

# **SOBRE INESTABILIDAD E INTEGRACIÓN DE TENSIONES DE FORMULACIONES VISCOPLÁSTICAS PARA HORMIGÓN**

**GUILLERMO ETSE  
y  
ALEJANDRO CAROSIO**

*Laboratorio de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán  
CC 132, Correo Central, 4000 Tucumán, Argentina  
Fax: + 54-81-364087 E-mail: cetse@Herrera.untmre.edu.ar*

## **RESUMEN**

Se analizan las consecuencias de los postulados de estabilidad en formulaciones elastoplásticas y elasto-viscoplásticas para materiales cohesivo-friccionales. En particular se considera el criterio de inestabilidad en lo pequeño propuesto por Hill<sup>6</sup> para sistemas disipativos y sus características espectrales se analizan por medio del Módulo de Rigidez Direccional. Para los fines comparativos de la predicción de inestabilidad en materiales elastoplásticos y viscoplásticos se considera el camino de tensiones seguido en el Ensayo Experimental de Inestabilidad de Smith<sup>12</sup>.

Los resultados muestran la influencia del grado de no asociatividad y del nivel de viscosidad material en la predicción de inestabilidad local.

## **ABOUT INSTABILITY AND STRESS INTEGRATION OF VISCOPLASTIC FORMULATIONS FOR CONCRETE**

### **SUMMARY**

In this work, the consequences of the stability conditions in elasto-plastic and elasto-viscoplastic constitutive formulations for concrete materials are analyzed. In particular, the criterion for local instability by Hill<sup>6</sup> is considered and its performance is analyzed by means of the directional stiffness modulus.

The numerical results for the stress path of the instability test by Smith<sup>12</sup> illustrate the influence of the grade of nonassociativity and of the viscosity in the performance of the instability condition.

Recibido: Febrero 1997

## INTRODUCCIÓN

En la mecánica del continuo el criterio de inestabilidad se formula a partir del segundo método de Ljapunov. La correspondiente definición sirve para establecer si perturbaciones suficientemente pequeñas de las condiciones iniciales de un estado de equilibrio arbitrario conducen a modificaciones igualmente pequeñas durante el proceso de deformación y desplazamiento posterior. A partir de este criterio Hill<sup>6</sup> propuso un postulado equivalente para el caso de sistemas disipativos, tales como los elastoplásticos.

Otro criterio de falla usualmente considerado es la condición de pérdida local de la unicidad de la solución, la cual puede estar asociada con campos continuos o discontinuos de gradientes de velocidades. La condición de bifurcación discontinua es utilizada para la deducción de la condición de localización. En este caso el campo de gradientes de velocidades sobre la superficie de discontinuidad está representado por un tensor de segundo orden con deficiencia de rango, posible de ser expresado por medio del producto tensorial entre dos vectores, lo cual físicamente corresponde a la condición de compatibilidad de Maxwell. Cuando el gradiente de velocidades no presenta saltos o discontinuidades nos referimos a la condición de bifurcación continua. Esta conduce a una forma cuadrática del operador material, matemáticamente similar a la condición de inestabilidad local. Sin embargo, y como fuera señalado por de Borst<sup>1</sup>, la condición de inestabilidad y de bifurcación continua pueden dar lugar a requerimientos diferentes. En un caso simplemente valuados (la inestabilidad) y en el otro multivaluados (la bifurcación continua). Esto último se presenta en el caso de comportamientos diferenciados en carga y descarga, como es el caso de la plasticidad, donde diferentes gradientes de velocidades se vinculan a un campo de tasas de tensiones a través de operadores materiales diferentes.

Estos dos indicadores, la condición de inestabilidad y la condición de bifurcación continua, son conocidos como los indicadores de falla difusa o continua.

En este trabajo analizamos las implicaciones de la condición de inestabilidad y de bifurcación continua en el caso de sólidos viscoplásticos enmarcados en la formulación de Duvaut-Lions<sup>3</sup> y de Perzyna<sup>9</sup>. Los análisis contemplan los casos de flujos viscoplásticos asociados y no asociados.

## EQUILIBRIO ESTABLE Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

Supongamos un estado de equilibrio caracterizado por el campo tensional  $\mathbf{S}$  en el tiempo  $t$ , siendo  $\mathbf{S}$  el tensor nominal de tensiones cuya transpuesta es el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. Consideramos los desplazamientos infinitesimales  $\dot{x}_i \delta t$  con el correspondiente campo de gradientes infinitesimales  $\dot{\mathbf{A}}$ , siendo  $A_{ij} = \text{Grad } x_i(X_j)$ . El incremento de la energía interna menos el trabajo de las fuerzas externas en un instante de tiempo infinitesimal  $\delta t$ , luego de sustraerle la ecuación de equilibrio, viene dado por

$$U = \frac{1}{2} \delta t^2 \int_{\beta_0} \text{tr}[\dot{\mathbf{S}} \cdot \dot{\mathbf{A}}] dv \quad (1)$$

Sobre la base del Método Energético de Ljapunow se deduce que el estado de equilibrio del cuerpo bajo cargas estáticas es estable si  $U$  es positiva para todo campo de gradientes admisibles, es decir si

$$U = \frac{1}{2} \delta t^2 \int_{\beta_0} tr[\dot{\mathbf{S}} \cdot \dot{\mathbf{A}}] dv > 0 \tag{2}$$

Consideramos ahora la unicidad del equilibrio desde el punto de vista global. Sean  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{X}'$  dos posibles configuraciones o campos de desplazamientos con gradientes  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}'$  y tensiones normales  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{S}'$  que satisfacen ambas las ecuaciones de equilibrio con las correspondientes fuerzas de cuerpo y tensiones superficiales. Del teorema de la divergencia aplicado a la diferencia  $\Delta \mathbf{S}$  y  $\Delta \mathbf{A}$  de ambas soluciones se deduce la condición de unicidad de acuerdo a

$$\int_{\beta_0} tr[\Delta \mathbf{S} \cdot \Delta \mathbf{A}] dv \neq 0 \tag{3}$$

Teniendo en cuenta la condición de estabilidad se deduce que una condición suficiente para la unicidad es

$$\int_{\beta_0} tr[\Delta \mathbf{S} \cdot \Delta \mathbf{A}] dv > 0 \tag{4}$$

Las ecs. (3) y (4) son matemáticamente idénticas. Es decir, imponen las mismas restricciones al operador material que relaciona el incremento de deformaciones con el de tensiones.

