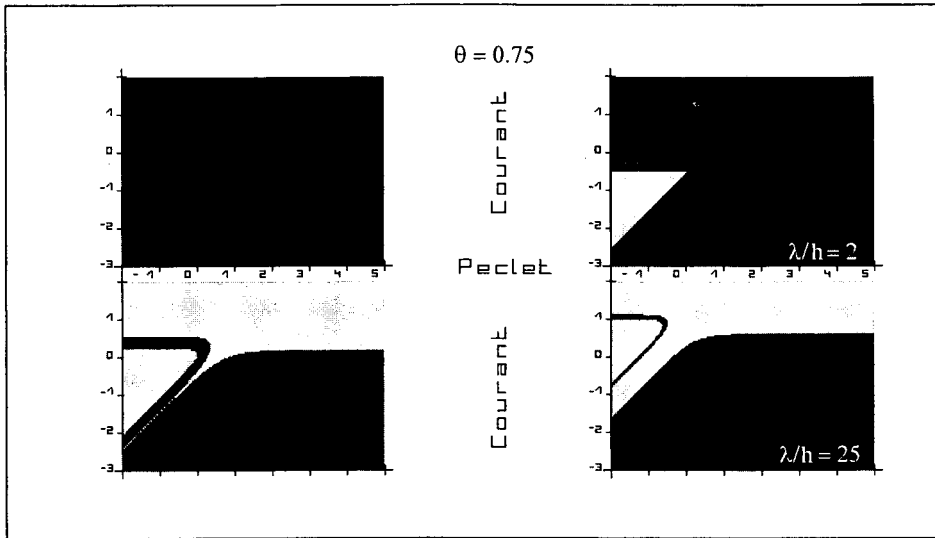


Figura 8.  $\theta = 0,75$ ;  $a = 1,00$ ;  $k = 0,03$ ;  $v = 1,00$ ;  $q = 0,00$

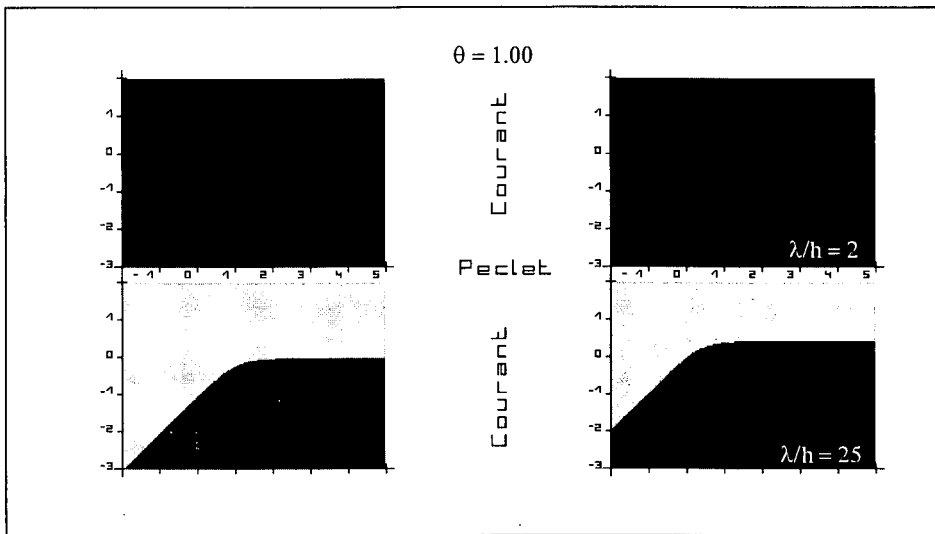


Figura 9.  $\theta = 1,00$ ;  $a = 1,00$ ;  $k = 0,03$ ;  $v = 1,00$ ;  $q = 0,00$

Estos dominios de estabilidad y ángulos de desfase se ven muy influenciados por los valores que toma la constante  $q$ . Así para  $q = 0,01$  se recogen en las figuras siguientes los resultados obtenidos para el esquema VF1L2, para los valores del parámetro  $\theta$ : 0,00; 0,25; 0,48; 0,50; 0,75 y 1,00, correspondientes a una ecuación de transporte con los valores señalados de  $a$ ,  $v$  y  $k$ .