En el caso de pequeños desplazamientos y gradientes de desplazamientos la condición de estabilidad y unicidad, planteadas en forma fuerte, se reducen a

$$tr[\dot{\sigma} \cdot \dot{\epsilon}] > 0 \tag{5}$$

y

$$tr[\Delta \sigma \cdot \Delta \epsilon] > 0 \tag{6}$$

## ECUACIONES CONSTITUTIVAS

### Material elastoplástico

En el marco de la teoría del flujo de la plasticidad, las ecuaciones constitutivas de un vasto número de modelos pueden escribirse en la forma

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_e - \dot{\sigma}_p = \mathcal{E} : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_p) \tag{7}$$

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m} \tag{8}$$

$$\mathbf{m} = \mathcal{T}^{-1} : \mathbf{n} \tag{9}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \mathbf{H} : \mathbf{m} \tag{10}$$

donde  $\epsilon_p$  representa la parte plástica del tensor de deformaciones totales  $\epsilon$ ,  $\mathcal{E}$  el tensor elástico de cuarto orden y  $\mathbf{q}$  el tensor de variables de estado. Las ecuaciones (8) y (9) expresan una ley del flujo no asociada, siendo  $\mathbf{m}$  la dirección de las deformaciones plásticas. Este operador puede obtenerse a partir del gradiente de la superficie de fluencia  $\mathbf{n}$  por medio del tensor de transformación de cuarto orden  $\mathcal{T}$ . Finalmente (10) define la ley de evolución de las variables de endurecimiento y de ablandamiento por medio de una función tensorial  $\mathbf{H}$  de las variables de estado.

El operador material elastoplástico continuo se lo deduce de la condición de consistencia plástica de acuerdo a

$$\mathcal{E}_{ep} = \mathcal{E} - \frac{\mathbf{n}^* \otimes \mathbf{m}^*}{\alpha} \quad (11)$$

con

$$\mathbf{n}^* = \mathcal{E} : \mathbf{n}; \quad \mathbf{m}^* = \mathcal{E} : \mathbf{m}; \quad \alpha = E_p + \mathbf{n} : \mathcal{E} : \mathbf{m} \quad (12)$$

siendo  $E_p$  el módulo de endurecimiento y de ablandamiento.

### Material elasto-viscoplástico

Coincidentemente con la teoría del flujo de la plasticidad, la viscoplasticidad se basa en la descomposición de la tasa de deformaciones en una componente elástica más otra viscoplástica. En el caso del modelo viscoplástico de Duvaut-Lions (1972) la tasa de deformación viscoplástica es

$$\dot{\epsilon}_{vp}^{DL} = \frac{\mathcal{E}^{-1}}{\eta} : (\boldsymbol{\sigma} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (13)$$

donde  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  representa el tensor de tensiones del material inviscido y  $\eta$  la viscosidad.

En el caso de la formulación de Perzyna<sup>9</sup>, la tasa de deformación viscoplástica se la define de la forma

$$\dot{\epsilon}_{vp}^P = \mathbf{g}(\psi, F, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{\eta} \langle \psi(F) \rangle \mathbf{m} \quad \text{con} \quad \psi(F) = \left[ \frac{F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{F_o} \right]^N \quad (14)$$

donde  $\mathbf{m} = \partial Q / \partial \boldsymbol{\sigma}$  es el tensor gradiente del potencial viscoplástico y  $F_o$  hace las veces de factor normalizador de tal manera que la función de tensión  $\psi(F)$  es adimensional.

En el caso de comportamiento material elasto-viscoplástico el operador tangente instantáneo no exhibe degradación en relación a las propiedades espectrales del operador elástico. En el marco de incrementos de tiempo realmente finitos, Ju<sup>7</sup> y Etse y Willam<sup>4</sup> dedujeron para los materiales viscosos el operador tangente algorítmico a partir de la solución *Backward Euler* del problema algebraico.

**Formulación inviscida y elasto-viscoplástica para hormigón**

En el presente estudio se consideró el modelo constitutivo elastoplástico para hormigón conocido como Modelo Extendido de Leon, ver Etse y Willam<sup>5</sup>. El mismo se basa en la ley del flujo no asociado de la plasticidad e incluye una formulación isótropa de endurecimiento y de ablandamiento. Esta última está basada en criterios de mecánica de fractura para reducir la dependencia en el tamaño de la malla de las predicciones de elementos finitos. El criterio de resistencia se formuló a partir de una extensión del criterio de falla para hormigón de Leon, teniendo en cuenta la variación elíptica de la resistencia deviatorica del modelo de 5 parámetros de Willam y Warnke<sup>14</sup>.

En este trabajo el Modelo Extendido de Leon fue generalizado para incluir la influencia de la velocidad de la carga. Esta generalización fue realizada en base a las dos formulaciones viscoplásticas clásicas: la de Duvaut-Lions y la de Perzyna.

**Integración de tensiones de viscoplasticidad de Perzyna**

Bajo consideración de material plástico, la regla de flujo de la Teoría Viscoplasticidad de Perzyna para el intervalo de tiempo  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  conduce a las relaciones constitutivas incrementales

$$\Delta \epsilon_n^{vp} = \frac{\Delta t_n}{\eta} \cdot \langle \psi(F)_n \rangle \cdot \mathbf{m}_n \tag{15}$$

$$\Delta \sigma_n = \mathcal{E} : (\Delta \epsilon_n - \Delta \epsilon_n^{vp}) \tag{16}$$

de donde se deduce

$$\sigma_n = \sigma_n^{pred} - \frac{\Delta t}{\eta} \cdot \langle \psi(F)_n \rangle \cdot \mathcal{E} : \mathbf{m}_n \tag{17}$$

siendo  $\sigma_n^{pred}$  el predictor de tensión, definido como  $\sigma_n^{pred} = \sigma_{n-1} + \mathcal{E} : \Delta \epsilon_n$ . De la ecuación (17) surge el siguiente residuo en tensiones

$$\mathbf{R}^\sigma = - \sigma_n + \sigma_n^{pred} - \frac{\Delta t}{\eta} \cdot \langle \psi(F)_n \rangle \cdot \mathcal{E} : \mathbf{m}_n \tag{18}$$