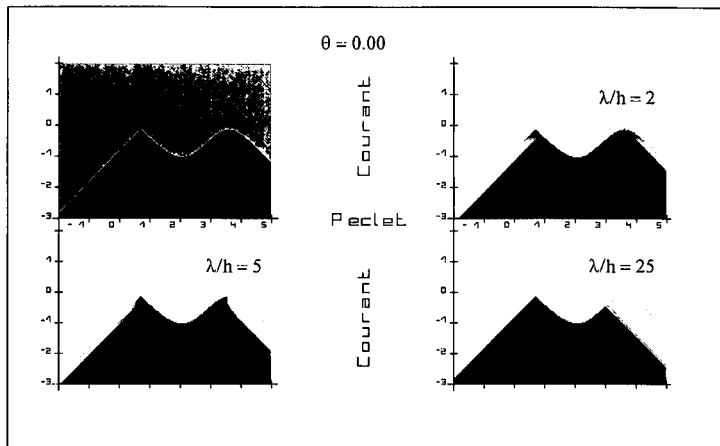


Figura 10.  $\theta = 0,00$ ;  $a = 1,00$ ;  $k = 0,03$ ;  $v = 1,00$ ;  $q = 0,01$

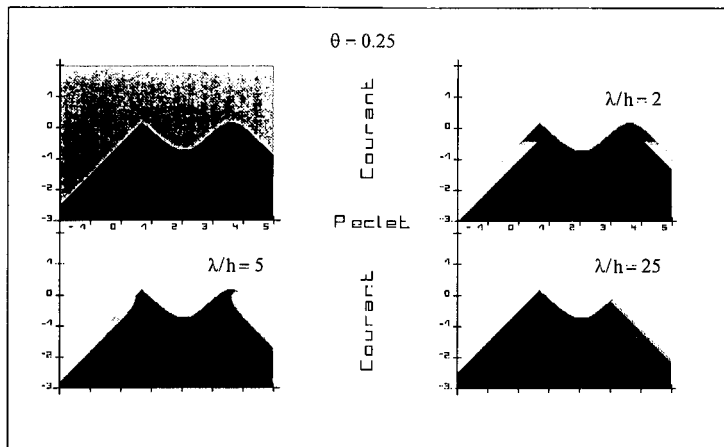


Figura 11.  $\theta = 0,25$ ;  $a = 1,00$ ;  $k = 0,03$ ;  $v = 1,00$ ;  $q = 0,01$

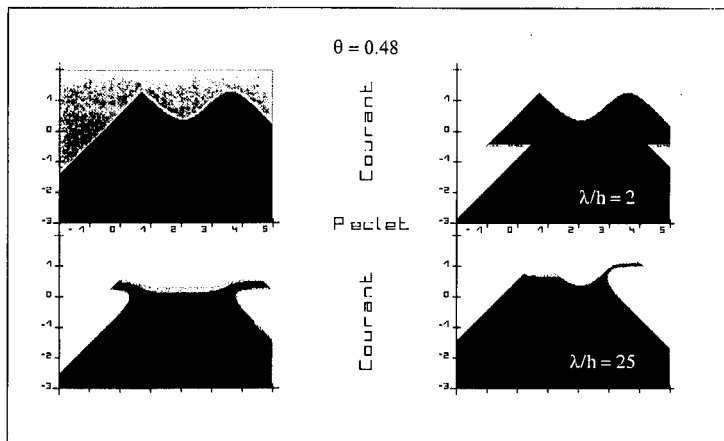


Figura 12.  $\theta = 0,48$ ;  $a = 1,00$ ;  $k = 0,03$ ;  $v = 1,00$ ;  $q = 0,01$

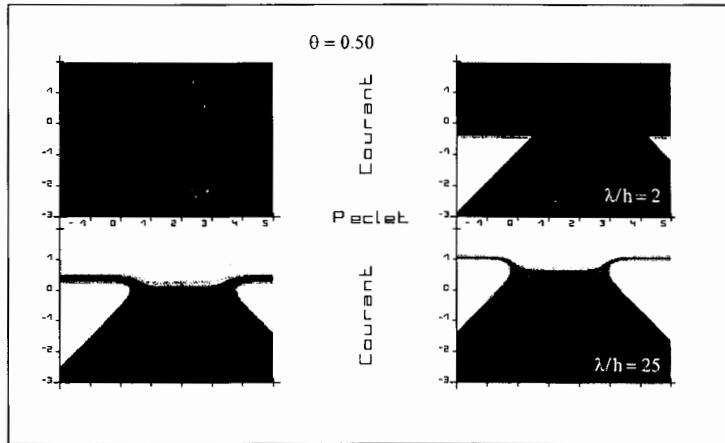


Figura 13.  $\theta = 0,50$ ;  $a = 1,00$ ;  $k = 0,03$ ;  $v = 1,00$ ;  $q = 0,01$