En caso de endurecimiento isótropo, la ley de incremento de la variable interna es definida solamente en términos de la variación de la deformación viscoplástica equivalente

$$\Delta \kappa_n = h \cdot \sqrt{\Delta \epsilon_n^{vp} : \Delta \epsilon_n^{vp}} \tag{19}$$

de (19) y (15) obtenemos

$$\Delta \kappa_n = \frac{\Delta t}{\eta} \cdot \langle \psi(F)_n \rangle \cdot h \cdot \sqrt{\mathbf{m}_n : \mathbf{m}_n} \tag{20}$$

A partir de (20) puede plantearse el siguiente residuo de variable interna

$$R_n^\kappa = -\kappa_n + \kappa_{n-1} + \frac{\Delta t}{\eta} \cdot \langle \psi(F)_n \rangle \cdot h \cdot \sqrt{\mathbf{m}_n : \mathbf{m}_n} \tag{21}$$

El Método de Euler-Backward para la integración de la ecuación constitutiva puede plantearse como la minimización de los residuos en tensiones y variable interna,  $\mathbf{R}_n^\sigma$  y  $R_n^\kappa$ , es decir, el problema consiste en determinar el par  $\{\sigma_n, \kappa_n\}$  que satisfacen las condiciones

$$R_n^\sigma = \mathbf{0}; \quad R_n^\kappa = 0 \tag{22}$$

donde  $\mathbf{0}$  representa el tensor nulo de segundo orden.

Expandiendo en serie de Taylor limitada a términos de primer orden, obtenemos de (18) y (21) los residuos correspondientes a la  $i$ -ésima iteración del  $n$ -ésimo incremento de carga de la forma

$$\mathbf{R}_i^\sigma = \mathbf{R}_{i-1}^\sigma + \left( \frac{\partial \mathbf{R}^\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_i : \Delta \boldsymbol{\sigma}_i + \left( \frac{\partial \mathbf{R}^\sigma}{\partial \kappa} \right)_i \cdot \Delta \kappa_i \tag{23}$$

y

$$R_i^\kappa = R_{i-1}^\kappa + \left( \frac{\partial R^\kappa}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_i : \Delta \boldsymbol{\sigma}_i + \left( \frac{\partial R^\kappa}{\partial \kappa} \right)_i \cdot \Delta \kappa_i \tag{24}$$

En lo sucesivo y como se indica en las últimas dos ecuaciones, los subíndices indican el número de iteración. A su vez, el par  $\{\Delta \boldsymbol{\sigma}_i, \Delta \kappa_i\}$  expresa el incremento de tensión y de la variable de estado  $\Delta \boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_{i-1}$  y  $\Delta \kappa_i = \kappa_i - \kappa_{i-1}$ . Imponiendo la condición (22) a las dos últimas ecuaciones obtenemos la solución para los incrementos de tensión y de la variable de estado, cuya expresión matricial es

$$\begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma} \\ \Delta \kappa \end{bmatrix}_i = - \left[ \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \mathbf{R}^\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) & \left( \frac{\partial \mathbf{R}^\sigma}{\partial \kappa} \right) \\ \left( \frac{\partial R^\kappa}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) & \left( \frac{\partial R^\kappa}{\partial \kappa} \right) \end{bmatrix}_{i-1} \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}^\sigma \\ R^\kappa \end{bmatrix}_{i-1} \tag{25}$$

La convergencia cuadrática a la solución de (25) requiere la linealización completa y consecuente de las funciones residuo. La última ecuación puede desglosarse de la forma

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_i = \left( \hat{\mathbf{R}}^\sigma \right)_i^{-1} : \left( \bar{\mathbf{R}}^\sigma \right)_i \tag{26}$$

$$\Delta \kappa_i = - \left( \frac{\partial R^\kappa}{\partial \kappa} \right)_{i-1}^{-1} \cdot \left( R_{i-1}^\kappa + \left( \frac{\partial R^\kappa}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{i-1} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_i \right) \tag{27}$$

donde  $\hat{\mathbf{R}}^\sigma$  y  $\bar{\mathbf{R}}^\sigma$  representan los tensores de cuarto y segundo orden respectivamente

$$\hat{\mathbf{R}}^\sigma = \left( \frac{\partial R^\kappa}{\partial \kappa} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{R}^\sigma}{\partial \kappa} \right) \otimes \left( \frac{\partial R^\kappa}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) - \left( \frac{\partial \mathbf{R}^\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \tag{28}$$

$$\bar{\mathbf{R}}^\sigma = \mathbf{R}^\sigma - \left(\frac{\partial R^\kappa}{\partial \kappa}\right)^{-1} \cdot R^\kappa \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{R}^\sigma}{\partial \kappa}\right) \quad (29)$$

Es importante notar que la extensión de estos resultados para el caso de leyes de endurecimiento y de ablandamiento no lineales es inmediata al substituir  $h \cdot \sqrt{\mathbf{m} : \mathbf{m}}$  por la función  $h(\|\mathbf{m}\|)$ .

Esta integración constitutiva y su correspondiente operador material tangente algorítmico se ha implementado para los modelos de Von Mises, Drucker-Prager y Extendido de Leon.

### Operador material tangente consistente con el método de Newton

El análisis de la respuesta no lineal en el contexto del Método de los Elementos Finitos requiere ecuaciones constitutivas incrementales que realmente reflejen el comportamiento material cuando se consideran incrementos finitos de carga. El punto crucial en el análisis de estos procesos incrementales es la apropiada linealización de las funciones de respuesta que debe conducir a operadores tangentes consistentes con el algoritmo utilizado en la evaluación de tensiones.