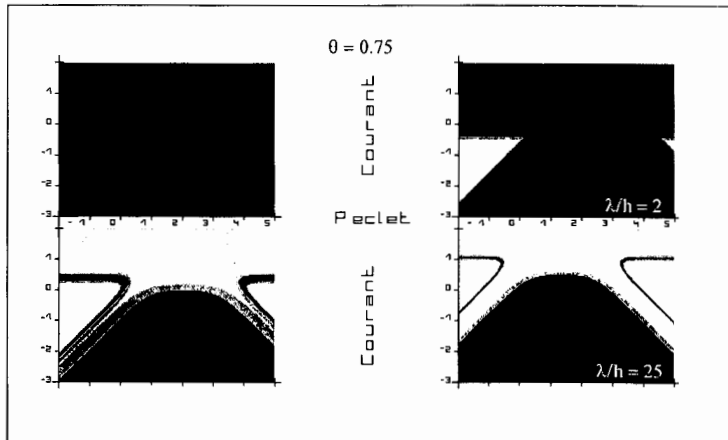


Figura 14.  $\theta = 0,75$ ;  $a = 1,00$ ;  $k = 0,03$ ;  $v = 1,00$ ;  $q = 0,01$

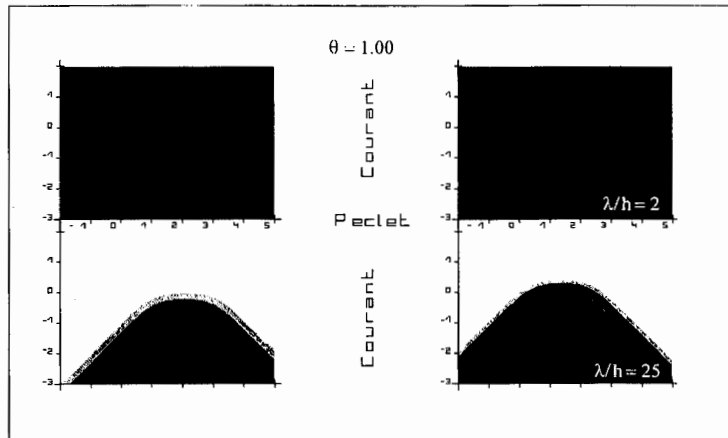


Figura 15.  $\theta = 1,00$ ;  $a = 1,00$ ;  $k = 0,03$ ;  $v = 1,00$ ;  $q = 0,01$

## APLICACIÓN A UN EJEMPLO CON TÉRMINO CONVECTIVO

Los dominios de estabilidad y los desfases se han verificado sobre un ejemplo con ecuación homogénea y condiciones de contorno tipo Dirichlet y con valor inicial cero en todo el dominio de estudio. Más concretamente los problemas modelo considerados se definen mediante

$$a \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q \cdot u = 0; \quad \forall x \in ]0, L[ \forall t \in ]0, T[$$

$$u(0, t) = u_0, \quad \forall t \in ]0, T[$$

$$u(L, t) = 0, \quad \forall t \in ]0, T[$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \forall x \in ]0, L[$$

$$u(0, 0) = u_0$$

La solución analítica para el caso  $L = \infty$  puede encontrarse en Ogata & Banks<sup>3</sup> y está dada por la expresión

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \cdot e^{\frac{\nu x}{2k}} \cdot \left( e^{-\frac{\nu x \gamma}{2k}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\alpha}^{\infty} e^{-z^2} dz + e^{\frac{\nu x \gamma}{2k}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\beta}^{\infty} e^{-z^2} dz \right)$$

siendo

$$\gamma = \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{q \cdot k \cdot a}{\nu^2}}, \quad \alpha = \frac{x - \frac{\nu \gamma}{a} t}{2\sqrt{\frac{k}{a} t}}, \quad \beta = \frac{x + \frac{\nu \gamma}{a} t}{2\sqrt{\frac{k}{a} t}}$$

Los resultados obtenidos mediante el esquema VF1L2 y el esquema EF1 se comparan con la solución analítica en las figuras y tablas siguientes. Se ha tomado un valor de  $L$  suficientemente grande para que los resultados puedan ser comparables.