La linearización completa del residuo definido en (18) conduce ahora a la expresión

$$\mathbf{R}_n^\sigma = -\sigma_n + \sigma_{n-1} + \mathcal{E} : (\epsilon_n - \epsilon_{n-1}) - \frac{\Delta t}{\eta} \cdot \langle \psi(F_n) \rangle \cdot \mathcal{E} : \mathbf{m}_n \quad (30)$$

Considerando dos iteraciones sucesivas, el residuo puede expandirse en serie de Taylor limitada al primer término, es decir

$$\mathbf{R}_i^\sigma = \mathbf{R}_{i-1}^\sigma + \left(\frac{\partial \mathbf{R}^\sigma}{\partial \sigma}\right)_{i-1} : \Delta \sigma_i + \left(\frac{\partial \mathbf{R}^\sigma}{\partial \epsilon}\right)_{i-1} : \Delta \epsilon_i \quad (31)$$

Imponiendo la condición de convergencia  $\Delta \mathbf{R}_i^\sigma = \mathbf{R}_i^\sigma - \mathbf{R}_{i-1}^\sigma = 0$  a la (31) obtenemos

$$\frac{\Delta \sigma_i}{\Delta \epsilon_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{R}^\sigma}{\partial \epsilon}\right)_{i-1}^{-1} : \left(\frac{\partial \mathbf{R}^\sigma}{\partial \sigma}\right)_{i-1} \quad (32)$$

donde

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{R}^\sigma}{\partial \sigma}\right)_{i-1} &= -\mathbf{I}_4 - \frac{\Delta t}{\eta} \cdot E : \{ \langle \psi(F_n) \rangle \cdot \mathcal{H}_{i-1} + a \cdot \mathbf{n}_{i-1} \otimes \mathbf{m}_{i-1} \} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{R}^\sigma}{\partial \epsilon}\right)_{i-1} &= E \end{aligned} \quad (33)$$

siendo  $\mathbf{I}_4$  el tensor unidad de cuarto orden,  $\mathcal{H}_{i-1}$  el hessiano del potencial plástico para el incremento  $n$  iteración  $i - 1$  y

$$a \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \langle \psi(F) \rangle}{\partial \sigma} = \frac{\partial \langle \psi(F) \rangle}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \text{sgn}(\psi(F))) \cdot \frac{\partial \Psi(F)}{\partial F} \cdot \mathbf{n} \quad (34)$$

Reagrupando y aplicando Sherman-Morrison obtenemos sucesivamente

$$\mathbf{C}_i^{alg} = \frac{\Delta \boldsymbol{\sigma}_i}{\Delta \boldsymbol{\epsilon}_i} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{-1} + \frac{\Delta t_n}{\eta} \cdot \langle \psi(F)_{i-1} \rangle \cdot \mathcal{H}_{i-1} + \frac{\Delta t_n}{\eta} \cdot a \cdot \mathbf{n}_{i-1} \otimes \mathbf{m}_{i-1} \quad (35)$$

$$\mathcal{E}_i^{alg} = \mathbf{C}_i^{alg-1} = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{A}}{\frac{\eta}{\Delta t_n \cdot a} + \mathbf{n} : \mathbf{A} : \mathbf{m}} \quad (36)$$

Esta última expresión representa al operador tangente algorítmico, donde el tensor de cuarto orden  $\mathbf{A}$  se define como  $\mathbf{A} = \left( \boldsymbol{\mathcal{E}}^{-1} + \frac{\Delta t_n}{\eta} \cdot \langle \psi(F) \rangle \cdot \mathcal{H} \right)^{-1}$

### MÓDULO DE RIGIDEZ DIRECCIONAL

En el caso de leyes de flujo no asociadas es de gran ayuda estudiar las propiedades espectrales del operador material tangente  $\mathcal{E}_T$  relativas a las del operador elástico  $\mathcal{E}$ . Con este fin Runesson y Mroz (1989) han propuesto el llamado Módulo de Rigidez Direccional

$$s = \frac{\Delta \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}}{\Delta \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}} \quad (37)$$

cuya forma matemática, en el caso de control de deformaciones o de tensiones, es coincidente.

Es obvio que la forma cuadrática representada por  $s$  activa solamente la parte simétrica del operador material tangente  $\mathcal{E}_T$  y, por lo tanto, sólo ésta contribuye en el valor del Módulo de Rigidez Direccional. En otras palabras

$$s = \frac{\Delta \boldsymbol{\epsilon} : \mathcal{E}_T : \Delta \boldsymbol{\epsilon}}{\Delta \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\Delta \boldsymbol{\epsilon} : \mathcal{E}_T^{sim} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}}{\Delta \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}} \quad (38)$$

### Material elastoplástico

Las propiedades espectrales de  $s$  fueron analizadas por Runesson y Mroz<sup>10</sup> para el caso general de elastoplasticidad y por Willam y Etse<sup>13</sup> en correspondencia con el Modelo Extendido de Leon.

De (38) se deduce que el límite inferior y superior de  $s$  están definidos por los autovalores mínimo y máximo que satisfacen la ecuación de valores propios en términos del operador elastoplástico simétrico, normalizado  $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{-1} : \boldsymbol{\mathcal{E}}_{ep}^{sim}$ . Los autovalores mínimo y máximo vienen dados de la forma

$$\lambda_{\max; \min} = 1 - \frac{\mathbf{n} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : \mathbf{m}}{2\alpha} (1 \mp \beta) \quad (39)$$

con

$$\beta = \frac{(\mathbf{n} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : \mathbf{n})^{1/2} (\mathbf{m} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : \mathbf{m})^{1/2}}{\mathbf{n} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : \mathbf{m}} \quad (40)$$

Considerando que el ángulo entre  $\mathcal{E} : \mathbf{n}$  y  $\mathcal{E} : \mathbf{m}$  es menor que  $\pi/2$ , lo cual es usual en el caso de modelos elastoplásticos para materiales cohesivo-friccionales, resulta  $\mathbf{n} : \mathcal{E} : \mathbf{m} > 0$ . Teniendo en cuenta además que  $E_p/\mathbf{n} : \mathcal{E} : \mathbf{m} > 0$ , en la etapa de endurecimiento se deduce que  $\lambda_{\min} \leq 1 \leq \lambda_{\max}$ .

De interés es analizar el caso en que  $\lambda_{\min} \leq 0$  indicando que  $s$  puede tornarse negativo. El valor crítico del módulo de endurecimiento a partir del cual de (39) se obtiene el valor crítico del módulo de endurecimiento  $E_p^{crit}$  a partir del cual  $\lambda_{\min} \leq 0$  fue obtenido por Mroz<sup>8</sup> para elasticidad isótropa y flujo deviatorico. De (39) se obtiene el valor de  $E_p^{crit}$  para el caso más general

$$E_p^{crit} = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{n} : \mathcal{E} : \mathbf{n})^{1/2} (\mathbf{m} : \mathcal{E} : \mathbf{m})^{1/2} - \mathbf{n} : \mathcal{E} : \mathbf{m} \right] \quad (41)$$

En el caso de plasticidad asociada se deduce que  $E_p^{crit} = 0$ , indicando que  $s$  no se torna negativo durante el régimen de endurecimiento. En otras palabras, la condición de inestabilidad y de pérdida continua de la unicidad acontece por primera vez cuando se satisface el criterio de resistencia límite.

A medida que crece el grado de no asociatividad (mayor diferencia angular entre  $\mathcal{E} : \mathbf{n}$  y  $\mathcal{E} : \mathbf{m}$ , correspondiéndose con  $\mathbf{n} : \mathcal{E} : \mathbf{m} \rightarrow 0$ ) crece el valor de  $E_p^{crit}$  hasta alcanzar su valor máximo cuando  $\mathcal{E} : \mathbf{n} \perp \mathcal{E} : \mathbf{m}$ , indicando que el pseudoablandamiento ( $s < 0$ ) puede iniciarse más tempranamente en el régimen de endurecimiento.

El otro caso límite corresponde a  $s > 1$ , lo cual indica que la rigidez direccional excede la rigidez elástica. De (39) se deduce que para asociatividad,  $\beta = 1$ , resulta  $\lambda_{\max} = 1$ . Por el contrario se observa que  $\lambda_{\max}$  tiende al valor límite  $\lambda_{\max} \rightarrow 1 + \frac{(\mathbf{n} : \mathcal{E} : \mathbf{n})^{1/2} (\mathbf{m} : \mathcal{E} : \mathbf{m})^{1/2}}{2E_p}$  cuando,  $\mathbf{n} : \mathcal{E} : \mathbf{m} \rightarrow 0$ . Es decir, la sobrerigidez respecto al valor elástico crece con el grado de no asociatividad. Obviamente,  $\lambda_{\max}$ , para un predeterminado grado de no asociatividad, crece con el decaimiento del módulo de endurecimiento y de ablandamiento, alcanzando su valor máximo cuando  $E_p = 0$ , es decir, sobre la superficie de máxima resistencia.

### Material viscoplástico de Duvaut-Lions

En este caso, el tensor incremento de tensiones, dentro de intervalos finitos de tiempo, viene dado de la forma

$$\Delta \sigma = \mathcal{E} : (\Delta \epsilon - \Delta \epsilon_{vp}) \quad (42)$$

reemplazando en esta última expresión la ec. (13) y luego de algunos pasos algebraicos obtenemos

$$\Delta \sigma = \mathcal{E} : \Delta \epsilon - \frac{\Delta t}{\eta \Delta t} \mathcal{E} : \Delta \epsilon_p \quad (43)$$

con  $\Delta \epsilon_p = \Delta \lambda \mathbf{m}$ .

Para obtener la forma extendida de  $\Delta \sigma$  se debe reemplazar  $\Delta \lambda$  por su forma linealizada completa que se obtiene aplicando el método Backward Euler en la integración de las ecuaciones constitutivas elastoplásticas. Para los fines del presente

análisis, consideramos incrementos pequeños, lo cual equivale a aproximar  $\Delta\lambda$  con su forma de tasa  $\dot{\lambda}$  que se deduce de la condición de consistencia plástica. Procediendo así en la última ecuación obtenemos

$$\Delta\sigma = \mathcal{E} : \Delta\epsilon - \frac{\Delta t}{\eta + \Delta t} \frac{(\mathcal{E} : \mathbf{m})(\mathbf{n} : \mathcal{E} : \Delta\epsilon)}{\alpha} \quad (44)$$

Consecuentemente el Módulo de Rigidez Direccional resulta

$$S_{vp}^{DV} = 1 - \frac{\Delta t}{\eta + \Delta t} \frac{(\Delta\epsilon : \mathcal{E} : \mathbf{m})(\mathbf{n} : \mathcal{E} : \Delta\epsilon)}{(\Delta\epsilon : \mathcal{E} : \Delta\epsilon)\alpha} \quad (45)$$

Observamos los casos límites cuando  $\eta \rightarrow 0$  y  $\eta \rightarrow \infty$ . El primer caso conduce a  $s_{vp}^{DL} \rightarrow s_{ep}$ . Es decir, obtenemos la aproximación elastoplástica del Módulo de Rigidez Direccional y, consecuentemente, el material viscoplástico predice inestabilidad y pérdida continua de la unicidad para los mismos estados tensionales que el modelo inviscido. En particular, cuando  $\mathbf{m} : \mathcal{E} : \Delta\epsilon < 0$ , siendo que por la condición de convexidad es siempre  $\mathbf{n} : \mathcal{E} : \Delta\epsilon > 0$ , resulta, tal como ocurre en la elastoplasticidad,  $s > 1$ . Esta sobrerigidez es mayor cuanto más cercano este el punto de tensión a la superficie de máxima resistencia, es decir, cuando  $E_p \rightarrow 0$  y, en el régimen de ablandamiento, lejos de decrecer, continúa aumentando su valor. Lo dicho significa que cuando cargamos con un incremento de tensiones prueba  $\Delta\sigma^t = \mathcal{E} : \Delta\epsilon$  direccionado en la zona subtendida entre las tangentes al potencial plástico y a la superficie de fluencia conduce a una sobrerigidez por arriba del valor elástico, siempre y cuando  $E_p < E_p^{\text{crit}}$ , definido en (41). Evidentemente este caso límite,  $\eta \rightarrow 0$ , puede conducir también a pseudoablandamientos cuando  $\mathbf{m} : \mathcal{E} : \Delta\epsilon > 0$ , tal cual es el caso de la elastoplasticidad.