Las soluciones presentadas en las figuras se refieren a los instantes de cálculo  $t = 20$ ,  $t = 40$ ,  $t = 60$  y  $t = 80$ . En las tablas que siguen se presentan los valores de la norma infinito  $\| \cdot \|_{\infty}$ , la norma 2 relativa  $\| \cdot \|_{2/N}$  y la norma 1 relativa  $\| \cdot \|_{1/N}$  de los vectores  $(u_{VF} - u)$  y  $(u_{EF} - u)$ , donde  $u_{VF}$  es el vector de los valores en los nodos en la solución correspondiente al esquema VF1L2,  $u_{EF}$  es el correspondiente al esquema EF1 y  $u$  es el correspondiente a la solución exacta.

En la Figura 16 y en la Tabla I se recogen los resultados obtenidos para  $\theta = 0,25$ ;  $q = 0,00$ ; Courant =  $10^{0,1} \simeq 1,259$ ; Peclet =  $10^{0,581} \simeq 3,810$ ;  $N = 874$  para  $L = 100$ ;  $\delta \simeq 0,1439$ ;  $h \simeq 0,1143$ .

Como se puede apreciar, se observa un buen comportamiento del esquema VF1L2, mientras que EF1 se comporta de forma completamente inestable como corresponde a lo que se observa en los cuadros en que se recogían los dominios de estabilidad y desfases (Figura 5) para Peclet =  $3,810 \simeq 10^{0,581}$  y Courant =  $1,259 \simeq 10^{0,100}$ .

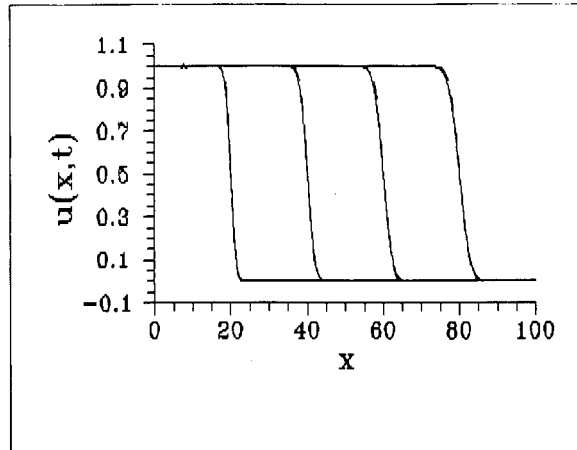


Figura 16. V.F. vs S.A. (E.F. inestable)

Esquema	VF1L2			EF1		
	$\  \cdot \ _{\infty}$	$\  \cdot \ _2/N$	$\  \cdot \ _1/N$	$\  \cdot \ _{\infty}$	$\  \cdot \ _2/N$	$\  \cdot \ _1/N$
tiempo						
20	0,0432	0,0053	0,0011	4 E+03	4 E+02	6 E+01
40	0,0254	0,0039	0,0010	1 E+08	1 E+07	3 E+06
60	0,0316	0,0051	0,0013	5 E+12	6 E+11	1 E+11
80	0,0333	0,0059	0,0015	2 E+17	2 E+16	5 E+15
conjunto	0,0432	0,0051	0,0012	2 E+17	1 E+16	1 E+15

Tabla I

En la Figura 17 y en la Tabla II se recogen los resultados obtenidos para  $\theta = 0,25$ ;  $q = 0,00$ ; Courant =  $10^{-0,80} \simeq 0,1585$ , Peclet =  $10^{1,10} \simeq 12,59$ ;  $N = 264$  para  $L = 100$ ;  $\delta \simeq 0,0599$ ;  $h \simeq 0,3778$ .

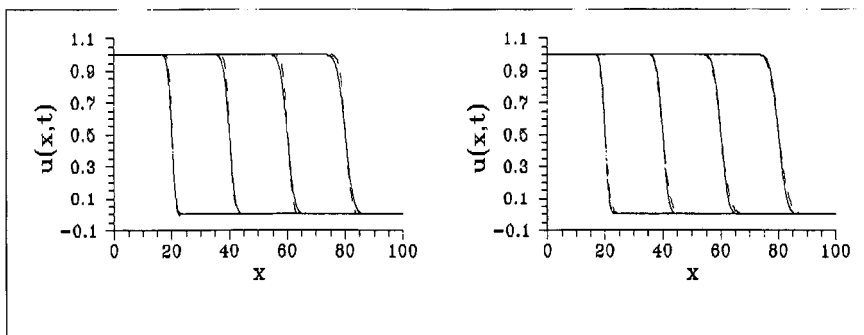


Figura 17. Izquierda E.F. vs S.A.; Derecha V.F. vs S.A.