El segundo caso límite conduce a  $s_{vp}^{DL} \rightarrow 1$ , correspondiendo a la rigidez elástica.

De interés particular es considerar la viscoplasticidad asociada  $\mathbf{n} = \mathbf{m}$ . En este caso resulta

$$s_{vp}^{DV} = 1 - \frac{\Delta t}{\eta + \Delta t} \frac{(\mathbf{n} : \mathcal{E} : \Delta\epsilon)^2}{(\Delta\epsilon : \mathcal{E} : \Delta\epsilon)\alpha} \quad (46)$$

Analizamos nuevamente los valores extremos de  $\eta$ . En el caso límite  $\eta \rightarrow 0$ , el Módulo de Rigidez Direccional del material viscoplástico predecirá rigidez nula sólo cuando  $E_p = 0$ , siendo  $\mathcal{E} : \Delta\epsilon = \mathcal{E} : \mathbf{n}$ . Es decir, sobre la superficie de máxima resistencia y considerando la carga aplicada en la dirección y con la magnitud crítica definida por el gradiente a dicha superficie. Este caso es idéntico a la predicción de  $s$  en el caso elastoplástico asociado según se mostró anteriormente en el análisis espectral de  $\mathcal{E}_T^{sm}$ .

En el otro caso límite,  $\eta \rightarrow \infty$ , obtendremos  $s_{vp}^{DV} \rightarrow 1$  correspondiendo al caso elástico.

### Material viscoplástico de Perzyna

De la ley de descomposición del tensor incremento de deformaciones en una parte elástica y otra viscoplástica y de (14), obtenemos en el caso de Perzyna la siguiente expresión para el tensor incremento de tensiones

$$\Delta\sigma = \mathcal{E} : \Delta\epsilon - \frac{\Delta t}{\eta} \langle \psi(F) \rangle \mathcal{E} : \mathbf{m} \quad (47)$$

luego

$$s_{vp}^P = 1 - \Delta t \frac{\langle \psi(F) \rangle}{\eta} \frac{\Delta\epsilon : \mathcal{E} : \mathbf{m}}{\Delta\epsilon : \mathcal{E} : \Delta\epsilon} \quad (48)$$

Observamos que  $s_{vp}^P \rightarrow 1$  si  $\eta \rightarrow \infty$  indicando que en este caso límite, al igual que el material viscoplástico de Duvaut-Lions, obtenemos la rigidez elástica, para toda dirección de carga. Analizamos el otro caso límite de acuerdo a la relación entre el ángulo  $\phi(\mathcal{E} : \Delta\epsilon; \mathcal{E} : \mathbf{m})$  y  $\pi/2$

- $\phi > \pi/2 (\Delta\epsilon : \mathcal{E} : \mathbf{m} < 0)$   
 $s_{vp}^P \rightarrow \infty$  si  $\eta \rightarrow 0$
- $\phi < \pi/2 (\Delta\epsilon : \mathcal{E} : \mathbf{m} > 0)$   
 $s_{vp}^P \rightarrow -\infty$  si  $\eta \rightarrow 0$

Es decir, el caso límite  $\eta \rightarrow 0$  puede conducir a sobrerigideces o pseudoablandamientos en régimen de endurecimiento, de acuerdo a la orientación de la carga respecto de la normal al potencial viscoplástico, coincidiendo con el caso de Duvaut-Lions. Sin embargo, y lo que es importante notar, la sobrerigidez y pseudoablandamiento en este caso límite pueden ser bastante más considerables que en el caso de Duvaut-Lions o bien del material inviscido.

### ANÁLISIS NUMÉRICO

En esta sección analizamos la variación del Módulo de Sobrerigidez Direccional durante la historia de tensiones del Ensayo de Inestabilidad de Smith<sup>12</sup>, en el caso de considerar a nivel material los modelos viscoplásticos resultantes de generalizar el Modelo Extendido de Leon según la formulación viscoplástica de Duvaut-Lions y de Perzyna. La performance de  $s$  durante el ensayo de inestabilidad para el caso de la formulación inviscida del Modelo Extendido de Leon fue analizada anteriormente por Willam y Etse<sup>13</sup>.

El Ensayo de Inestabilidad fue llevado a cabo con control de tensiones en probeta cilíndrica de hormigón. El objetivo era analizar el problema de la inestabilidad temprana de materiales friccionales como el hormigón, los cuales requieren formulaciones elastoplásticas no asociadas para predecir la dilatación volumétrica en compresión con bajo confinamiento. En este estudio experimental se trataba de verificar los argumentos dados por Sandler y Rubin<sup>11</sup> quienes mediante argumentos teóricos predecían la falla material por inestabilidad cuando el camino de carga se introduce

en el cono definido entre la superficie de fluencia y el potencial plástico. Debido a la pérdida de normalidad, el trabajo plástico de segundo orden  $d^2W_p = \dot{\sigma} : \dot{\epsilon}_p$  se vuelve en ese caso negativo, lo cual indica inestabilidad de acuerdo al postulado de Drucker<sup>2</sup>. En el Ensayo de Inestabilidad de Smith<sup>12</sup> la probeta de hormigón fue cargada hasta el incremento 20 en forma hidroestática y luego hasta el incremento 32 en forma deviatórica. En la última parte el camino de carga activó el cono subtendido entre la superficie de fluencia y el potencial plástico.

Las Figuras 1 y 2 muestran las predicciones del ensayo de inestabilidad obtenidas con las formulaciones viscoplásticas de Duvaut-Lions y de Perzyna del Modelo Extendido de Leon, para diferentes valores de la viscosidad  $\eta$ . En el caso extremo  $\eta \rightarrow 0$  ambas formulaciones constitutivas reproducen la respuesta del modelo inviscido elastoplástico. Las predicciones de ambos modelos viscoplásticos indican que el comportamiento material durante el ensayo de inestabilidad se mantiene en el régimen de endurecimiento, sin incursionar en la etapa de ablandamiento. Al final del ensayo el estado tensional alcanza la proximidad de la superficie de máxima resistencia del modelo.