Como se puede apreciar, se observa un comportamiento aceptable para ambos esquemas, pero VF1L2 se comporta mejor que EF1. El buen comportamiento de VF1L2 se corresponde con lo que se observa en los cuadros en que se recogían los dominios de estabilidad y desfases (Figura 5) para  $Peclet = 12,59 \simeq 10^{1,10}$  y  $Courant = 0,1585 \simeq 10^{-0,80}$ .

Esquema	VF1L2			EF1		
	$\  \cdot \ _{\infty}$	$\  \cdot \ _2/N$	$\  \cdot \ _1/N$	$\  \cdot \ _{\infty}$	$\  \cdot \ _2/N$	$\  \cdot \ _1/N$
tiempo						
20	0,0592	0,0085	0,0019	0,0935	0,0113	0,0022
40	0,0445	0,0075	0,0020	0,0719	0,0106	0,0025
60	0,0350	0,0066	0,0020	0,0566	0,0094	0,0025
80	0,0256	0,0056	0,0019	0,0417	0,0080	0,0023
conjunto	0,0591	0,0071	0,0019	0,0935	0,0099	0,0024

Tabla II

En la Figura 18 y en la Tabla III se recogen los resultados obtenidos para  $\theta = 0,00$ ;  $q = 0,01$ ;  $Courant = 10^{-0,2} \simeq 0,631$ ;  $Peclet = 10^{0,58} \simeq 3,801$ ;  $N = 877$  para  $L = 100$ ;  $\delta \simeq 0,072$ ;  $h \simeq 0,114$ .

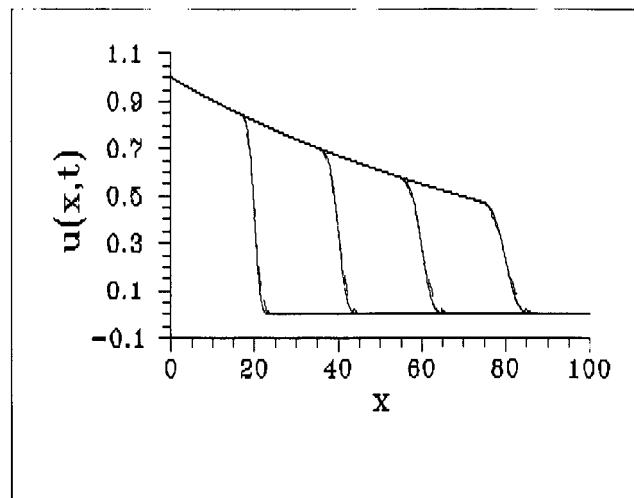


Figura 18. V.F. vs S.A. (E.F. inestable)

Como se puede apreciar, se observa un buen comportamiento del esquema VF1L2, mientras que EF1 se comporta de forma completamente inestable como corresponde a lo que se observa en los cuadros en que se recogían los dominios de estabilidad y desfases (Figura 10), para valores de los parámetros  $Peclet = 3,801 \simeq 10^{0,58}$  y  $Courant = 0,631 \simeq 10^{-0,2}$ .

Esquema	VF1L2			EF1		
	$\  \cdot \ _{\infty}$	$\  \cdot \ _2/N$	$\  \cdot \ _1/N$	$\  \cdot \ _{\infty}$	$\  \cdot \ _2/N$	$\  \cdot \ _1/N$
tiempo						
20	0,0456	0,0056	0,0011	2 E+09	3 E+08	7 E+07
40	0,0223	0,0038	0,0010	6 E+19	1 E+19	4 E+18
60	0,0184	0,0033	0,0010	2 E+30	4 E+29	1 E+29
80	0,0179	0,0032	0,0010	4 E+28	2 E+27	2 E+26
conjunto	0,0456	0,0041	0,0010	2 E+30	2 E+29	3 E+28