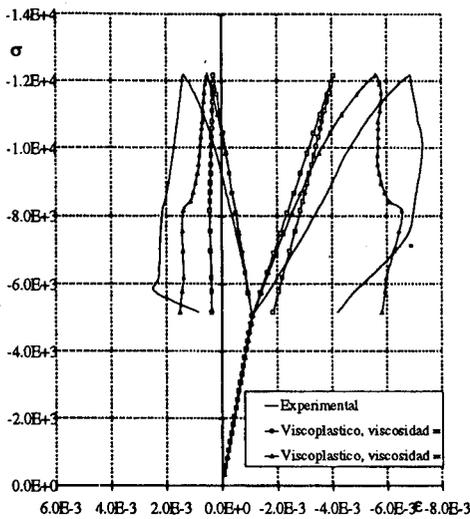


Figura 1. Predicción del ensayo de inestabilidad. Modelo viscoplástico de Duvaut-Lions - Extendido de Leon

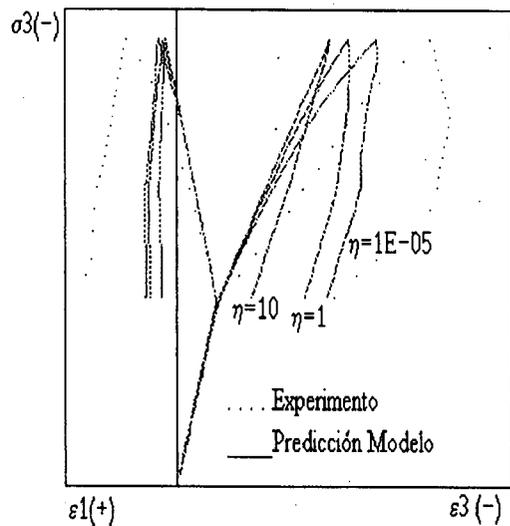
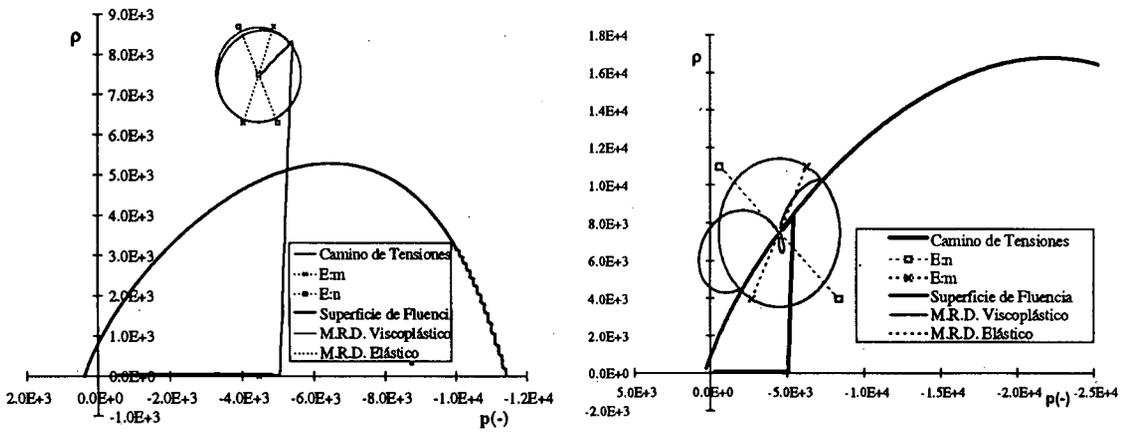


Figura 2. Predicción del ensayo de inestabilidad. Modelo viscoplástico de Perzyna - Extendido de Leon

La Figura 3 muestra, para el caso de la formulación viscoplástica de Duvaut-Lions, la variación de  $s$  en el paso de carga 38 del ensayo de inestabilidad, bajo consideración de diferentes valores de viscosidad. Se observa que con el incremento de la viscosidad aumenta la sobretensión, y por lo tanto,  $s \rightarrow 1$  para toda dirección de carga considerada. Por el contrario, cuando la viscosidad decrece,  $s$  reproduce la performance observada en el caso del modelo inviscido, mostrando pseudoendurecimiento cuando cargamos en la región subtendida entre la tangente al potencial plástico y la tangente a la superficie



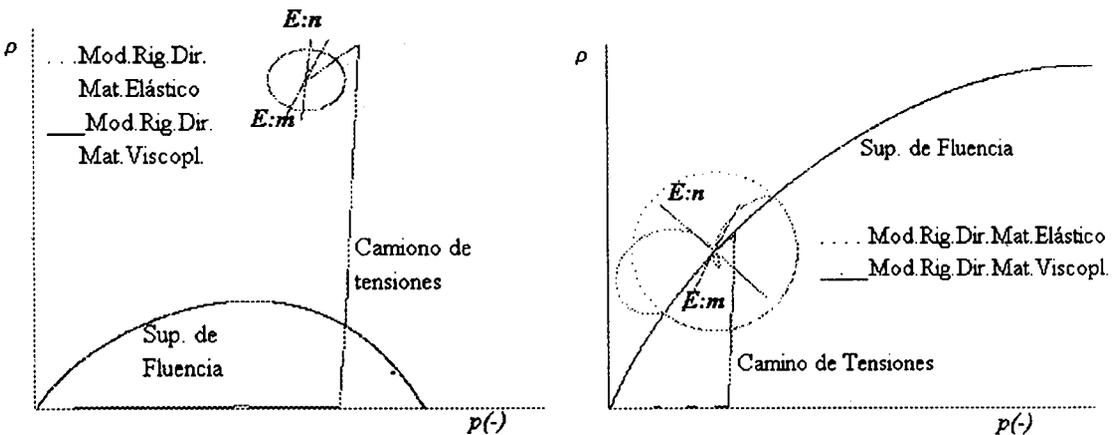
$\eta = 10, 0; \Delta t = 1, 0$

$\eta = 10, 0; \Delta t = 1, 0$

Figura 3. Variación del Módulo de Rigidez Direccional con el modelo viscoplastico de Duvaut-Lions - Extendido de Leon, para diferentes valores de viscosidad en el paso de carga 38

de fluencia la dirección de carga. Por el contrario, obtenemos pseudoablandamiento cuando cargamos en la región comprendida entre  $\mathcal{E} : \mathbf{n}$  y  $\mathcal{E} : \mathbf{m}$ .