Tabla III

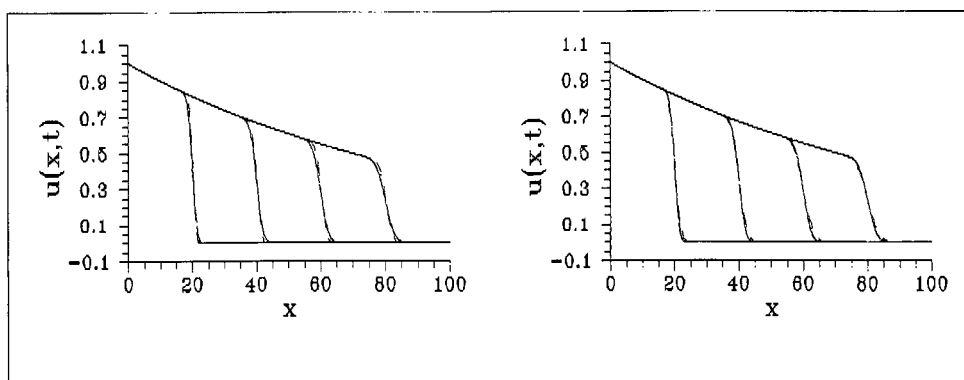


Figura 19. Izquierda V.F. vs S.A.; Derecha E.F. vs S.A.

Esquema	VF1L2			EF1		
	$\  \cdot \ _{\infty}$	$\  \cdot \ _2/N$	$\  \cdot \ _1/N$	$\  \cdot \ _{\infty}$	$\  \cdot \ _2/N$	$\  \cdot \ _1/N$
tiempo						
20	0,0568	0,0078	0,0017	0,0889	0,0111	0,0022
40	0,0428	0,0072	0,0019	0,0694	0,0105	0,0025
60	0,0240	0,0064	0,0019	0,0551	0,0094	0,0025
80	0,0274	0,0056	0,0018	0,0443	0,0082	0,0024
conjunto	0,0568	0,0068	0,0018	0,0889	0,0099	0,0024

Tabla IV

En la Figura 19 y en la Tabla IV se recogen los resultados obtenidos para  $\theta = 0,00$ ;  $q = 0,01$ ; Courant =  $10^{-0,1} \simeq 0,100$ , Peclet =  $10^{1,00} \simeq 9,995$ ;  $N = 333$  para  $L = 100$ ;  $\delta \simeq 0,030$ ;  $h \simeq 0,300$ .

Como se puede apreciar, se observa un comportamiento aceptable para ambos esquemas, pero VF1L2 se comporta mejor que EF1. El buen comportamiento de VF1L2 corresponde a lo que se observa en los cuadros en que se recogían los dominios de estabilidad y desfases (Figura 10) para Peclet =  $9,995 \simeq 10^{1,00}$  y Courant =  $0,100 \simeq 10^{0,100}$ .

## APLICACIÓN A UN EJEMPLO SIN TÉRMINO CONVECTIVO

El comportamiento de VF1L2 frente al esquema básico de elementos finitos, desde otros puntos de vista, se pone de manifiesto a continuación para el problema parabólico

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = e^{-x} \\ u(0, t) = e^{-kt} \\ u(L, t) = e^{-(L+kt)} \\ f(x, t) = -2k \cdot e^{-(x+kt)} \end{cases}$$

de solución conocida

$$u(x, t) = e^{-(x+kt)}$$

La Figura 20 refleja el mejor comportamiento de VF1L2 frente a Elementos Finitos desde el punto de vista de evolución del error, para lo que se comparan las soluciones obtenidas mediante los esquemas VF1L2 y Elementos Finitos con la solución exacta, conocida. Siempre el error obtenido mediante VF1L2 se mantiene por debajo del obtenido mediante Elementos Finitos y tras unos primeros momentos de comportamiento poco diferenciado VF1L2 evoluciona mucho más satisfactoriamente, hasta que la acumulación de errores de redondeo lo estabilizan, en todo caso a un nivel inferior de error que en el caso de Elementos Finitos.