La Figura 4 muestra idénticos diagramas que los correspondientes a la Figura 3 pero para el caso de la formulación viscoplastica de Perzyna, de donde se pueden inferir las mismas conclusiones que en el caso de Duvaut-Lions.

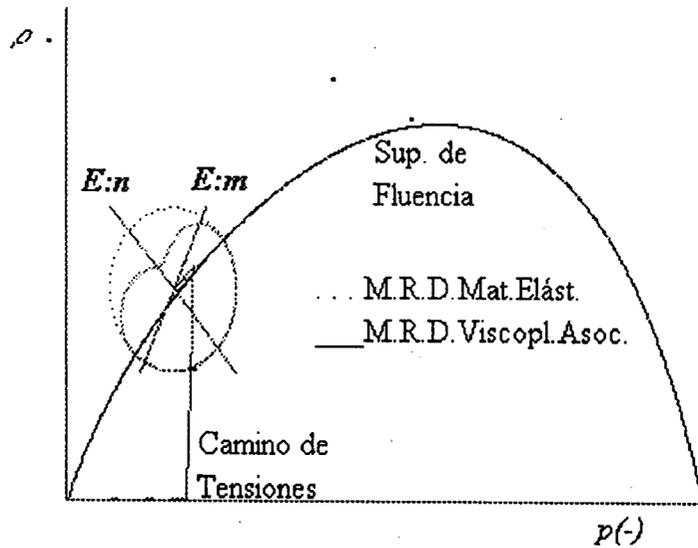


$\eta = 10, 0; \Delta t = 1, 0$

$\eta = 10, 0; \Delta t = 1, 0$

Figura 4. Variación del Módulo de Rigidez Direccional con el modelo viscoplastico de Perzyna - Extendido de Leon, para diferentes valores de viscosidad en el paso de carga 38

Importante es analizar el caso de viscoplasticidad asociada. La Figura 5 muestra la variación de  $s$  en el caso de Perzyna para el paso de carga 38, considerado anteriormente. Podemos observar que para valores pequeños de  $\eta$  la rigidez alcanza su valor mínimo cuando la dirección de la carga es colineal con la normal a la superficie de fluencia, sin embargo  $s$  se mantiene siempre positivo, dado que  $E_p > 0$ .



$$\eta = 10,0; \Delta t = 1,0$$

Figura 5. Variación del Módulo de Rigidez Direccional con el modelo viscoplastico asociado de Perzyna - Extendido de Leon en el paso de carga 38

## CONCLUSIONES

La condición de inestabilidad local y de bifurcación continua fueron analizadas en el marco de formulaciones viscoplasticas de Duvaut-Lions y de Perzyna. Los resultados muestran que con valores decrecientes de la viscosidad la condición de inestabilidad y de pérdida de la unicidad pueden ser satisfechas en el caso de no asociatividad y durante el régimen de endurecimiento para las mismas direcciones críticas del caso inviscido. En este caso límite,  $\eta \rightarrow 0$ , se observó además que la formulación de Perzyna puede conducir a sobrerigideces y pseudoablandamientos aún mayores que la de Duvaut-Lions, o bien que la obtenida con la formulación inviscida.

## REFERENCIAS

1. R. de Borst, "Non-linear Analysis of Frictional Materials", Tesis doctoral, Universidad de Delft, Holanda, (1986).
2. D.C. Drucker, "A Definition of Stable Inelastic Materials", *J. Appl. Mech.*, Vol. **26**, pp. 101-106, (1959).
3. G. Duvaut y J.L. Lions, "*Les Inéquations en Mécanique et en Physique*", Dunod, Paris, France, (1972).
4. G. Etse y K. Willam, "A Fracture Energy Formulation for Inelastic Behavior of Plain Concrete", ASCE, *J. Mech. Div.*, Vol. **120**, No. **9**, pp. 1983-2011, (1994).
5. G. Etse y K. Willam, "Rate Dependent Elastic-Viscoplastic Formulation for Computational Failure Simulations in Concrete", *ASCE-10th Specialty Conference in Eng. Mech.*, S. Sture, (Ed.), ASCE New York, pp. 651-655, (1995).
6. R. Hill, "A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids", *Mechanics and Physics of Solids*, Vol. **6**, pp. 236-249, (1958).
7. J.W. Ju, "Consistent Tangent Moduli for a Class of Viscoplasticity", *J. Eng. Mech.*, Vol. **116**, No. **8**, (1990).
8. Z. Mroz, "On Forms of Constitutive Laws for Elastic-Plastic Solids", *Arch. Mech. Stosowanej*, Vol. **18**, pp. 1-34, (1966).
9. P. Perzyna, "Fundamental Problems in Viscoplasticity", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. **9**, pp. 244-368, Academic Press, New York, (1966).
10. K. Runesson y Z. Mroz, "A Note on Non-Associated Plastic Flow Rules", *Int. J. of Plasticity*, Vol. **5**, pp. 639-658, (1989).
11. S.S. Sandler y D. Rubin, "The Consequences of Non-Associated Plasticity in Dynamic Problems", *Constitutive Laws for Engineering Materials*, pp. 345-352, C. Desai (Ed.), Elsevier Science Publ. Co., (1987).
12. S. Smith, "On Fundamental Aspects of Concrete Behavior", Tesis de Master of Science, University of Colorado, Boulder, Colorado, USA, (1987).
13. K. Willam y G. Etse, "Failure Assessment of the Extended Leon Model for Plain Concrete", *Conf. Proc. Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Zell am See, Abril 4-6, Pineridge Press, Swansea, (1990).
14. K. Willam y E. Warnke, "Constitutive Models for the Triaxial Behaviour of Concrete", *Int. Assoc. Bridge Struct. Engn. Proc.*, Vol. **19**, pp. 1-30, (1975).