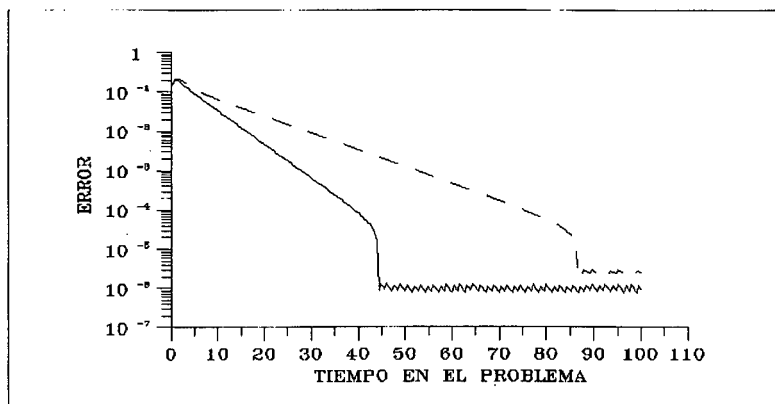


Figura 20

La Figura 21 pone de manifiesto que tras un comienzo *más lento* del esquema de Volúmenes Finitos éste evoluciona mejor en cuanto a velocidad de ejecución que el correspondiente de Elementos Finitos, igual se mida en tiempo real de ejecución en



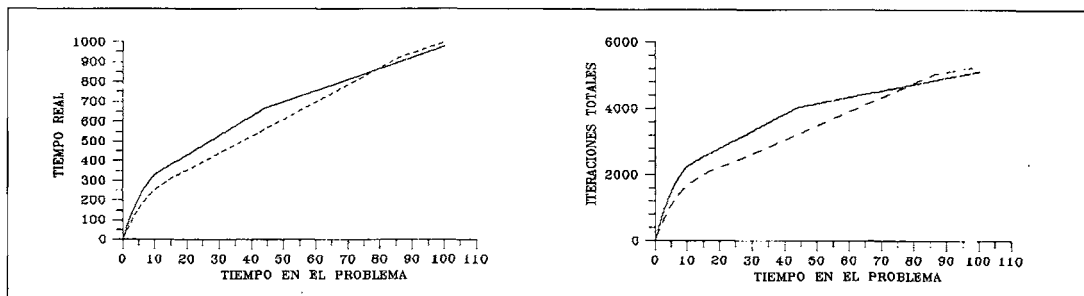


Figura 21

un mismo ordenador que en número de iteraciones totales para un procedimiento de resolución del sistema determinado, en este caso gradiente conjugado.

En ambos gráficos el trazo continuo refleja los resultados para VF1L2 y el discontinuo para Elementos Finitos.

### CONCLUSIONES

Existen esquemas basados en Volúmenes Finitos, como VF1L2, que amplían el dominio de estabilidad, respecto al correspondiente esquema de Elementos Finitos cuando se aplican a la resolución de problemas que no son puramente elípticos.

En un plano Peclet-Courant, VF1L2 crea una banda borde superior de anchura aproximada 0,5 unidades logarítmicas, con un comportamiento muy eficiente en los puntos extremos de la banda, puntos en los que los esquemas basados en Elementos Finitos son inestables.

Además, en la intersección de las zonas de estabilidad de ambos esquemas se pueden encontrar áreas de mejor comportamiento del esquema VF1L2 en relación con el correspondiente basado en Elementos Finitos.

Este comportamiento diferencial es particularmente relevante para valores de  $\theta$  pequeños.

Las conclusiones anteriores son válidas tanto para valores de la constante de reacción  $q$  cero como distintos de cero, si bien los dominios de estabilidad y los desfases de los esquemas se ven muy influenciados por el valor de dicho parámetro.

Además, se pueden conseguir mejores resultados con VF1L2 en otros aspectos tales como convergencia o evolución de la velocidad de cálculo, incluso para problemas parabólicos sin término convectivo.

### AGRADECIMIENTOS

Carlos Conde Lázaro y Alfredo López Benito agradecen a la Empresa Nacional de Residuos Radioactivos, S.A., ENRESA, la ayuda concedida a través del contrato número 0700442.

José Manuel Pérez Gonzáles agradece a la Dirección de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes y a la Dirección del Departamento de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas, ambas de la U.P.M. el apoyo recibido.

### REFERENCIAS

1. E. Oñate y O.C. Zienkiewicz, "Finite Volumes vs. Finite Elements-Is there really a choice?", *Non Linear Computational Mechanics State-of-Art*, P. Wriggers y W. Wagner (Eds.), Springer Verlag, (1991).
2. C. Conde y J.M. Pérez, "Una comparación entre el método de Elementos Finitos y métodos de Volúmenes Finitos para simulación de proceso de transporte", *Actas del XIV C.E.D.Y.A./IV C.M.A.*, a aparecer.
3. A. Ogata y R. Banks, "A Solution of the Differential Equation of Longitudinal Dispersion in Porous Media", United States Geological Survey, *Professional Paper*, N. 411-A, (1961).